

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI FIRENZE
Scuola di Scienze M.F.N.
Corso di Laurea in Matematica

Andrea Stefanini

**Appunti del corso di
Fisica I con laboratorio**

Nozioni elementari di elasticità e misura del modulo di scorrimento

1 Introduzione

Ogni solido sottoposto ad un sistema di forze che tendono a deformato cede sempre un poco alla loro azione, cioè non è mai perfettamente rigido.

Quando un corpo, cessata l'azione delle forze deformatrici, riprende la configurazione iniziale in un tempo più o meno lungo, lo si dice **elastico**. Se ciò non avviene il corpo si dice **plastico**. Entro certi limiti di approssimazione si può dire che ogni solido reale si comporta elasticamente finché le forze deformatrici non superano certi valori che dipendono dal materiale di cui è costituito, nonché dalla sua forma e dalle sue dimensioni.

2 Schematizzazione del problema

Un generico sistema di forze agente su un corpo rigido omogeneo può essere ridotto solo ad una forza e ad un momento di forza risultanti, individuati dalle loro componenti lungo 3 assi cartesiani ortogonali di riferimento (x, y, z). Nella trattazione che segue

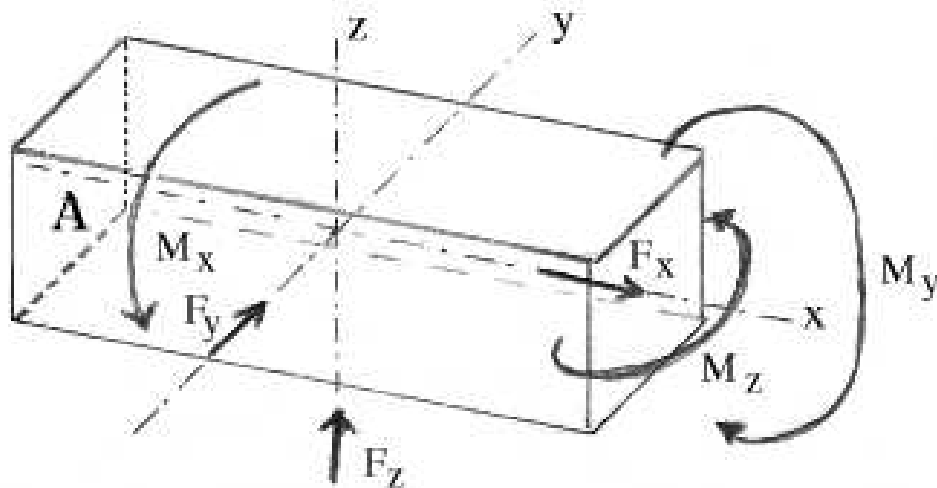


Figura 1:

considereremo corpi aventi una struttura geometrica semplice e definita (parallelepipedi, cilindri, ecc.). Ciò permetterà di semplificare la “geometria” del problema che diviene più complessa per un corpo di forma qualunque.

Consideriamo quindi una sbarretta a forma di parallelepipedo e supponiamo di bloccarne una delle basi ad un sostegno fisso. Per la riduzione delle forze è conveniente utilizzare un sistema di assi cartesiani avente uno degli assi ortogonale a tale base. Riferendoci alla Fig.1, in cui è raffigurata la sbarretta, la terna cartesiana è stata scelta in modo che l'asse x sia ortogonale alla base fissa A . In figura sono schematicamente rappresentate le sei componenti derivanti dalla riduzione del generico sistema di forze agenti sul corpo. Le sei componenti corrispondono a 4 tipi di sollecitazione fondamentale; si usa definire

- F_x forza normale o assiale: la sbarretta è soggetta ad una sollecitazione di **trazione** o di **compressione**;
- F_y e F_z forze di taglio: la sbarretta è soggetta a sollecitazione di **taglio**;
- M_x momento torcente: la sbarretta è soggetta a sollecitazione di **torsione**
- M_y e M_z momenti flettenti: la sbarretta è soggetta a sollecitazione di **flessione**

Esamineremo nel seguito solo la sollecitazione elementare di torsione cercando di ricavare le relazioni che caratterizzano il problema.

2.1 Sollecitazione di torsione

Consideriamo la deformazione elementare prodotta dall'applicazione uniforme sulla base libera del cilindro di un sistema di forze avente risultante nulla e momento risultante diverso da zero e diretto lungo l'asse OO' del cilindro (v. Fig.2). La deformazione cor-

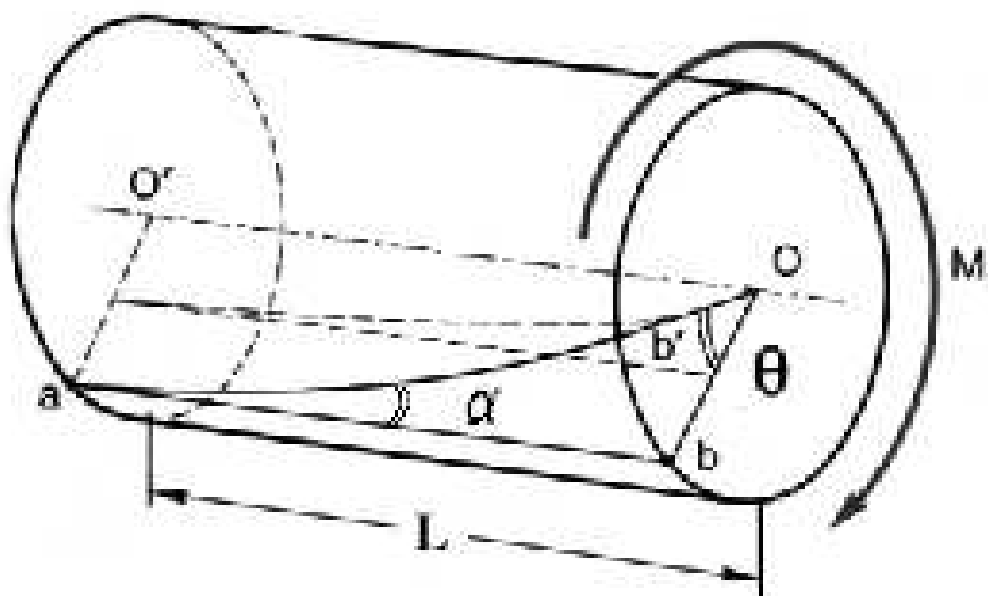


Figura 2:

rispondente, detta torsione, può essere schematizzata come lo scorrimento di un angolo α di tanti strati infinitesimi normali all'asse che ruotano, uno rispetto all'altro, intorno a quest'asse. Se indichiamo con θ l'angolo di cui ruota lo strato estremo rispetto alla posizione iniziale e con M_t il modulo del momento torcente applicato si ricava ¹

$$\theta = \frac{1}{G} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{L}{r^4} \cdot M_t \quad (1)$$

¹cfr., ad esempio, R.P.Feynman, "The Feynman lectures on physics", Vol.II, Part 2, par.38

dove L è la lunghezza e r il raggio del cilindro.

Tale relazione di proporzionalità è valida entro certi limiti sull'angolo di scorrimento iniziale α_{in} , ovvero sull'angolo di rotazione iniziale θ_{in} . Discuteremo tale limite in corrispondenza della misura del modulo di scorrimento G , facendo uso della successiva tabella nella quale sono riportati i valori tipici del modulo di scorrimento G e del limite elastico σ_G per alcuni materiali di uso comune.

Materiale	G kg_p/mm^2	σ_G kg_p/mm^2
Acciaio	$8 \cdot 10^3$	10
Alluminio	$2.4 \cdot 10^3$	5
Ferro	$8 \cdot 10^3$	8
Ottone	$3.5 \cdot 10^3$	15
Piombo	$0.6 \cdot 10^3$	0.4
Tungsteno	$15 \cdot 10^3$	30

3 La misura del modulo di scorrimento

La misura del modulo di scorrimento viene realizzata tramite lo studio del moto di un **pendolo di torsione**. Un pendolo di torsione è costituito da un filo che presenta elasticità di torsione sospeso per un estremo ad un sostegno rigido; all'altro estremo è attaccato un corpo, detto **equipaggio mobile**, in modo che il filo coincida con un suo asse permanente di rotazione (v. Fig.3). Se ruotiamo l'estremo libero del filo di un angolo θ_{in} rispetto a tale asse, il filo reagisce con un sistema di forze equivalente ad un momento di forze diretto lungo tale asse e di modulo dato dalla (1), se la deformazione applicata si mantiene entro la regione di proporzionalità. Ciò imporrà un limite all'angolo di rotazione iniziale che, per fili metallici, può esser espresso nella forma

$$\theta_{in} \leq \frac{L}{r} \cdot \alpha_{max} = \frac{L}{r} \cdot \frac{\sigma_G}{G} \quad (2)$$

dove L e r sono la lunghezza ed il raggio del filo, G la costante di scorrimento del materiale di cui è costituito il filo e σ_G il valore limite elastico (vedi Tabella del par. 2.1).

Se a questo punto lasciamo il pendolo libero partendo da questa posizione iniziale, esso si muoverà sotto l'effetto della sola presenza della forza di reazione elastica del filo, se tralasciamo per il momento il contributo dovuto alla resistenza dell'aria. Il moto dell'equipaggio sarà quindi descritto dalla equazione differenziale

$$I_{em} \ddot{\theta} = M_e = -c_t \theta \quad (3)$$

dove I_{em} è il momento d'inerzia del pendolo rispetto all'asse individuato dal filo, M_e è il modulo del momento di forze di reazione elastica del filo e c_t è la cosiddetta **costante di torsione** del filo, data, in base alla (1), da

$$c_t = \frac{\pi}{2} G \frac{r^4}{L} \quad (4)$$

La soluzione della (3) è data dall'equazione oraria

$$\theta(t) = A \cdot \cos(\omega t + \beta) \quad (5)$$

dove A e β dipendono dalle condizioni iniziali e $\omega = \sqrt{c_t/I_{em}}$ (talvolta detta pulsazione del moto). Se si impone a $t = 0 \rightarrow \theta(0) = \theta_{in}$ e $\dot{\theta}(0) = 0$ allora si ricava $A = \theta_{in}$ e $\beta = 0$. Il moto risulta quindi periodico con periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I_{em}}{c_t}} \quad (6)$$

La misura del periodo di oscillazione, unita alla conoscenza di I_{em} , permetterebbe quindi la misura indiretta della costante di torsione del filo c_t e quindi della costante di scorrimento del materiale di cui è costituito il filo.

La presenza dell'aria modifica l'equazione di moto (3) aggiungendo a secondo membro un termine proporzionale alla velocità angolare $-\mu\dot{\theta}$. Imponendo le stesse condizioni iniziali del caso precedente, l'equazione oraria si modifica in

$$\theta(t) = \theta_{in} \cdot e^{-\left(\frac{\mu}{2I_{em}}\right)t} \cos(\omega't) \quad (7)$$

con $\omega' = \sqrt{\omega^2 - (\mu/2I_{em})^2} = 2\pi/T'$, nuova pulsazione. Si ha quindi un moto oscillatorio smorzato con pulsazione (e periodo di oscillazione) diversa rispetto a quella ottenuta in assenza della resistenza dell'aria. Per risalire al valore di ω , e quindi di c_t , dovremo misurare il termine $-\mu/2I_{em}$: a tal fine si potrebbe misurare l'ampiezza di oscillazione in corrispondenza di $t_n = nT'$; riportando in grafico il logaritmo naturale dei valori $\theta(t_n)$ in funzione di t si otterrebbe un andamento lineare il cui coefficiente angolare è proprio il termine cercato $-\mu/2I_{em}$. In generale la resistenza dell'aria produce una piccola variazione nel periodo di oscillazione; sarà cura dello studente verificare se tale variazione è significativa rispetto all'incertezza di misura sui periodi di oscillazione.

Supponendo di aver verificato che la variazione del periodo di oscillazione dovuta alla resistenza dell'aria è trascurabile rispetto all'incertezza di misura, potremo determinare la costante di torsione del filo utilizzando la (6) se già conosciamo I_{em} . Se così non è, potremo utilizzare un corpo di momento di inerzia noto (un anello metallico nel nostro caso) e misurare un secondo periodo di oscillazione dopo aver posizionato il corpo sul pendolo di torsione (v. Fig.4), avendo cura che il filo individui sempre un asse permanente di rotazione del sistema totale. Ricordando infatti che il momento d'inerzia I_{an} di un anello, rispetto all'asse di simmetria passante per il suo centro di massa ed ortogonale al piano dell'anello, è dato da

$$I_{an} = \frac{1}{2} \cdot m_{an} \cdot (r_i^2 + r_e^2) \quad (8)$$

dalla misura della sua massa m_{an} , del raggio interno r_i e di quello esterno r_e è possibile ottenere una misura indiretta di I_{em} . Inoltre il periodo di oscillazione dell'apparato di Fig.4 può essere espresso nella forma

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{I_{em} + I_{an}}{c_t}} \quad (9)$$

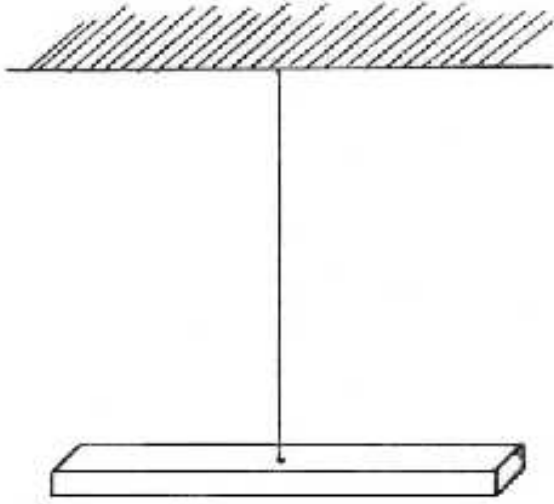


Figura 3:

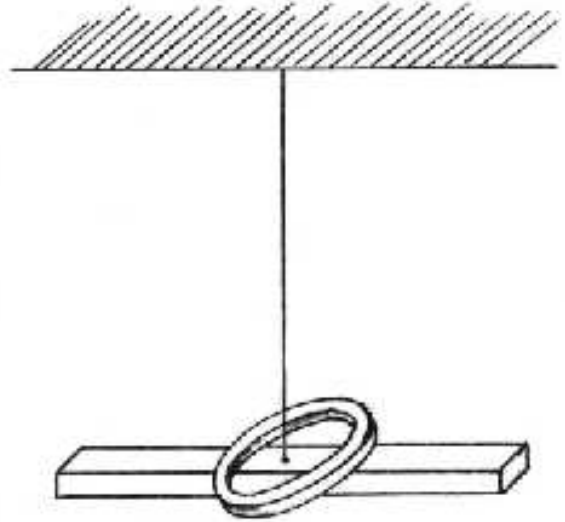


Figura 4:

che abbinata alla (6) dà

$$c_t = 4\pi^2 \frac{I_{an}}{T_2^2 - T^2} \quad (10)$$

e inoltre

$$I_{em} = \frac{I_{an} \cdot T^2}{T_2^2 - T^2} \quad (11)$$

permettendo così la misura indiretta di c_t (e I_{em}).

La misura del raggio del filo e della sua lunghezza fornirà infine, tramite la (4), la misura del modulo di scorrimento G . L'applicazione delle usuali formule di propagazione dell'incertezza permetterà poi di determinare anche l'incertezza di misura sulle grandezze misurate indirettamente.

Concludiamo infine con alcune osservazioni operative sulle misure sopra riportate:

- Nelle misure dei periodi di oscillazione il maggior contributo $\Delta\tau$ all'incertezza sarà dovuto ai riflessi dello sperimentatore (tipicamente $\Delta\tau \simeq 0.1$ s); per ridurre al minimo la loro influenza potremo misurare anziché il singolo periodo di oscillazione il tempo relativo a N periodi, distribuendo così l'incertezza assoluta $\Delta\tau$ su più periodi e migliorando di conseguenza l'incertezza sul singolo periodo di un fattore N .

- Un'ulteriore fonte d'incertezza nella misura dei tempi è legata alla determinazione degli istanti di inizio e fine misura. Questi sono infatti stabiliti dalla coincidenza della posizione istantanea dell'equipaggio mobile con un riferimento fisso da noi appositamente prescelto. Dalla relazione del moto angolare dell'equipaggio mobile abbiamo che $\Delta t = \Delta\theta/\omega$; $\Delta\theta$ è circa costante durante la misura (dipende dall'abilità dello sperimentatore nello stabilire il traguardo per la sovrapposizione dell'equipaggio mobile con il riferimento fisso) e avremo un minimo in Δt quando ω sarà massima. Stabiliremo quindi il riferimento fisso in corrispondenza della posizione dell'iniziale equilibrio statico del sistema, quando cioè avremo la massima ω del moto.
- Abbiamo detto che nella configurazione di misura riportata in Fig.4 il filo deve individuare un asse permanente di rotazione del sistema totale. Ciò implica che l'anello deve essere posizionato sull'equipaggio mobile in modo tale che l'eventuale distanza Δd tra l'asse del filo e il centro di massa dell'anello dia un contributo (pari a $m_{an} \cdot (\Delta d)^2$) al momento d'inerzia totale del sistema trascurabile rispetto alla sua incertezza di misura e, in particolare, rispetto all'incertezza con cui è stato misurato I_{an} . Lasciamo allo studente la determinazione dell'accuratezza con cui deve essere posizionato l'anello.