

Università degli Studi di Firenze
Facoltà di Scienze Mat., Fis. e Nat.
Corso di Laurea in Matematica

Corso di Laboratorio di Fisica I

Dr. P. Pietrini

Versione compattata degli Appunti su:

**IL PENDOLO COME PRECISO STRUMENTO DI MISURA
DEL MODULO DELL'ACCELERAZIONE DI GRAVITÀ**

1 Introduzione

L'accelerazione di gravità, il cui modulo indichiamo con g , è una quantità fisica di fondamentale importanza, sia nella nostra vita di tutti i giorni che in una vasta gamma di discipline scientifiche. Il valore di g dipende, come è noto, dalla posizione sulla superficie terrestre (latitudine, essenzialmente) e dall'altezza della superficie stessa rispetto al livello del mare, ma localmente è considerabile come una costante. Fino a tempi relativamente recenti, la misura precisa del modulo dell'accelerazione di gravità locale è sempre stata realizzata tramite esperimenti basati sul moto oscillatorio del pendolo; anzi, proprio grazie alle misure di g effettuate con pendoli di uguali caratteristiche in siti diversi del “globo” terrestre, è stato possibile ottenere le prime informazioni sulla forma e la distribuzione della massa della Terra.

Nella esperienza di laboratorio dedicata al pendolo, utilizzeremo questo sistema fisico per effettuare una misura del modulo dell'accelerazione di gravità locale; verificheremo anche il fatto che l'“isocronismo” delle oscillazioni è limitato alle sole “oscillazioni di piccola ampiezza”, ma che, in generale, il periodo dell'oscillazione del pendolo dipende anche dall'ampiezza dell'oscillazione stessa (“anisocronismo” delle oscillazioni di ampiezza generica).

2 Il pendolo semplice: schematizzazione del moto ideale

Cominciamo con la descrizione fisica del pendolo semplice e del suo moto ideale. Per “pendolo semplice” si intende un punto materiale di massa m vincolato a muoversi su un arco di circonferenza di raggio prefissato, detto lunghezza l del pendolo, sotto l'azione della forza peso, di modulo mg ; questa è diretta verticalmente per cui, se il pendolo all'istante iniziale è fermo (oppure la sua eventuale velocità iniziale è contenuta in un piano verticale), la traiettoria del moto si svolge su un piano verticale (supponendo, sui tempi di interesse per le misure, di poter trascurare gli effetti della rotazione terrestre). Il vincolo è idealmente realizzato tramite una funicella di lunghezza l , inestendibile, di massa trascurabile rispetto a m , perfettamente flessibile e con una estremità fissata al punto O di sospensione. Nella realtà fisica il pendolo viene realizzato con una sferetta di massa m , che supponiamo per i nostri scopi di poter considerare assimilabile ad un punto materiale¹, appesa ad un filo, le cui caratteristiche (inestendibilità e trascurabilità della massa) dovrebbero avvicinarsi quanto meglio possibile a quelle ideali citate sopra. È facile comprendere che, passando dalla schematizzazione matematica ideale alla realizzazione fisica pratica, ci possiamo aspettare che il moto reale che osserveremo e studieremo in laboratorio sia più complesso di quello ideale che illustreremo in questa sezione; tuttavia, la schematizzazione fisica che introdurremo fornisce la base per la descrizione dell'esperienza. Da una parte, dovremo cercare nella realizzazione pratica di avvicinarci quanto più possibile alle condizioni ideali e, dall'altra, dovremo valutare se e quanto la semplificazione nella descrizione del fenomeno e/o la presenza di fenomeni fisici “non-ideali” (cioè essenzialmente dissipazione di energia per attrito viscoso dell'aria in cui il pendolo si muove o per attriti nel sistema di sospensione del pendolo) influenzano la misura effettiva delle quantità fisiche di interesse. Questo tipo di considerazioni (qui solo menzionate per chiarezza) verranno sviluppate meglio in seguito, nell'Appendice B.

¹Lo studente verifichi quantitativamente questa ipotesi in laboratorio

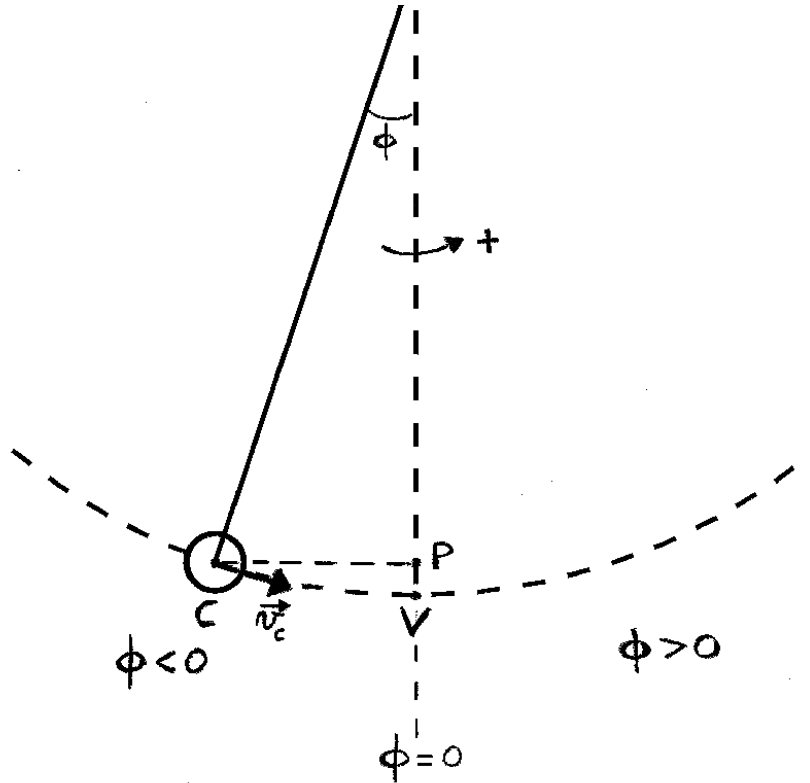


Figura 1:

Riferendosi alla **Fig. 1**, la lunghezza del pendolo l è chiaramente definita dalla distanza fra il punto O di sospensione e il centro di massa C della sferetta, che, per una sferetta omogenea, coincide con il centro geometrico della sfera stessa: $\overline{OC} = l$; per la costanza di \vec{g} sulle dimensioni della sfera, si può inoltre applicare la forza peso totale sulla sferetta in C . Nello stato a riposo del sistema, il pendolo si trova col centro di massa della sferetta C coincidente col punto V sulla verticale passante per il punto di sospensione O . Nell'ambito di spostamenti permessi al pendolo, possiamo considerare costanti in ogni punto della traiettoria del moto sia il valore di g , sia la direzione della forza peso sul pendolo.

Spostando il pendolo dalla posizione di equilibrio, mantenendo teso il filo di sospensione e lasciandolo andare da una posizione in cui il filo stesso forma un angolo con la verticale pari a ϕ_0 , detto ampiezza angolare dell'oscillazione, il pendolo comincerà il suo moto oscillatorio, descrivendo, come già detto, una traiettoria che è un arco di circonferenza di raggio l su un piano verticale passante per il punto O di sospensione. Con questo vincolo, il moto risulta descrivibile tramite una singola coordinata angolare, cioè il generico angolo $\phi(t)$ che all'istante t il filo teso del pendolo forma con la verticale per O .

Nelle condizioni ideali in cui il lavoro compiuto, ovvero l'energia dissipata, dalle forze di

attrito agenti sul sistema (attrito viscoso dell'aria, attriti nel sistema di sospensione del pendolo) sia trascurabile rispetto all'energia cinetica massima del moto del pendolo, dopo ogni oscillazione completa il pendolo tornerà nella posizione angolare ϕ_0 di partenza. La durata di ogni oscillazione completa si dice periodo, T , del pendolo.

Per la descrizione del moto definiamo le convenzioni e le notazioni scelte come in **Fig. 1**. Prendiamo così l'origine della coordinata angolare $\phi = 0$ sulla verticale dal punto O di sospensione del pendolo e ϕ positivo per spostamenti in senso antiorario a partire da tale posizione. Con questa scelta, nella configurazione riportata ad esempio in **Fig. 1** la velocità del centro di massa $\mathbf{v}_C = v_C \mathbf{e}_\phi$, dove \mathbf{e}_ϕ è il versore della direzione tangenziale, risulta diretta positivamente, ovvero $v_C > 0$. Inoltre, la velocità del centro di massa C si può in generale esprimere in funzione della derivata temporale della coordinata angolare $\phi(t)$, ovvero $\dot{\phi}$, come segue:

$$\mathbf{v}_C = (l\dot{\phi}) \mathbf{e}_\phi. \quad (1)$$

Con queste notazioni e con le ipotesi fatte, possiamo scrivere per il moto del pendolo la relazione che esprime la conservazione dell'energia, considerando ad esempio le differenze di energia cinetica e potenziale come valutate fra la posizione angolare generica $\phi(t)$, in cui la velocità angolare assume il valore $\dot{\phi}(t)$, e l'origine $\phi = 0$,

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2(t) - \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2(\phi = 0) = mgl(\cos \phi - 1); \quad (2)$$

da questa si ha

$$\dot{\phi}^2 - \dot{\phi}^2(\phi = 0) = 2 \left(\frac{g}{l} \right) (\cos \phi - 1). \quad (3)$$

Derivando rispetto al tempo questo integrale primo del moto, si ottiene l'equazione differenziale di secondo ordine per il moto del pendolo

$$\ddot{\phi} + \left(\frac{g}{l} \right) \sin \phi = 0, \quad (4)$$

che è l'equazione differenziale caratteristica di un moto periodico, il cui periodo T è in generale una funzione $T = T(l, g, \phi_0)$, del tipo

$$T = T_0(l, g)\mathcal{F}(\phi_0),$$

dove ϕ_0 è l'ampiezza angolare dell'oscillazione e T_0 è una grandezza con le dimensioni di un tempo; la funzione $T = T(l, g, \phi_0)$ si ottiene dalla risoluzione della (4) (o della (3), vedere Appendice A per uno schema di derivazione analitica) e la sua parte di dipendenza da ϕ_0 , $\mathcal{F}(\phi_0)$, è esprimibile, alla fine, come uno sviluppo in serie di potenze di $\sin^2(\phi_0/2)$:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\phi_0}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\phi_0}{2} + o(\sin^4 \frac{\phi_0}{2}) \right) = T_0(l, g)\mathcal{F}(\phi_0). \quad (5)$$

Dalla relazione sopra scritta si può ricavare una espressione per g come funzione di quantità misurabili nell'esperienza, ovvero $g = g(l, T, \phi_0)$:

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\phi_0}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\phi_0}{2} + o(\sin^4 \frac{\phi_0}{2}) \right)^2. \quad (6)$$

$\phi_0(^{\circ})$	$\phi_0(\text{rad})$	$\sin \phi_0$	$\Delta\%$	$\sin^2(\phi_0/2)/4$	$(9/64) \sin^4(\phi_0/2)$
5	0.0873	0.0872	0.1	4.76×10^{-4}	5.1×10^{-7}
10	0.1745	0.1736	0.5	1.90×10^{-3}	8.1×10^{-6}
15	0.2618	0.2588	1.2	4.26×10^{-3}	4.1×10^{-5}
20	0.3491	0.3420	2.1	7.54×10^{-3}	1.3×10^{-4}
25	0.4363	0.4226	3.2	1.17×10^{-2}	3.1×10^{-4}

Tabella 1: $\Delta \equiv (\phi_0(\text{rad}) - \sin \phi_0) / \sin \phi_0$

in modo da poter arrivare alla stima del valore dell'accelerazione di gravità che volevamo.

In generale, dunque, il periodo di oscillazione T dipende anche dall'ampiezza angolare ϕ_0 dell'oscillazione stessa; si dice quindi che le oscillazioni sono *anisocrone*.

Nel limite in cui le oscillazioni della sferetta possono essere considerate come *piccole oscillazioni*, cioè quando si può approssimare $\sin \phi_0 \sim \phi_0$ e quindi in generale $\sin \phi \sim \phi$ nella (4) su tutto l'arco delle oscillazioni, l'equazione diviene quella di un moto armonico con oscillazioni *isocrone*, cioè tali che il periodo T è una grandezza indipendente dalla ampiezza iniziale ϕ_0 delle oscillazioni stesse ed è dato da

$$T = T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (7)$$

che è proprio, ovviamente, il T_0 introdotto nella relazione (5). Conseguentemente, la stima di g in questo caso passa attraverso la relazione

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T_0^2}. \quad (8)$$

L'applicazione dell'approssimazione delle piccole oscillazioni comporta quindi, nella sua semplicità, un'approssimazione nella relazione che lega il periodo dell'oscillazione T agli altri parametri dell'esperienza (l, g, ϕ_0). Confrontando la (5) con la (7) e limitandoci a considerare solo il primo termine dello sviluppo in serie di potenze di $\sin^2(\phi_0/2)$ (che è ovviamente quello di valore più cospicuo), vediamo che l'approssimazione relativa nella stima del periodo di oscillazione è data da $(T - T_0)/T_0 \simeq 1/4 \sin^2(\phi_0/2)$. Dai dati riportati in Tabella 1 si vede che, ad esempio per $\phi_0 = 10^\circ$, la scelta dell'approssimazione di piccole oscillazioni porta ad una valutazione di T con uno scarto relativo $\sim 0.2\%$, mentre per $\phi_0 = 25^\circ$ lo scarto relativo arriva a $\sim 1.2\%$.

Dal punto di vista sperimentale, per un dato valore dell'ampiezza iniziale ϕ_0 , l'opportunità e la correttezza di una scelta fra la descrizione in termini di "piccole oscillazioni" e quella generale (oscillazioni *anisocrone*) dipende dunque dalla precisione del metodo di misura del periodo. Caso per caso si dovrà decidere quanti termini successivi all'ordine zero considerare nello sviluppo nella (5). Nel caso dell'esperienza nel nostro laboratorio, possiamo in generale limitarci alla considerazione del primo termine dello sviluppo della dipendenza del periodo da ϕ_0 ; infatti, il secondo termine dello sviluppo nella (5), cioè $(9/64) \sin^4(\phi_0/2)$, risulta al più $\sim 3 \times 10^{-4}$ (valore corrispondente a $\phi_0 = 25^\circ$ in Tab. 1, che è sicuramente un limite superiore per i valori di ϕ_0 realizzabili con la configurazione sperimentale a disposizione in laboratorio) ed è dunque ben inferiore alla precisione relativa con la quale tipicamente si riescono a misurare i

periodi di oscillazione con l'attuale apparato in laboratorio (dell'ordine di $\sim 1 \div 3 \times 10^{-3}$, come vedremo meglio nel seguito).

3 L'esperienza in laboratorio

3.1 Scopo dell'esperienza

Lo scopo primario che ci prefiggiamo con lo studio del moto del pendolo è quello di dare una stima del modulo dell'accelerazione di gravità, g , e nella sezione precedente abbiamo definito le relazioni fisiche da utilizzare per questo fine.

3.2 Descrizione del sistema reale e della strumentazione

Il pendolo è realizzato con una sfera di piombo di raggio r e di massa m , entrambi misurabili in laboratorio; la sfera è bucata lungo un diametro per permettere l'aggancio del filo di sospensione. Il filo è a sua volta fissato all'altra estremità ad un supporto vicino al soffitto del laboratorio e la sua lunghezza di sospensione è definita a partire dal punto in cui il filo emerge da una piccola ganascia orizzontale avvitata alla barra di supporto; questo punto identifica il punto di sospensione del pendolo, O . Chiaramente, per determinare la lunghezza vera del pendolo, l , si deve misurare il tratto "libero" di filo e sommare ad esso il raggio della sferetta, per ottenere la distanza $\overline{OC} \equiv l$ in **Fig. 1**. Sul pavimento è fissata una scala centimetrica che consente agli studenti di determinare l'ampiezza dell'oscillazione, misurando, a meno di 0.5 cm, la distanza lineare fra la verticale locale per O e quella sulla quale si trova il centro di massa della sferetta del pendolo al momento del rilascio del pendolo stesso, cioè, con riferimento alla **Fig. 1**, la distanza $x_0 = \overline{CP}$; ovviamente, dal valore di x_0 si risale all'ampiezza angolare dell'oscillazione $\phi_0(\text{rad})$, come

$$\phi_0 = \arcsin(x_0/l).$$

- Per misurare la lunghezza l del pendolo sono disponibili in laboratorio:
 - a) un comune metro per il tratto libero del filo,
 - b) un calibro ventesimale per la misura diretta del diametro $d = 2r$ della sferetta.
- Per la misura del periodo utilizzeremo un cronometro manuale, con errore di sensibilità pari a 10^{-2} s. Questo valore costituisce l'incertezza di lettura da attribuire a ciascuna misura diretta della durata temporale di un certo numero di oscillazioni, tuttavia ci aspettiamo discrepanze fra le varie misure dirette della durata dello stesso numero n di oscillazioni anche sensibilmente maggiori dell'errore di lettura dello strumento, come effetto del fatto che il cronometro viene azionato manualmente dallo sperimentatore, la cui prontezza influenza la misura. L'incertezza introdotta dai riflessi umani è naturalmente dipendente dallo sperimentatore e non può essere univocamente quantificata, ma tipicamente è dell'ordine di $0.1 \div 0.2$ s.

3.3 Procedure ed operazioni di misura

Per questa esperienza gli studenti troveranno in laboratorio dei tabulati specificamente predisposti per consentire loro di registrare le misure necessarie per condurre a termine l'esperimento e ricavare le quantità richieste per adempiere agli scopi prefissati dell'esperienza stessa.

3.3.1 Misure di lunghezza

Dovrà essere misurata la lunghezza del pendolo l ; come già notato, se chiamiamo l_f la lunghezza del filo “libero”, cioè considerato dal punto di sospensione O al punto in cui entra nel foro della sferetta ed r è il raggio della sferetta, avremo $l = l_f + r$. Di fatto, per rendere più agevoli le operazioni di misura della lunghezza del filo, è stata predisposta una tacchetta di colore nero sul filo ad una distanza da O tale che la misura da O fino alla sua estremità più in basso ($H_0 \pm \Delta H_0$) viene fornita agli studenti; gli studenti dovranno dunque fare una serie di misure della distanza H dal punto più basso della tacchetta nera alla superficie della sferetta, dove il filo entra nel foro, per determinarne la migliore stima come $\overline{H} \pm \Delta H$. Si procederà poi alla misura diretta del diametro $d = 2r$ della sferetta, utilizzando il calibro ventesimale e determinando ancora una volta la miglior stima di d come la media della serie di misure con associata l'incertezza sperimentale: $\overline{d} \pm \Delta d$.

A questo punto la stima della lunghezza del pendolo è data da

$$l = \left[\left(H_0 + \overline{H} + \frac{\overline{d}}{2} \right) \pm \left(\Delta H_0 + \Delta H + \frac{\Delta d}{2} \right) \right].$$

3.3.2 Misure di periodo

Abbiamo visto come in generale il periodo del moto oscillatorio del pendolo sia una funzione (crescente) dell'ampiezza angolare ϕ_0 dell'oscillazione: $T = T(\phi_0)$. In questa esperienza, dunque, il periodo delle oscillazioni deve essere misurato per diversi valori dell'ampiezza angolare ϕ_0 , da determinarsi con l'ausilio della scala centimetrica sul pavimento, sulla quale possiamo leggere i valori della distanza proiettata $x_0 \equiv \overline{CP}$ fra le posizioni del centro di massa della sferetta del pendolo in posizione di riposo (V) e in posizione di rilascio (C). L'ampiezza angolare ϕ_0 è determinabile dalla lettura di x_0 come

$$\phi_0 = \arcsin(x_0/l).$$

Per ciascuno dei valori scelti di x_0 (x_{0i} , tipicamente con $i = 1..4$), si effettua una serie di misure della durata di un numero n di oscillazioni complete, ovvero della durata dell'intervallo temporale $nT(\phi_{0i})$, dove ϕ_{0i} si ricava come visto sopra dai valori di x_{0i} ; per ogni serie si consiglia un numero $N = 6 \div 7$ di misure. Si ottiene così, *per ogni dato valore della distanza x_{0i} e quindi di ϕ_{0i}* , una serie di valori misurati della grandezza nT corrispondente: $\{(nT)_j, j = 1..N\}$; la migliore stima di nT per quel valore di ϕ_0 , che indichiamo con $(nT(\phi_{0i}))_{best}$, deve essere determinata, a questo punto, come la media dei valori $\{(nT)_j, j = 1..N\}$ misurati

$$(nT(\phi_{0i}))_{best} = \overline{(nT)} \pm \Delta(nT),$$

dove l'incertezza sperimentale associata $\Delta(nT)$ è valutata come lo scarto massimo dei valori della serie di misure dalla loro media, oppure dall'errore di sensibilità delle misure di $(nT)_j$, se superiore allo scarto massimo prima detto. Da questo risultato si ricava infine la migliore stima del periodo delle oscillazioni di ampiezza angolare pari al valore ϕ_{0i} dato come

$$T(\phi_{0i})_{best} = \frac{\overline{(nT)}}{n} \pm \frac{\Delta(nT)}{n},$$

con l'incertezza sperimentale sul singolo periodo data da $\Delta(nT)/n = \Delta T$.

Questa procedura deve essere effettuata per tutti i valori scelti di x_{0i} , ad esempio $\{x_{0i} = 30, 50, 70, 90 \text{ cm}\}$, ottenendo così le stime di $T(\phi_{0i})_{best}$ per ciascun $\{i = 1, 2, \dots\}$.

Prima di definire come proseguire una volta determinati i valori dei periodi per le varie ampiezze angolari, conviene soffermarsi sulle **procedure di misura** specifiche e sulle scelte operative che vengono suggerite come più opportune:

1. posizionamento del pendolo prima del rilascio e determinazione del valore di x_0 :

occorre aver cura di spostare il pendolo dalla posizione di riposo senza effettuare rotazioni della sferetta di equipaggio e mantenendo il filo di sospensione teso. Per determinare x_0 al meglio (con un $\Delta x_0 =$ errore di lettura della scala $= 0.5 \text{ cm}$), si può operare in due modi diversi:

(a) traguardare dall'alto, il più possibile verticalmente (per evitare errori di parallasse) la posizione del centro di massa C della sferetta, proiettata sulla scala centimetrica sul pavimento;
(b) servirsi di un eventuale supporto presente in laboratorio e che può essere spostato sulla scala centimetrica per permettere la lettura; la sferetta del pendolo deve essere posta, prima del rilascio, a contatto col supporto, risultando così tangente al piano verticale passante anche per la base del supporto, la cui posizione $x_{lettura}$ può essere agevolmente letta sulla scala (sempre a meno dell'errore di lettura di 0.5 cm); naturalmente occorre tenere conto del fatto che la distanza effettiva x_{0i} del centro di massa della sferetta C dalla verticale relativa alla posizione di riposo si ottiene come $x_{0i} = (x_{lettura})_i - r$. Dato che $\Delta r = \Delta d/2 \ll \Delta x_{lettura}$, questa scelta non comporta un aumento dell'incertezza della stima di x_{0i} .

2. scelta dei riferimenti per le misure di tempo:

la partenza e l'arresto del cronometro sono determinati dal passaggio del pendolo da un riferimento predeterminato; conviene misurare la durata dell'intervallo di tempo che ci interessa contando il numero di oscillazioni complete prendendo come riferimento il passaggio del pendolo dalla posizione di riposo, cioè dalla proiezione sulla scala del punto V (vedere **Fig. 1**), che corrisponde alla posizione di massima velocità per il pendolo; questa scelta garantisce infatti la minima incertezza su quando azionare il cronometro manuale, sia per la partenza che per l'arresto. Sarà cura dello sperimentatore porsi in posizione tale da minimizzare gli effetti di parallasse nella valutazione dell'istante del passaggio dalla posizione di massima velocità.

3. scelta del numero di oscillazioni di cui misurare la durata:

in generale, conviene misurare non la durata di un singolo periodo, ma, come già detto, l'intervallo di tempo relativo alla durata di un certo numero n di oscillazioni successive, in modo da ridurre il contributo all'incertezza relativa sulle misure del periodo dovuto alla indeterminazione nell'apprezzamento dell'istante di inizio e fine dell'intervallo di tempo che si intende misurare con il cronometro: quanto maggiore è il numero delle oscillazioni tanto più viene "redistribuita" l'indeterminazione su partenza e stop del cronometro, quando ci interessa il singolo periodo. Questo aspetto risulta particolarmente importante e determinante nel caso di questa esperienza, nella quale le misure di tempo vengono effettuate tramite un cronometro azionato manualmente. Tuttavia, il numero di oscillazioni opportuno per la misura non deve neanche essere troppo elevato, perché, qualora lo fosse, il vantaggio dovuto alla diminuzione dell'incertezza sul singolo periodo potrebbe essere solo illusorio, dato che all'aumentare ecces-

sivo di n potrebbero essere aumentati gli effetti dissipativi cumulativi causati dalla presenza di attriti nel moto reale della sferetta, come vedremo in seguito, fino ad introdurre alterazioni del periodo reale del moto confrontabili, se non superiori, alle incertezze di misura ottenute sperimentalmente, invalidando quindi la misura effettuata.

Per le ragioni esposte sopra, si consiglia di adottare un numero di oscillazioni n compreso fra 10 e 20, che, per la specifica realizzazione del pendolo di laboratorio, risulta essere un adeguato compromesso per una buona misura.

Con questi accorgimenti, avremo ottenuto la misura del periodo per (almeno) 4 valori distinti dell'ampiezza angolare: $\{T(\phi_{0i}) \pm \Delta T_i, i = 1..4\}$. Potremo innanzitutto verificare se le misure di periodo $T(\phi_{0i})$ sono "significativamente" diverse tra loro e mostrano l'atteso comportamento di crescita del valore con il crescere di ϕ_0 ; in questo caso, l'anisocronismo delle oscillazioni risulta rilevabile.

Si procederà poi a determinare, da ciascuno dei $T(\phi_0)$ misurati, la stima corrispondente del periodo T_0 , nel limite delle "piccole oscillazioni", utilizzando la relazione (5), che, tenendo conto della precisione raggiungibile nella misura degli intervalli di tempo, può essere riscritta nella forma, valida per ogni valore di ϕ_0 considerato,

$$T_0 = \frac{T(\phi_0)}{\left(1 + \frac{1}{4} \sin^2(\phi_0/2)\right)}$$

Si ottengono così diverse stime di T_0 ; per ognuna deve essere valutata correttamente l'incertezza associata, ΔT_0 , propagando le incertezze sul periodo misurato, ΔT , e sull'ampiezza angolare, $\Delta \phi_0$, tramite l'usuale metodo di propagazione lineare applicato alla relazione $T_0 = T_0(T, \phi_0)$ scritta sopra. In termini di incertezza relativa si ottiene

$$\frac{\Delta T_0}{T_0} = \frac{\Delta T}{T} + \frac{\sin \phi_0}{8 \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2(\phi_0/2)\right)} \Delta \phi_0.$$

Valutando l'incertezza su ϕ_0 come dovuta solo alla propagazione delle incertezze di misura Δx_0 e Δl su x_0 ed l rispettivamente, si ha

$$\Delta \phi_0 = \frac{1}{(l^2 - x_0^2)^{1/2}} \left[\Delta x_0 + \frac{x_0}{l} \Delta l \right];$$

ne segue che il contributo al $\Delta T_0/T_0$ dovuto all'incertezza sull'ampiezza angolare dovrebbe risultare piccolo rispetto al $\frac{\Delta T}{T}$, per cui nel caso della nostra esperienza ci aspettiamo che ciascuna stima di ΔT_0 non sia sensibilmente diversa dal valore del ΔT corrispondente. Le diverse stime di $T_0 \pm \Delta T_0$ devono poi essere confrontate per verificarne la consistenza e, quindi, definire la migliore stima della grandezza T_0 . Un utile esercizio grafico per visualizzare i risultati in modo più chiaro consiste nel riportare i valori ottenuti di $T_0 \pm \Delta T_0$ in funzione di ϕ_0 . Ci aspettiamo che i dati si dispongano lungo una retta parallela all'asse delle ascisse, da cui verificare la consistenza dei valori (notando la presenza di eventuali inconsistenze e cercando, nel caso, di fornire una spiegazione per esse); la "migliore" stima del valore di T_0 può poi essere ricavata fra i valori consistenti come quella caratterizzata dalla minore incertezza ΔT_0 .

3.4 Derivazione di g ed incertezze

Avendo a questo punto una singola stima di T_0 , la “migliore” valutazione di $g \pm \Delta g$ si ottiene usando le relazioni

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T_0^2} \quad e \quad \frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta l}{l} + 2 \frac{\Delta T_0}{T_0}. \quad (9)$$

ricavata propagando opportunamente gli errori sulle varie grandezze misurate che la definiscono². Nel nostro caso è possibile arrivare ad una incertezza relativa dell'ordine di pochi per mille, ovvero una misura di notevole precisione.

3.4.1 Studio sperimentale dello smorzamento

In ultimo, gli studenti potranno effettuare misure dello smorzamento dell'ampiezza delle oscillazioni per dare una stima del coefficiente di smorzamento per una legge in approssimazione lineare della decrescita delle ampiezze [vedere Appendice B], riportando in grafico il valore dell'ampiezza angolare misurato dopo un numero n di oscillazioni che il pendolo ha effettuato dall'istante del rilascio in funzione del numero n stesso. Sarà anche possibile verificare se e fino a che numero di oscillazioni tale legge lineare può approssimare bene gli effetti di dissipazione nel moto reale [per maggiori dettagli, Appendice C].

4 Considerazioni finali

La “semplice” esperienza del pendolo costituisce uno strumento didattico assai ricco e prezioso. Abbiamo infatti visto come, tramite questo esperimento, benché qui realizzato con materiali e attrezzatura relativamente semplici, sia possibile effettuare una stima del modulo dell'accelerazione di gravità locale con una buona precisione.

Lungi dall'essere una presentazione esaustiva, tuttavia si è cercato di dare un'idea della ricchezza della fisica che si nasconde anche dietro all'apparente “semplicità” del pendolo, un'idea, cioè, di alcuni degli effetti fisici che sarebbe necessario tenere in esplicita considerazione qualora volessimo/potessimo dotarci di attrezzature adeguate ad effettuare misure ancora più precise delle quantità fisiche in gioco. È chiaro infatti che se potessimo misurare lunghezza del pendolo e periodo del pendolo con una precisione maggiore o molto maggiore, dovremmo sicuramente dare una descrizione più completa e dettagliata dalla fisica del pendolo (quale quella riportata nell'Appendice B); in caso contrario, si arriverebbe ad avere una misura molto precisa, ma probabilmente “inaccurata”, ovvero non rappresentativa, in quanto discosta dal “valore atteso”, della quantità g .

²La propagazione dell'incertezza riportata nella (9) considera l e T_0 indipendenti tra loro, anche se in realtà non lo sono (T_0 è ricavato da una misura di ϕ_0 che dipende da l). La relazione (9) è tuttavia molto più semplice e lo studente potrà verificare che il risultato ottenuto con essa non differisce significativamente, in questo caso specifico, da quello ottenibile con la formula corretta

Appendice A: Derivazione della relazione di dipendenza del periodo T dall'ampiezza angolare ϕ_0 dell'oscillazione

Abbiamo detto nella Sezione 2 che per il moto oscillatorio in generale il periodo T è una funzione anche dell'ampiezza angolare dell'oscillazione, cioè, per il nostro caso del pendolo ideale, si ha

$$T = T(l, g, \phi_0).$$

In questa appendice, delineiamo la deduzione di questa caratteristica del periodo, partendo dall'integrale primo del moto definito dalle legge di conservazione dell'energia, che scriveremo qui valutando le differenze di energia cinetica e potenziale *nel campo gravitazionale locale della Terra* fra l'istante $t = 0$ del rilascio della sferetta dalla posizione angolare $\phi(t = 0) = -\phi_0$, dove $\phi_0 (> 0)$ è l'ampiezza angolare dell'oscillazione considerata (facciamo sempre riferimento per le convenzioni geometriche alla Fig. 1), e l'istante t generico durante il moto, in cui la posizione angolare del pendolo è identificata dal valore generico $\phi = \phi(t)$ della coordinata; al rilascio del pendolo avremo dunque

$$t = 0 \quad \begin{cases} \phi(t = 0) = -\phi_0 \\ \dot{\phi}(0) = 0 \end{cases}$$

mentre, all'istante generico t , $\dot{\phi}(t)$ sarà il valore della velocità angolare, in modo che la relazione di conservazione dell'energia (ricordando che il coseno è una funzione pari dell'argomento) si scriverà come

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2(t) - \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2(0) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2(t) = mgl(\cos \phi(t) - \cos \phi_0),$$

da cui

$$\dot{\phi}(t) = \pm \left[2\frac{g}{l}(\cos \phi(t) - \cos \phi_0) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (10)$$

Analizziamo il primo quarto di oscillazione in cui, nel caso scelto, il pendolo assume posizioni angolari $\phi \in [-\phi_0, 0]$, in un intervallo di tempo pari ad un quarto del periodo T ; in questo intervallo di tempo ($[0, T/4]$), la velocità angolare $\dot{\phi}(t)$ del pendolo è positiva (vedere Fig. 1) e possiamo scegliere quindi con sicurezza il segno positivo per la radice nell'eq. (10); nel primo quarto di periodo possiamo quindi riscrivere la (10) come

$$\frac{d\phi}{[2(\cos \phi - \cos \phi_0)]^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{g}{l}\right)^{\frac{1}{2}} dt$$

e integrarla fra $t = 0$, con $\phi(0) = -\phi_0$, e $t = T/4$, con $\phi(T/4) = 0$:

$$\left(\frac{g}{l}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{T}{4}} dt = \left(\frac{g}{l}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{T}{4} = \int_{-\phi_0}^0 \frac{d\phi}{[2(\cos \phi - \cos \phi_0)]^{\frac{1}{2}}}. \quad (11)$$

Per impostare la risoluzione dell'integrale in $d\phi$ sulla destra del segno uguale, anzitutto si effettua un primo cambio di variabile, ponendo $\phi' = -\phi$, cosicché $d\phi' = -d\phi$ e, sfruttando

ancora la parità della funzione coseno, si ha

$$\int_{-\phi_0}^0 \frac{d\phi}{[2(\cos \phi - \cos \phi_0)]^{\frac{1}{2}}} = \int_0^{\phi_0} \frac{d\phi'}{[2(\cos \phi' - \cos \phi_0)]^{\frac{1}{2}}}$$

e quindi

$$\left(\frac{g}{l}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{T}{4} = \int_0^{\phi_0} \frac{d\phi'}{[2(\cos \phi' - \cos \phi_0)]^{\frac{1}{2}}}. \quad (12)$$

Abbiamo a questo punto un integrale complicato, che però possiamo riportare ad una forma identificabile con un integrale noto e tabulato, effettuando un ulteriore opportuno cambio di variabile, cioè definendo una nuova variabile θ tramite la relazione

$$\sin\left(\frac{\phi'}{2}\right) = \sin\left(\frac{\phi_0}{2}\right) \sin \theta, \quad (13)$$

da cui

$$\begin{aligned} d\phi' &= 2 \sin\left(\frac{\phi_0}{2}\right) \frac{\cos \theta}{\cos(\phi'/2)} d\theta = 2 \sin(\phi_0/2) \frac{\cos \theta}{[1 - \sin^2(\phi'/2)]^{1/2}} d\theta = \\ &= 2 \sin(\phi_0/2) \frac{\cos \theta}{[1 - \sin^2(\phi_0/2) \sin^2 \theta]^{1/2}} d\theta. \end{aligned} \quad (14)$$

Per riscrivere la funzione integranda dell'integrale nella (12) possiamo poi sfruttare una relazione trigonometrica nota, quale

$$\cos \phi' = 1 - 2 \sin^2(\phi'/2); \quad (15)$$

avremo così, sostituendo $d\phi'$ con la (14) ed usando le relazioni (13) e (15),

$$\begin{aligned} \frac{d\phi'}{[2(\cos \phi' - \cos \phi_0)]^{\frac{1}{2}}} &= \frac{2 \sin(\phi_0/2) \cos \theta}{[2(1 - 2 \sin^2(\phi'/2) - 1 + 2 \sin^2(\phi_0/2))]^{\frac{1}{2}}} \frac{d\theta}{[1 - \sin^2(\phi_0/2) \sin^2 \theta]^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\cos \theta}{[1 - \sin^2(\phi'/2)/\sin^2(\phi_0/2)]^{\frac{1}{2}}} \frac{d\theta}{[1 - \sin^2(\phi_0/2) \sin^2 \theta]^{\frac{1}{2}}}; \end{aligned}$$

usando ancora la relazione (13) ed esprimendo $\cos \theta$ in termini del seno, otterremo infine

$$\begin{aligned} \frac{d\phi'}{[2(\cos \phi' - \cos \phi_0)]^{\frac{1}{2}}} &= \frac{(1 - \sin^2 \theta)^{1/2}}{(1 - \sin^2 \theta)^{1/2} [1 - \sin^2(\phi_0/2) \sin^2 \theta]^{\frac{1}{2}}} d\theta \\ &= \frac{d\theta}{[1 - \sin^2(\phi_0/2) \sin^2 \theta]^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Inoltre, con questo cambio di variabile per gli estremi di integrazione avremo

$$\theta(\phi = 0) = 0 \quad \theta(\phi = \phi_0) = \pi/2$$

e finalmente l'integrale (12) diviene

$$\left(\frac{g}{l}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{T}{4} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{[1 - \sin^2(\phi_0/2) \sin^2 \theta]^{\frac{1}{2}}}, \quad (17)$$

da cui il periodo T dell'oscillazione generica può esprimersi come

$$T = 4 \left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{[1 - \sin^2(\phi_0/2) \sin^2 \theta]^{\frac{1}{2}}} = 4 \left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}} K(m), \quad (18)$$

dove $m \equiv \sin^2(\phi_0/2)$ e, conseguentemente, $0 \leq m < 1$; $K(m)$ è ancora un integrale complicato, ma in questa forma è riconoscibile come un integrale noto e tabulato, specificamente è un *integrale ellittico completo di prima specie*, che, per m nell'intervallo $[0, 1)$ come nel nostro caso, può essere espresso come una funzione ipergeometrica, ovvero una serie di potenze di $m \equiv \sin^2(\phi_0/2)$ convergente, che, nei suoi primi termini, si scrive

$$K(m) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 m + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 m^2 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 m^3 + \dots \right\}.$$

Il periodo del pendolo dunque è in generale una funzione anche dell'ampiezza angolare ϕ_0 , tramite $m \equiv \sin^2(\phi_0/2)$,

$$T = 4 \left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\pi}{2} \mathcal{F}(\phi_0),$$

ovvero, esplicitamente,

$$T = 2\pi \left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \sin^2(\phi_0/2) + \frac{9}{64} \sin^4(\phi_0/2) + o(\sin^4(\phi_0/2)) \right\}, \quad (19)$$

dove con la notazione $o(\sin^4(\phi_0/2))$ intendiamo i termini dello sviluppo in serie di ordine superiore a $\sin^4(\phi_0/2)$.

Appendice B

Il pendolo “reale”:

cosa abbiamo ommesso nella semplice descrizione adottata

Il sistema fisico “pendolo”, per quanto semplice, nasconde in realtà una quantità di fisica molto più ricca della schematica descrizione ideale che ne abbiamo dato e che abbiamo utilizzato per i nostri scopi didattici. In questa sezione accenneremo ad alcuni dei principali effetti di cui una descrizione più completa e precisa del sistema reale dovrebbe tenere conto ma che, tutto sommato, possiamo permetterci di trascurare *in gran parte* nella nostra esperienza essenzialmente perché sufficientemente piccoli in relazione alle caratteristiche di precisione dell'apparato di misura, ovvero “grazie” alle incertezze da cui sono affette le misure nella nostra esperienza.

Tuttavia, è assai istruttivo almeno porsi il problema.

B.1 Descrizione fisica più completa e accurata: il “pendolo fisico”

Fin qui abbiamo considerato il pendolo schematizzabile come una massa puntiforme appesa ad un filo di massa trascurabile, ma nella realtà avremo sempre un pendolo “fisico” (o “composto”), cioè un sistema in cui il pendolo stesso è un corpo rigido a forma di sfera di raggio r e massa m , che possiamo pensare uniformemente distribuita; inoltre, anche il filo è caratterizzato da una sua massa m_f , per quanto molto più piccola di m , e potremmo anche valutare gli ulteriori possibili effetti di questo.

Cominciamo col tenere conto dei soli effetti della distribuzione di massa della sferetta. Per la descrizione del pendolo fisico, richiamiamo la II equazione cardinale della dinamica scritta per un corpo rigido vincolato da un vincolo ideale a muoversi attorno ad un asse fisso; mantenendo le notazioni della **Fig. 1** anche per questo caso, potremo scrivere

$$I_O \ddot{\phi} = -mgl \sin \phi, \quad (20)$$

dove I_O è il momento di inerzia del pendolo rispetto all’asse di rotazione, cioè all’asse per il punto di sospensione O e ortogonale al piano verticale della traiettoria del moto, e a secondo membro compare il momento assiale (proiettato sempre lungo l’asse orizzontale per O) della forza peso (la forza attiva in gioco), rispetto al centro di riduzione in O . Per valutare I_O usiamo il Teorema di Huygens-Steiner (il momento di inerzia di un corpo rispetto ad un asse generico è uguale alla somma del momento di inerzia del corpo rispetto ad un asse passante per il centro di massa del corpo e parallelo all’asse dato e del prodotto della massa per il quadrato della distanza fra gli assi), per scrivere

$$I_O = \frac{2}{5}mr^2 + ml^2 = ml^2 \left[1 + \frac{2}{5} \left(\frac{r}{l} \right)^2 \right].$$

La (20) costituisce l’equazione del moto oscillatorio del pendolo fisico, da cui, analogamente al caso del pendolo ideale, descritto dall’eq. (4), possiamo ricavare (Appendice A) la relazione che definisce il periodo dell’oscillazione:

$$T = 2\pi \left(\frac{I_O}{mgl} \right)^{\frac{1}{2}} \mathcal{F}(\phi_0), \quad (21)$$

dove $\mathcal{F}(\phi_0)$ indica la dipendenza del periodo dall’ampiezza angolare ϕ_0 dell’oscillazione (vedere eq. (5) e Appendice A). Usando la relazione esplicita per I_O scritta sopra avremo dunque

$$\begin{aligned} T &= 2\pi \left\{ \frac{ml^2}{mgl} \left[1 + \frac{2}{5} \left(\frac{r}{l} \right)^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \mathcal{F}(\phi_0) \\ &= \left\{ 2\pi \left(\frac{l}{g} \right)^{\frac{1}{2}} \mathcal{F}(\phi_0) \right\} \left[1 + \frac{2}{5} \left(\frac{r}{l} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\simeq \left\{ 2\pi \left(\frac{l}{g} \right)^{\frac{1}{2}} \mathcal{F}(\phi_0) \right\} \left[1 + \frac{1}{5} \left(\frac{r}{l} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (22)$$

dove, negli ultimi due passaggi l'espressione in parentesi graffe corrisponde al periodo del pendolo semplice e l'ultimo passaggio esprime l'approssimazione al primo ordine in $\left(\frac{r}{l}\right)^2$ del termine dovuto al fatto che il pendolo non è puntiforme; questa approssimazione è, nel nostro caso, del tutto giustificata, dato che, con valori approssimativi dei parametri in gioco avremo $\left(\frac{r}{l}\right)^2 \sim \left(\frac{3cm}{230cm}\right)^2 \sim 1.7 \times 10^{-4}$. L'effetto che ci aspetteremmo sul periodo sarebbe dunque dell'ordine di $\Delta T/T \simeq \frac{1}{5} \left(\frac{r}{l}\right)^2 \sim 3 \times 10^{-5}$, sicuramente molto inferiore al tipico errore relativo sul periodo che possiamo ottenere dalle nostre misure in laboratorio; ne segue che possiamo, da questo punto di vista e *per l'esperimento svolto con il nostro apparato sperimentale*, effettivamente approssimare/schematizzare il pendolo come un pendolo "semplice".

Se vogliamo considerare anche gli effetti della massa finita del filo di sospensione, m_f , possiamo procedere pensando al filo come ad un barretta sottile omogenea di lunghezza l e massa m_f ; il centro di massa si troverà dunque a metà barretta, per cui il momento di inerzia rispetto all'asse orizzontale di rotazione per il punto di sospensione O sarà

$$I_{fO} = \frac{m_f l^2}{12} + m_f \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} m_f l^2$$

ed avremo come equazione di moto:

$$(I_O + I_{fO}) \ddot{\phi} = -mgl \sin \phi \left(1 + \frac{m_f}{2m}\right), \quad (23)$$

dove abbiamo tenuto conto anche del momento della forza peso sul filo-barretta rispetto al punto di sospensione O . Il periodo del moto in questo caso è

$$T = 2\pi \left[\frac{(I_O + I_{fO})}{mgl(1 + m_f/2m)} \right]^{\frac{1}{2}} \mathcal{F}(\phi_0); \quad (24)$$

sviluppando l'espressione e tenendo conto del fatto che anche $m_f/m \ll 1$, potremo, fermandoci al primo ordine nello sviluppo rispetto alle quantità $\left(\frac{r}{l}\right)^2$ e $\frac{m_f}{m}$, entrambe $\ll 1$, ottenere infine una espressione per il periodo in questo caso:

$$T \simeq \left\{ 2\pi \left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \mathcal{F}(\phi_0) \right\} \left[1 + \frac{1}{5} \left(\frac{r}{l}\right)^2 - \frac{1}{12} \frac{m_f}{m} \right]. \quad (25)$$

In questa espressione, analogamente a quanto fatto sopra, possiamo isolare la variazione relativa del periodo dovuta alla considerazione della massa del filo nella descrizione del moto, che risulta chiaramente

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{filo} \sim -\frac{1}{12} \frac{m_f}{m};$$

dato che ci aspettiamo incertezze sperimentali relative dell'ordine di $(\Delta T/T)_{sperim} \sim 1 \div 2 \times 10^{-3}$, occorrerà assicurarsi che la massa del filo utilizzato sia tale che

$$\frac{1}{12} \frac{m_f}{m} < 10^{-3},$$

da cui, per $m \sim 10^3$ g, $m_f < 12$ g.

B.2 Presenza di attriti: smorzamento delle oscillazioni

Osservando il moto reale del pendolo è facile notare una progressiva diminuzione dell'ampiezza dall'oscillazione. Nelle condizioni reali, il moto del pendolo, in particolare nella semplice realizzazione del laboratorio, non è dunque un moto del tutto ideale, ma piuttosto è soggetto a fenomeni dissipativi dell'energia totale, che producono uno smorzamento graduale, il cui primo e più appariscente effetto è proprio la diminuzione dell'ampiezza delle oscillazioni con il tempo dal momento del rilascio. Infatti, agiscono sul pendolo reale forze di attrito, che compiono lavoro e quindi dissipano energia meccanica del moto; le principali cause d'attrito per quanto riguarda il pendolo sono

- 1) la resistenza viscosa dell'aria, in cui il pendolo si muove, che agisce sia sulla sferetta che sul filo di sospensione e
- 2) le forze e i momenti d'attrito nel sistema di sospensione del pendolo (che abbiamo schematizzato nel punto di sospensione O).

L'entità e la descrizione delle forze di attrito dipendono dalle caratteristiche specifiche di realizzazione del pendolo (filo, sferetta, modalità di sospensione e supporto; vedere Appendice C). In generale, tuttavia, almeno finché la dissipazione di energia causata dall'azione delle forze d'attrito è sufficientemente piccola rispetto all'energia totale del moto, si può dimostrare sia con metodi analitici considerando lo smorzamento come una "perturbazione" nella descrizione del moto nel limite delle piccole oscillazioni, sia, nel caso di oscillazioni di ampiezza generica, integrando numericamente l'equazione di moto generale (con l'aggiunta dei termini di smorzamento rispetto alla (4)) che gli attriti in gioco hanno effetti sull'ampiezza delle oscillazioni (che in laboratorio osserviamo diminuire visibilmente) molto più sensibili di quanto non abbiano sul periodo dell'oscillazione stessa; il periodo può infatti essere considerato come sostanzialmente invariato per un buon numero di oscillazioni (vedere Appendice C) rispetto alla precisione della misura. Questo è importante ai fini della esperienza in laboratorio, dato che ci consente di utilizzare ancora le relazioni (6) e (8), ricavate per il caso di moto ideale, allo scopo di stimare il modulo dell'accelerazione di gravità g .

Nell'Appendice C viene brevemente delineata una procedura di analisi degli effetti di dissipazione sul moto del pendolo reale, possibile in forma analitica per il caso limite delle piccole oscillazioni; una descrizione più dettagliata del fenomeno esula dagli scopi del nostro corso, ma la sintesi fornita dovrebbe servire a dare un'idea del problema. In particolare, nell'Appendice C vengono identificate delle relazioni funzionali che forniscono una stima dell'andamento approssimato del decremento di ampiezza angolare appunto nel limite di piccole oscillazioni.

Se vogliamo cercare di dare una stima dello smorzamento osservato sperimentalmente, possiamo cercare di partire dai risultati discussi nell'App. C. Infatti, possiamo pensare qualitativamente che la soluzione approssimata ricavata nel limite delle piccole oscillazioni per $\phi_0(t)$ (ad esempio l'eq. (29), considerando preponderante il più semplice caso di forza di attrito con legge lineare nella velocità) si mantenga sufficientemente descrittiva anche nel caso generale di oscillazioni di ampiezza non piccola. Dalle stime di ampiezza angolare come funzione del numero di oscillazioni n effettuate dal rilascio, $\phi_0(n)$, possiamo cercare di dedurre il coefficiente sperimentale di smorzamento nella schematizzazione più semplice del problema, ovvero supponendo

una legge di decrescita esponenziale

$$\phi_0(n) \simeq \phi_0(0)e^{-\alpha T_0 n} \sim \phi_0(0)(1 - \alpha T_0 n), \quad (26)$$

dato che, aiutandoci con la scala centimetrica sul pavimento, misuriamo l'ampiezza ad oscillazioni complete e che dunque gli istanti di misura sono $t \simeq nT_0$; il secondo passaggio della (26) è chiaramente valido per valori $\alpha T_0 n \ll 1$, cioè per un numero di oscillazioni limitato, dipendentemente dal valore di α .

Il nostro scopo è qui un'analisi di tipo qualitativo degli aspetti dissipativi del moto reale, per cui **OPERATIVAMENTE** ci limiteremo a

- 1) scegliere un valore intermedio della distanza x_0 , cioè dell'ampiezza angolare;
- 2) per questo valore rilasciare il pendolo e, contando il numero di oscillazioni complete, andare a stimare $x_0(n)$ ad intervalli di qualche oscillazione (ad esempio, ogni 5 periodi), fino ad $n \leq 25$, tralasciando al meglio possibile la posizione raggiunta dal pendolo in corrispondenza delle successive elongazioni angolari massime;
- 3) riportare in grafico i 5 valori di $x_0(n) \pm \Delta x_0(n)$, ovvero di $\phi_0(n) \pm \Delta \phi_0(n)$, in funzione di n , ovvero di $t = nT$, dove T è il periodo che avremo precedentemente stimato per il dato valore di $x_0(0)$ scelto, cercando poi di tracciare la retta che meglio si adatta ai dati e dando così una stima del coefficiente di smorzamento α .

Ci possiamo aspettare ragionevolmente una deviazione dalla relazione lineare per i punti corrispondenti ai valori più alti del numero di oscillazioni n , quando la condizione $\alpha T n \ll 1$ non è più ben verificata con il valore di α stimabile dai punti relativi a più bassi valori di n .

Appendice C

Smorzamento delle oscillazioni come effetto degli attriti

Lo smorzamento osservato del moto reale è dovuto all'azione dissipativa (dell'energia meccanica del pendolo) delle forze di attrito che agiscono sul sistema reale. Come già detto nel testo, in sostanza si tratta degli attriti nel sistema di sospensione del pendolo (nella cui descrizione non entreranno) e delle forze di resistenza viscosa dovute all'aria, come "fluido" in cui il sistema "pendolo" (sferetta più filo di sospensione) si muove. Non è questa la sede per uno studio delle caratteristiche di viscosità dei fluidi, ma ci basterà sapere che questa è la proprietà di un fluido che riassume le sue caratteristiche di resistenza al moto di un corpo nel fluido stesso. La viscosità del fluido interviene direttamente, tramite l'attrito esercitato dagli strati di fluido a diretto contatto col corpo in moto (regime "laminare", pensando agli straterelli di fluido come "lamine" sovrapposte) e/o, indirettamente, attraverso la formazione di vortici essenzialmente nella scia del corpo in moto (Fleury & Mathieu, Meccanica Fisica, 1963, Zanichelli). Semplificando al massimo, dato il corpo (con la sua geometria e le sue dimensioni caratteristiche) e dato il fluido in cui si muove (aria), il tipo di regime dominante e, quindi, la schematizzazione con cui rappresentiamo la forza di resistenza dipendono essenzialmente dalla velocità del corpo, col crescere della quale ci si aspetta di passare dal regime "laminare" a quello con formazione di vortici.

In generale, il tipo di regime di moto e di resistenza viscosa per ogni corpo in moto in un fluido viene identificato dal valore di un parametro adimensionale caratteristico, detto **numero di Reynolds**, $R = \rho v L / \eta$, dove ρ è la densità del fluido, η è la sua viscosità (dimensioni $[ml^{-1}t^{-1}]$) e v ed L sono rispettivamente una velocità caratteristica ed una dimensione di lunghezza caratteristica del corpo in moto. Per valori sufficientemente bassi di R la resistenza del fluido al moto del corpo si esercita essenzialmente in regime “laminare” e la forza di resistenza viscosa è ragionevolmente rappresentata come proporzionale alla velocità ($F_{drag} \propto v$). Con l’aumentare del numero di Reynolds (il che per un corpo con caratteristiche geometriche date richiede l’aumentare della velocità), si modifica come già detto la modalità di resistenza del fluido e si arriva ad una condizione in cui la forza di resistenza diviene meglio rappresentata da una legge in cui la proporzionalità è con la velocità al quadrato (sempre in opposizione alla direzione del moto; $F_{drag} \propto v^2$). Il valore “critico” di R , cioè quello attorno al quale avviene la transizione fra i due regimi, dipende dalla forma geometrica del corpo in movimento; sperimentalmente, per un corpo sferico $R_{crit} \sim 1000 \div 2000$ (Perucca, Fisica Generale e Sperimentale I, 1963, UTET; Nelson & Olsson, American Journal of Physics, 54, 112, 1986).

In realtà, la forza di resistenza sul sistema non sarà in generale né puramente lineare né puramente quadratica in velocità, a maggior ragione per un sistema composto (ad esempio, il pendolo come sferetta più filo) e per valori della velocità non costanti nel tempo durante il moto, come è nel nostro caso; piuttosto, la forza di resistenza sarà una combinazione delle due forme, con espressione

$$F_{drag} = -bv_C - cv_C|v_C|, \quad (27)$$

diretta lungo la direzione della velocità v_C del centro di massa della sferetta del pendolo e con b e c due coefficienti che riassumono tutte le altre caratteristiche del fenomeno di attrito viscoso.

Come già accennato, un’altra fonte di smorzamento è data dagli attriti nel punto di sospensione; in linea di principio, anche questi possono essere considerati come dipendenti dalla velocità del pendolo, la quale induce una sollecitazione diversa sul supporto in O a seconda del suo valore. Per semplicità, dunque, almeno in questa sede possiamo limitarci a considerare una relazione del tipo (27) come rappresentativa di tutti gli effetti di resistenza al moto del pendolo.

Una volta schematizzate le forze di attrito in gioco è possibile analizzare come si modifica il moto reale rispetto a quello ideale.

Il problema si può studiare numericamente considerando l’equazione di moto per un pendolo soggetto anche alle forze di resistenza viscosa dell’aria in cui il pendolo stesso si muove e in generale a forze d’attrito legate alla velocità del pendolo, rappresentate nella forma generale (27).

Nel caso limite delle piccole oscillazioni è anche possibile un approccio analitico per lo studio dello smorzamento del moto, almeno per condizioni in cui gli effetti dissipativi siano piccoli rispetto all’energia del moto. In questo caso si può ottenere una risoluzione analitica in forma approssimata utilizzando metodi perturbativi, cioè considerando i termini nell’equazione di moto legati all’attrito come tali da indurre una piccola perturbazione sul moto ideale. Si tratta in pratica di valutare termini correttivi rispetto alla ampiezza del moto ideale e al suo periodo, supponendo che l’angolo di oscillazione $\phi(t)$ sia descrivibile come

$$\phi(t) = \phi_A(t) \cos \psi(t), \quad (28)$$

dove $\phi_A(t)$ è l'ampiezza della oscillazione (nel caso reale una funzione del tempo t) e $\psi(t) = (\omega_0 + \omega_1)t$, con ω_0 che è la frequenza angolare del moto ideale, senza attrito, e $\omega_1 \ll \omega_0$ (per il metodo da seguire si fa riferimento, ad esempio, al testo *Nonlinear Oscillations*, di N. Minorski, edizioni Krieger, New York, 1974, oppure a Nayfeh & Mook, *Nonlinear Oscillations*, 1979, Wiley & Sons).

Nel caso in cui ci limitiamo alla considerazione di forze viscosse con espressione lineare nella velocità, il risultato che si ottiene è che, in approssimazione del primo ordine, l'ampiezza varia secondo la legge

$$\phi_A(t) = \phi_0 e^{-\alpha t} \sim \phi_0(1 - \alpha t), \quad \text{dove} \quad \alpha = \frac{b}{2m} \quad (29)$$

e il secondo passaggio vale nel caso $\alpha t \ll 1$, cioè per un numero di oscillazioni tale che $n \ll 1/(\alpha T_0)$, con $T_0 = 2\pi/\omega_0$.

Nel caso invece in cui siano preponderanti le forze viscosse quadratiche in velocità, in modo del tutto analogo si ottiene una legge, in approssimazione del primo ordine, del tipo

$$\phi_A(t) = \phi_0 \frac{1}{1 + \beta \phi_0 t}, \quad (30)$$

con

$$\beta = \frac{4\omega_0}{3} \frac{cl}{\pi m} = \frac{8}{3} \frac{cl}{mT_0}$$

(vedere sempre Minorski 1974, citato sopra).

In entrambi i casi e con lo stesso ordine di approssimazione, nel limite delle piccole oscillazioni adottato per la trattazione analitica, il periodo risulta *non* modificato dalla azione dissipativa delle forze viscosse. Gli attriti hanno dunque effetti molto più sensibili sull'ampiezza angolare dell'oscillazione di quanto non abbiano sul periodo, almeno finché sono sufficientemente contenuti come entità. Su questo aspetto torneremo brevemente al termine della presente Appendice.

Dato che in generale le forze di resistenza non sono né puramente lineari né puramente quadratiche in velocità, ma piuttosto una combinazione delle due forme, occorre tuttavia cercare una rappresentazione approssimata dell'andamento previsto della diminuzione dell'ampiezza dell'oscillazione reale per una situazione che tenga conto simultaneamente dell'azione dei due tipi di effetti. Per ottenerla è più conveniente un approccio basato su considerazioni energetiche. Questo è possibile in modo relativamente semplice sempre partendo dall'approssimazione di piccole oscillazioni da una parte e dall'ipotesi di poter sempre considerare piccoli i termini di smorzamento. Partendo dall'espressione per la forza di resistenza totale (diretta sempre lungo la direzione del versore \mathbf{e}_ϕ), in cui i coefficienti b e c tengono conto dei contributi dovuti alla resistenza sulla sferetta e sul filo ed anche di eventuali contributi dovuti agli attriti nel sistema di sospensione,

$$F_{drag} = -b\dot{\phi} - cl^2\dot{\phi}|\dot{\phi}|, \quad (31)$$

è possibile valutare il lavoro di dissipazione compiuto da questa forza, L_{drag} , nell'ipotesi di poter approssimare, ai fini della valutazione e dato che si considerano piccoli i termini di smorzamento, la velocità angolare $\dot{\phi}$ come data dalla sua espressione nel caso del moto ideale. Il risultato valutato sulla durata di una mezza oscillazione, cioè su un tempo $t = T_0/2$ (allo scopo di

mantenere costante il segno della velocità $\dot{\phi}$) è dunque

$$\begin{aligned}\Delta L_{drag} &= \int_0^{T_0/2} \mathbf{F}_{drag} \cdot \mathbf{v}_C dt = \int_0^{T_0/2} F_{drag} l \dot{\phi} dt \\ &\simeq \frac{\pi}{2} \frac{b}{\omega_0} (l\omega_0\phi_0)^2 + \frac{4}{3} \frac{c}{\omega_0} (l\omega_0\phi_0)^3,\end{aligned}\quad (32)$$

dove $\omega_0 = (g/l)^{1/2} = 2\pi/T_0$ è la frequenza angolare del moto nel limite delle piccole oscillazioni; questo lavoro è da uguagliare alla perdita nell'energia totale del moto su quello stesso lasso di tempo:

$$\Delta L_{drag} = -\Delta E_{tot} = -\Delta (mgl(1 - \cos \phi_0)) \simeq -\Delta \left(mgl \frac{\phi_0^2}{2} \right) \sim -mgl\phi_0\Delta\phi_0, \quad (33)$$

dove la variazione di ampiezza $\Delta\phi_0$ avviene nel $\Delta t = T_0/2 = \pi/\omega_0$ e, dato che si opera nel limite delle piccole oscillazioni, si è approssimato $\cos \phi_0 \simeq 1 - \phi_0^2/2$. Dividendo formalmente per Δt la variazione di energia totale e per il valore π/ω_0 del Δt stesso l'espressione ottenuta per ΔL_{drag} , si arriva ad una equazione per l'ampiezza angolare dell'oscillazione del tipo

$$\frac{\Delta\phi_0}{\Delta t} \simeq -\alpha\phi_0 - \beta\phi_0^2, \quad (34)$$

dove α e β sono esattamente le stesse quantità che appaiono nelle relazioni (29) e (30) rispettivamente,

$$\alpha = \frac{b}{2m} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{4}{3} \frac{\omega_0}{\pi} \frac{cl}{m} = \frac{8}{3} \frac{cl}{mT_0};$$

l'equazione (34) può essere risolta come una equazione differenziale (eq. di Bernoulli) ottenendo dunque una soluzione analitica del tipo

$$\phi_0(t) = \alpha\phi_0(t=0) \frac{e^{-\alpha t}}{\beta\phi_0(0)(1 - e^{-\alpha t}) + \alpha}. \quad (35)$$

È interessante notare come, ponendo naturalmente $\phi_A(t) = \phi_0(t)$, la relazione (35) si riduca rispettivamente alla (29) per $\beta \rightarrow 0$ o alla (30) per $\alpha \rightarrow 0$, ovvero nel limite di forza di resistenza puramente lineare o puramente quadratica nella velocità.

In ultimo aggiungiamo una considerazione qui puramente qualitativa sulle possibili variazioni del periodo durante il moto reale, soggetto a dissipazione, **per oscillazioni di ampiezza angolare generica**, cioè al di fuori del semplice limite delle piccole oscillazioni. Si può dimostrare infatti (Nayfeh & Mook, 1979, già citato) che, uscendo dal limite delle piccole oscillazioni (in cui l'equazione di moto ideale è lineare), anche al primo ordine di approssimazione (in cui peraltro le leggi di diminuzione dell' ampiezza angolare dell'oscillazione rimangono le stesse derivate nel limite di piccole oscillazioni e sopra descritte) il periodo del moto subisce una pur piccolissima variazione. Questo è confermato da una integrazione numerica dell'equazione di moto con i termini di smorzamento. Tuttavia, l'effetto sul periodo è veramente piccolo e nell'ambito delle misure con l'apparato sperimentale a disposizione in laboratorio, resta sostanzialmente al di sotto dell'incertezza sperimentale e quindi totalmente irrilevabile e trascurabile ai nostri scopi.