Condensatori e capacità

Dato un conduttore lontano da altri conduttori si definisce la sua capacità C come il rapporto fra la carica q accumulata su di esso e il suo potenziale elettrico φ

$$C = \frac{q}{\varphi}$$

C si misura in Farad (Coulomb/Volt) e dipende da:
- forma del conduttore
- costante dielettrica ε_r del mezzo in cui è immerso

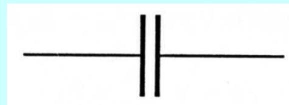
(ex: sfera di raggio R = 1 cm in aria ha $C = 4\,\pi\,\varepsilon_r\,\varepsilon_0\,R = 1.1$ pF)

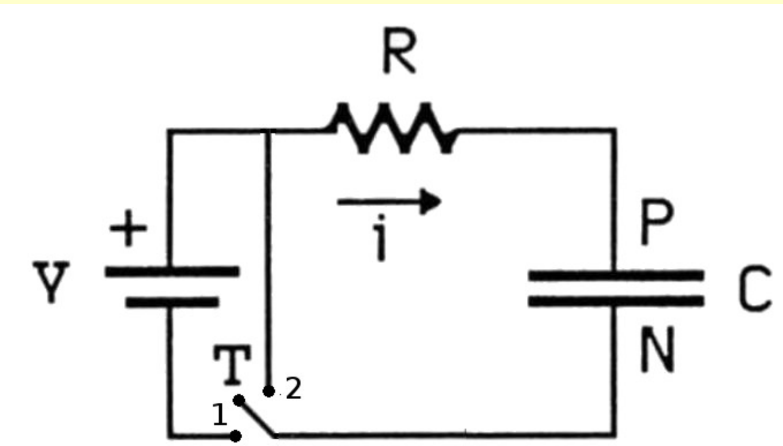
Per aumentare la carica q accumulata si possono porre due conduttori molto vicini (condensatore); nel caso di induzione completa le cariche sui conduttori sono uguali e contrarie. Indicando con q il valore assoluto di tali cariche e con V la differenza di potenziale tra i due conduttori si ha

$$C = \frac{q}{V}$$

Per due conduttori (armature) piani indefiniti posti a distanza d e con densità superficiale di carica $\pm\sigma$ si ha
$q = \sigma\,S$, $E = \sigma / \varepsilon_r\,\varepsilon_0 \rightarrow V = \sigma d / \varepsilon_r\,\varepsilon_0$, $C = \varepsilon_r\,\varepsilon_0 S / d$

Circuito R-C serie

Simbolo circuitale  **Elemento a costanti concentrate → condizioni stazionarie soddisfatte**



A t = 0 è q = 0 e viene chiuso T in 1
Il condensatore C si carica: l'induzione completa assicura che la corrente i è la stessa in ogni punto del circuito e quindi

$$div\ \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left(\frac{\partial \rho_P}{\partial t} + \frac{\partial \rho_N}{\partial t}\right) = 0$$

Se le dimensioni del circuito sono molto piccole rispetto al prodotto tra la velocità della luce e l'intervallo di tempo nel quale l'assetto elettrico del circuito cambia apprezzabilmente possiamo applicare la seconda Legge di Kirchhoff ed ottenere:

$$iR + \frac{q}{C} - V = 0 \longrightarrow \frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{V}{R} \longrightarrow q(t) = CV\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right]$$

Circuito R-C serie

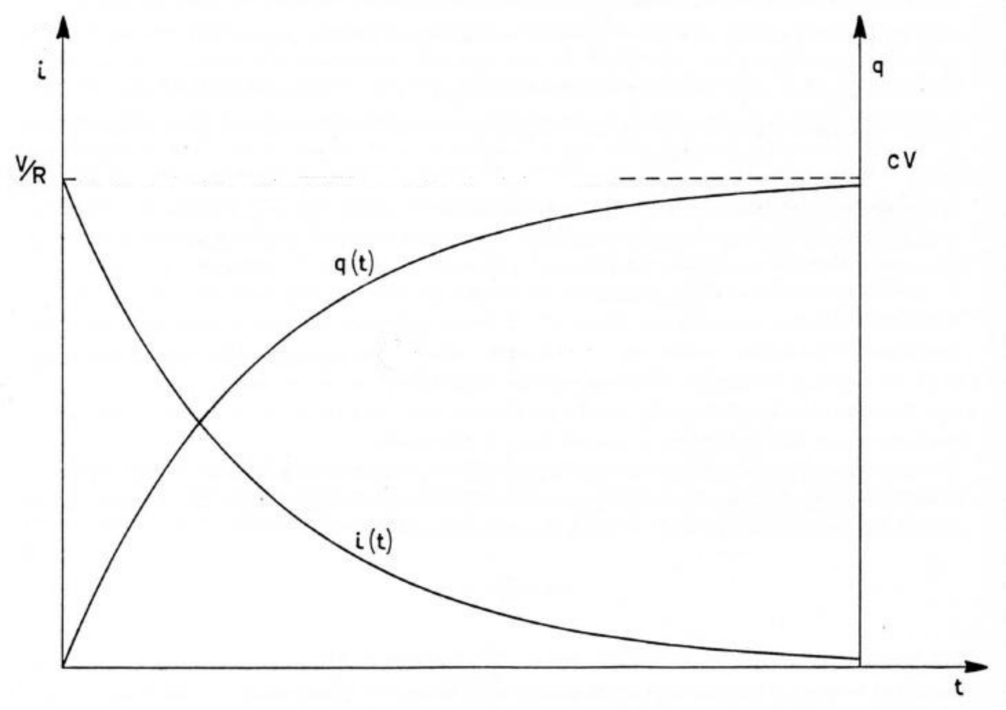
$$q(t) = CV\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right]$$

q(t) → V_C(t) = q(t) / C → circuito passa basso

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{V}{R}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

i(t) → V_R (t) = i(t) * R → circuito passa alto

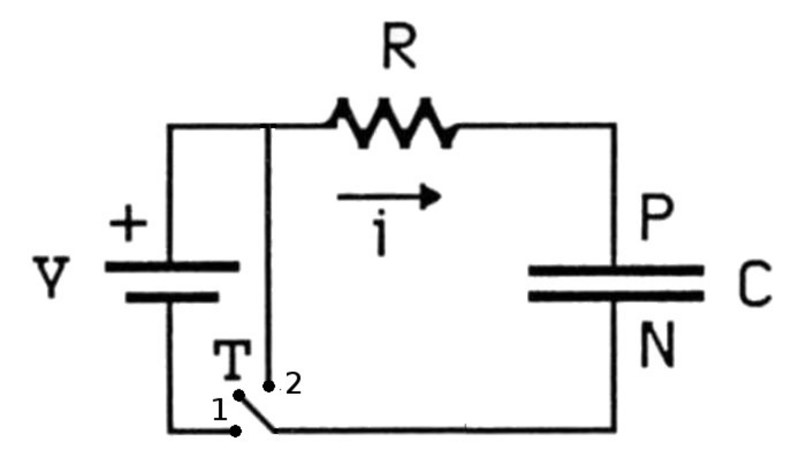
$$RC = \tau \text{ (detta } \textit{costante di tempo}\text{)}$$



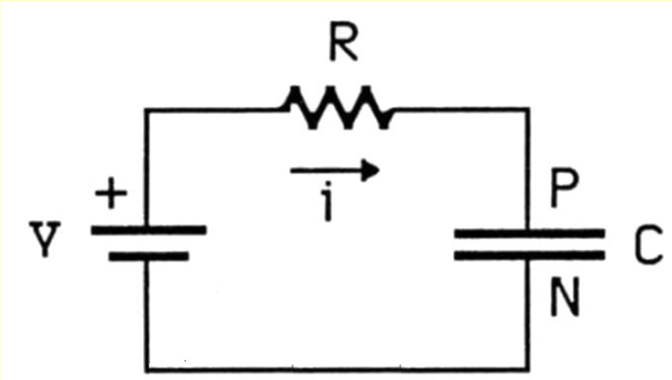
A t >> τ tasto T in 2
(t = 4τ, q =0.98 CV)

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = 0$$

$$q = CV\exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \qquad i(t) = -\frac{V}{R}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$



Energia accumulata in un condensatore



In base alla seconda legge di Kirchhoff istante per istante avremo

$$v(t) = i(t)R + \frac{q(t)}{C}$$

$$v(t)i(t) - i^2(t)R = \frac{q(t)}{C}i(t)$$

potenza istantanea fornita dal generatore

perdita per effetto Joule

potenza accumulata in C sotto forma di campo elettrico

derivata temporale di

$$W_E = \frac{1}{2}\frac{q^2(t)}{C}$$

Sappiamo che

$$i(t) = \frac{V}{R}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

Sostituendo nella eq. diff. e integrando

$$\int_0^\infty \frac{V^2}{R}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)dt - \int_0^\infty \frac{V^2}{R^2}R\exp\left(-2\frac{t}{RC}\right)dt =$$

$$= \frac{V^2}{R}\left[RC\int_0^\infty \frac{1}{RC}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)dt - \frac{RC}{2}\int_0^\infty \frac{2}{RC}\exp\left(-\frac{2t}{RC}\right)dt\right] =$$

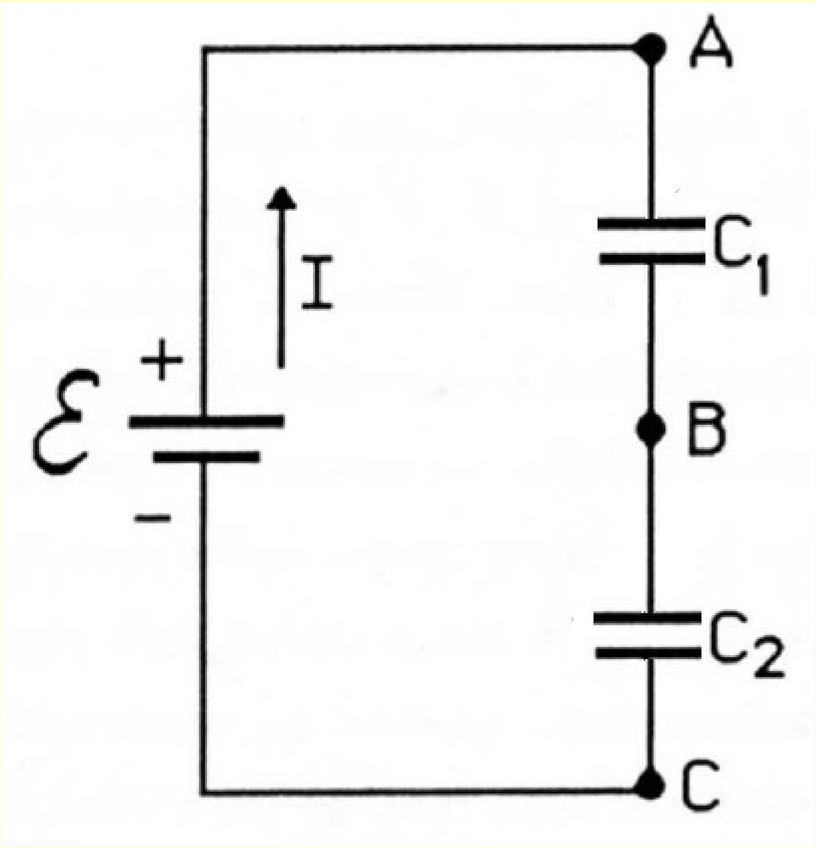
$CV^2 - CV^2/2 = CV^2/2$

= 1

generatore

Joule

Condensatori in serie

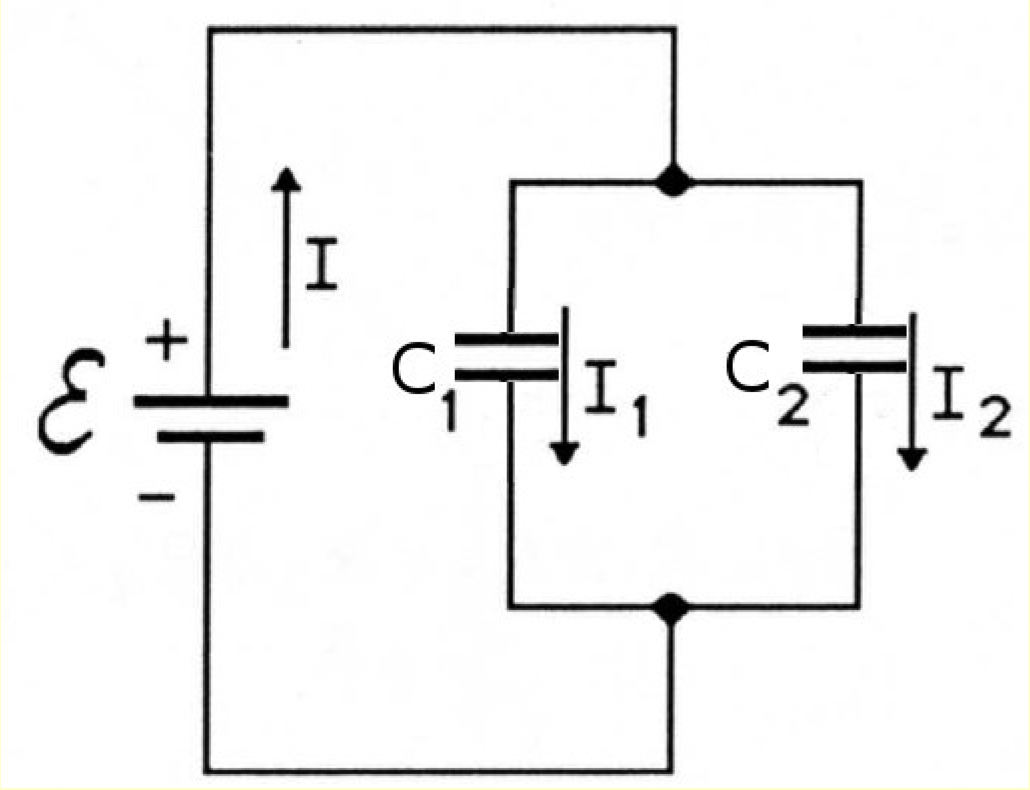


$$\begin{cases} V_A - V_B = q/C_1 \\ V_B - V_C = q/C_2 \end{cases}$$

$$\varepsilon = V_A - V_C = q \cdot \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$$

$$C_T = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Condensatori in parallelo



$$\varepsilon = \frac{q_1}{C_1}$$

$$\varepsilon = \frac{q_2}{C_2}$$

$$q = q_1 + q_2 = \varepsilon \cdot \left(C_1 + C_2\right)$$

$$C_T = \frac{q}{\varepsilon} = C_1 + C_2$$