Piccolo formulario di derivate

$(d/dx)\,[\,x^{n}\,] = n\,x^{n-1}$

--> $n = -2$ $\quad (d/dx)\,[\,x^{-2}\,] = -2\,x^{-3} = -2\,/\,x^{3}$

--> $n = -1$ $\quad (d/dx)\,[\,x^{-1}\,] = -1\,x^{-2} = -1\,/\,x^{2}$

--> $n = 0$ $\quad (d/dx)\,[\,x^{0}\,] = 0$

--> $n = 1$ $\quad (d/dx)\,[\,x^{1}\,] = 1$

--> $n = 2$ $\quad (d/dx)\,[\,x^{2}\,] = 2\,x$

--> $n = 3$ $\quad (d/dx)\,[\,x^{3}\,] = 3\,x^{2}$

$(d/dx)\,[\,f(x) + k\,] = (d/dx)\,[\,f(x)\,]$ $\qquad (d/dx)\,[\,k\,f(x)\,] = k\,(d/dx)\,[\,f(x)\,]$

$(d/dx)\,[\,\ln(x)\,] = 1/x$ $\qquad (d/dx)\,[\,\log_{a}(x)\,] = (1/x)\,\log_{a}e = (1/x)\,(1/\ln a)$

$(d/dx)\,[\,\ln f(x)\,] = (1/f(x))\,(d/dx)\,[\,f(x)\,]$

$(d/dx)\,[\,\mathrm{sen}(x)\,] = \cos(x)$ $\qquad (d/dx)\,[\,\cos(x)\,] = -\,\mathrm{sen}(x)$

$(d/dx)\,[\,\mathrm{tg}(x)\,] = (d/dx)\,[\,\mathrm{sen}(x)/\cos(x)\,] = 1/\cos^{2}(x)$

$(d/dx)\,[\,e^{x}\,] = e^{x}$

$(d/dx)\,[\,e^{f(x)}\,] = e^{f(x)}\,(d/dx)\,[\,f(x)\,]$

Confronto tra misure di una grandezza fisica

Si siano ottenute le seguenti tre misure di una grandezza g

$$g_1 \pm \Delta g_1 \qquad g_2 \pm \Delta g_2 \qquad g_3 \pm \Delta g_3$$

con i Δg_i stime dell'incertezza tramite scarto massimo rispetto alle medie g_i

E' possibile ottenere un unico risultato finale per g dalle 3 misure?

Si può dare una risposta facendo i due seguenti passi:

1) Si può dare un unico risultato finale solo se le tre misure sono consistenti tra loro: ciò significa che gli intervalli $[g_1-\Delta g_1, g_1+\Delta g_1]$, $[g_2-\Delta g_2, g_2+\Delta g_2]$, $[g_3-\Delta g_3, g_3+\Delta g_3]$ devono sovrapporsi tra loro. In caso contrario NON è possibile ricavare un unico risultato finale.

2) Se la condizione 1) è soddisfatta si può dare come risultato finale il valore più preciso tra quelli riportati. Nel caso in cui 2 risultati abbiano la stessa precisione, è lecito dare come risultato finale la media dei due risultati e come incertezza il valore comune dell'incertezza.

Vedremo in seguito che, nel caso in cui le misure siano affette da soli errori accidentali (e quindi le stime delle incertezze riportate si riferiscano a deviazioni standard e non ad errori massimi) sarà possibile sviluppare una procedura più raffinata per ottenere il risultato finale. Tale procedura avrà inoltre il pregio di tener conto della precisione di tutti I risultati disponibili.

Propagazione delle incertezze nelle misure indirette dipendenza da più grandezze

Ci limiteremo ad esaminare il caso in cui $z = f(x,y)$ dove x e y sono state misurate direttamente con risultati $x_m \pm \Delta x$ $y_m \pm \Delta y$

In ogni caso cercheremo i limiti inferiore e superiore permessi da tali misure

- **Somma ($z = x + y$)**

  limite superiore -> $x_m + y_m + \Delta x + \Delta y$ limite inferiore -> $x_m + y_m - (\Delta x + \Delta y)$

  quindi $z_m = x_m + y_m$ e $\Delta z = \Delta x + \Delta y$ (indipendenza !?!)

- **Differenza ($z = x - y$)**

  limite superiore -> $x_m - y_m + \Delta x + \Delta y$ limite inferiore -> $x_m - y_m - (\Delta x + \Delta y)$

  quindi $z_m = x_m - y_m$ e $\Delta z = \Delta x + \Delta y$ (come somma !)

- **Prodotto ($z = x*y$)**

  limite superiore -> $x_m*y_m + y_m*\Delta x + x_m*\Delta y + \Delta x*\Delta y$ → asimmetrici

  limite inferiore -> $x_m*y_m - y_m*\Delta x - x_m*\Delta y + \Delta x*\Delta y$ se non sono $\Delta x/x_m, \Delta y/y_m << 1$

  in tali condizioni $z_m = x_m * y_m$ e $\Delta z = y_m*\Delta x + x_m*\Delta y$

- **Quoziente ($z = x/y$)**

  limite superiore -> $x_m/y_m[1 + \Delta x/x_m + \Delta y/y_m + \Delta x*\Delta y/x_m y_m]$ → asimmetrici

  limite inferiore -> $x_m/y_m[1 - \Delta x/x_m - \Delta y/y_m + \Delta x*\Delta y/x_m y_m]$ se non $\Delta x/x_m, \Delta y/y_m << 1$

  in tali condizioni $z_m = x_m / y_m$ e $\Delta z = \Delta x/y_m + (x_m/y_m^2)*\Delta y$

Propagazione delle incertezze nelle misure indirette dipendenza da più grandezze

REGOLA GENERALE

La grandezza fisica g si ottiene dalla misura di altre grandezze x, y z,…, misurate direttamente e indipendentemente le une dalle altre, tramite la conoscenza della relazione funzionale

$$\boxed{g = f(x, y, z, \ldots)}$$

La miglior stima del valore vero di g è data da

$$\boxed{g_v = f(x_v, y_v, z_v, \ldots)}$$

mentre quella dell'incertezza su g si ottiene da

$$\boxed{\Delta g = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_v, y_v, z_v, \ldots} \cdot \Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x_v, y_v, z_v, \ldots} \cdot \Delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{x_v, y_v, z_v, \ldots} \cdot \Delta z + \ldots\ldots}$$

dove

$$\boxed{\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_v, y_v, z_v, \ldots}}$$

indica il valore assoluto della derivata parziale della funzione f rispetto alla variabile x nel punto considerato

Propagazione delle incertezze nelle misure indirette dipendenza da più grandezze

PROPAGAZIONE DELL'INCERTEZZA RELATIVA

La grandezza fisica g si ottiene dalla misura di altre grandezze x, y z,…, misurate direttamente e indipendentemente le une dalle altre, tramite la conoscenza della relazione funzionale del tipo

$$\boxed{g = \phi(x) \cdot \theta(y) \cdot \lambda(z) .....}$$

Ricordiamo che $\boxed{\frac{\mathrm{d}f}{f} = \mathrm{d}(\ln f)}$ e quindi $\varepsilon = \frac{\Delta g}{g_v} = \Delta(\ln g_v)$

Avremo che

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}g}{g} &= \mathrm{d}\ \ln g = \mathrm{d}\ \ln[\phi(x) \cdot \theta(y) \cdot \lambda(z) .....] = \mathrm{d}\ \ln\phi(x) + \mathrm{d}\ \ln\theta(y) + \mathrm{d}\ \ln\lambda(z) + ... \\ &= \frac{\mathrm{d}\phi}{\phi} + \frac{\mathrm{d}\theta}{\theta} + \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda} + ... = \frac{1}{\phi} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right) \cdot \mathrm{d}x + \frac{1}{\theta} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}y}\right) \cdot \mathrm{d}y + \frac{1}{\lambda} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}z}\right) \cdot \mathrm{d}z + ... \end{aligned}$$

Da cui

$$\frac{\Delta g}{g_v} = \left|\frac{1}{\phi(x_v)} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right)_{x_v}\right| \Delta x + \left|\frac{1}{\theta(y_v)} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}y}\right)_{y_v}\right| \Delta y + \left|\frac{1}{\lambda(z_v)} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}z}\right)_{z_v}\right| \Delta z + ...$$

Applicazioni in lab.: $g=4\pi^2(l/T^2)$ $\rho_r = M_1/(M_3 - M_2)$ $\rho_r = (M_b - M_a)/(M_b - M_c)$

Esercizi, esercizi, esercizi……….

1) La grandezza T è misurata indirettamente, mediante la relazione:

$$T = \frac{a^2-b^2}{a+2b}$$

dalle seguenti misure dirette: $a = (10.0 \pm 0.2)\ cm$; $b = (50.0 \pm 0.5)\ mm$. Determinare la miglior stima di T e della sua incertezza relativa.
$[T = (3.75 \pm 0.21)\ cm \quad \Delta T/T \simeq 5.5\%]$

2) La grandezza S è misurata indirettamente, mediante la relazione:

$$S = \alpha \cdot \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2}\right)$$

dalle seguenti misure dirette: $\beta = (1.00 \pm 0.02)\ kg$; $\alpha = (500 \pm 5)\ g$. Determinare la miglior stima di S e della sua incertezza relativa.
$[S = (1.50 \pm 0.05)\ Kg^{-1} \quad \Delta S/S \simeq 3\%]$

3) La grandezza R è misurata indirettamente, mediante la relazione:

$$R = \frac{sen(\alpha + 2\ \beta)}{sen(\beta)}$$

dalle seguenti misure dirette: $\alpha = (60°0' \pm 3')$; $\beta = (30°\ 0' \pm 2')$
Determinare la miglior stima di R e della sua incertezza relativa.
$[R = (1.732 \pm 0.004) \quad \Delta R/R \simeq 0.2\%]$

4) La grandezza A è misurata indirettamente, mediante la relazione:

$$A = \frac{\beta^2}{\ln(\alpha - \beta)}$$

dalle seguenti misure dirette: $\alpha = (4.00 \pm 0.01)$; $\beta = (100 \pm 2) \cdot 10^{-2}$
Determinare la miglior stima di A e della sua incertezza relativa.
$[A = (0.91 \pm 0.04) \quad \Delta A/A \simeq 5\%]$