

# Rappresentazione numerica delle grandezze fisiche

## Rappresentazione decimale

Il nostro sistema convenzionale è il sistema decimale cioè con base 10. La sequenza dei valori posizionali è determinata dalle sequenze delle potenze di 10

$$10^3 \mid 10^2 \mid 10^1 \mid 10^0 \mid 10^{-1} \mid 10^{-2} \mid 10^{-3}$$

## Notazione scientifica

$$q = a \cdot 10^b$$

in cui  $0.5 \leq a \leq 5$  (cioè  $a$  è dell'ordine dell'unità, come vedremo in seguito) e  $b$  è un opportuno numero intero

non si scriverà	3450.25	ma	$3.45025 \cdot 10^3$ ;
non si scriverà	0.00841	ma	$0.841 \cdot 10^{-2}$ ;
non si scriverà	480.210	ma	$4.80210 \cdot 10^2$ ecc.

# Rappresentazione numerica delle grandezze fisiche

Quante cifre occorre considerare nella rappresentazione numerica delle costanti???

Ex. -> misurato  $r$  ( $r_m \pm \Delta r$ ) si vuol determinare la lunghezza della semicirconferenza  $\pi r$ :  
con quante cifre devo esprimere  $\pi$  (3.1415926539.....)?????

Valore approssimato  $q \rightarrow r = q + \Delta r$  con  $|\Delta r| \ll |r|, |q|$   
valore approssimato per difetto se  $\Delta r \geq 0$ , per eccesso se  $\Delta r \leq 0$ .

$\Delta r \rightarrow$  scarto di approssimazione, o approssimazione assoluta di  $q$  rispetto ad  $r$ .

$\varepsilon = |\Delta r/r| \cong |\Delta r/q| \rightarrow$  approssimazione relativa

**Numero di cifre significative  $\rightarrow$  n. cifre decimali della notazione scientifica necessarie per assicurare la rappresentazione della quantità  $r$  con l'approssimazione relativa  $\varepsilon$  desiderata (« incertezza relativa sulle grandezze fisiche misurate direttamente)**

Esempi:  $\pi = 3.14 \rightarrow \varepsilon \text{ ???? } (\approx 10^{-3})$   
 $\quad \quad = 3.142 \rightarrow \varepsilon \text{ ???? } (\approx 10^{-4})$   
 $\quad \quad = 3.1416 \rightarrow \varepsilon \text{ ???? } (\approx 10^{-5})$

**Convenzione: se un valore è dichiarato con n cifre significative il suo valore è approssimato in assoluto al più per 5 unità sulla prima cifra non dichiarata**

# Cifre significative nelle operazioni numeriche

ADDIZIONE:

$$q_1 = a_1 \cdot 10^{b_1} \quad \rightarrow \quad s = q_1 + q_2 = a_s \cdot 10^{b_s}$$
$$q_2 = a_2 \cdot 10^{b_2} \quad \rightarrow$$

↓

n. cifre decimali =  $\min(n_1, n_2)$

SOTTRAZIONE:

$$d = q_1 - q_2 = a_q \cdot 10^{b_q} \quad \rightarrow \quad \text{n. cifre decimali} = \min(n_1, n_2)$$

MOLTIPLICAZIONE:

$$p = q_1 \times q_2 = (a_1 \cdot 10^{b_1}) \times (a_2 \cdot 10^{b_2}) = (a_1 \times a_2) \cdot 10^{b_1+b_2} = a_p \cdot 10^{b_p}$$

↓

n. cifre significative =  $\min(n_1, n_2)$

DIVISIONE:

$$q = q_1 / q_2 = (a_1 \cdot 10^{b_1}) / (a_2 \cdot 10^{b_2}) = (a_1 / a_2) \cdot 10^{b_1-b_2} = a_q \cdot 10^{b_q}$$

↓

n. cifre significative =  $\min(n_1, n_2)$

## Valori approssimati delle funzioni

“si abbia una funzione  $f(x)$  reale, definita nell'intervallo  $]a,b[$ , ed essa ammetta in  $]a,b[$  derivate di ogni ordine; si può allora costruire la cosiddetta *serie di Taylor* esprimibile come:

$$T(x, x_0) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{3!}f'''(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}f^n(x_0) + \dots$$

Se tale serie risulta convergente in  $]a,b[$  e se ha per somma  $f(x)$ , si dice che la  $f(x)$  è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale  $x_0$  appartenente all'intervallo  $]a,b[$ .”

il polinomio di Taylor di ordine  $n$

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^k(x_0)$$

il termine complementare n-esimo della formula di Taylor

$$R_n(x) = f(x) - S_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^k(x_0)$$

“Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione  $f(x)$ , indefinitamente derivabile in un intervallo  $]a,b[$  cui appartiene  $x_0$  sia sviluppabile ivi in serie di Taylor è che per ogni  $x \in ]a,b[$  il termine complementare  $R_n(x)$  della formula di Taylor abbia limite zero quando  $n \rightarrow \infty$ ”

# Valori approssimati delle funzioni

$$T(x, x_0) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{3!}f'''(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}f^n(x_0) + \dots$$

$x_0 = 0$  (sviluppo di Mc Laurin)

$$\text{sen}(x) = 0 + x \times 1 - \frac{x^2}{2!} \times 0 - \frac{x^3}{3!} \times 1 + \dots = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \dots \quad |x| \leq \frac{\pi}{2}$$

$$(1 + x)^{\frac{n}{m}} = 1 + \frac{n}{m}x - \frac{n(m-n)}{2m^2}x^2 + \dots \quad |x| \leq 1$$

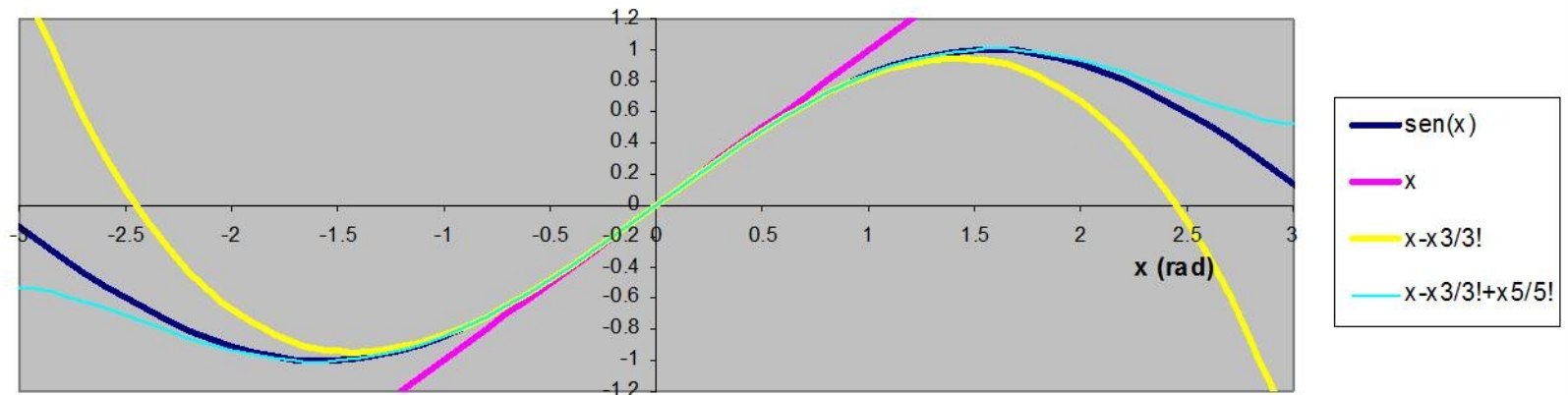
$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots \quad |x| \leq 1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad x \in \mathbb{R}$$

# Valori approssimati delle funzioni

$$\text{sen}(x) = 0 + x \times 1 - \frac{x^2}{2!} \times 0 - \frac{x^3}{3!} \times 1 + \dots = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots$$

Sviluppo Mac Laurin sen(x)



$x(\text{rad})$	$\text{sen}x$	$x - \text{sen}x$	$\frac{x - \text{sen}x}{\text{sen}x}$	$x - \frac{x^3}{3!} - \text{sen}x$	$\frac{x - \frac{x^3}{3!} - \text{sen}x}{\text{sen}x}$
0.01	$0.999983 \cdot 10^{-2}$	$1.67 \cdot 10^{-7}$	$1.67 \cdot 10^{-5}$	$-0.83 \cdot 10^{-12}$	$-0.83 \cdot 10^{-10}$
0.1	$0.99833 \cdot 10^{-1}$	$1.67 \cdot 10^{-4}$	$1.67 \cdot 10^{-3}$	$-0.83 \cdot 10^{-7}$	$-0.83 \cdot 10^{-6}$
0.3	$2.955 \cdot 10^{-1}$	$4.48 \cdot 10^{-3}$	$1.52 \cdot 10^{-2}$	$-2.0 \cdot 10^{-5}$	$-0.68 \cdot 10^{-2}$
0.5	$4.794 \cdot 10^{-1}$	$2.06 \cdot 10^{-2}$	$4.29 \cdot 10^{-2}$	$-2.6 \cdot 10^{-4}$	$-0.54 \cdot 10^{-3}$
0.7	0.6442	$0.558 \cdot 10^{-1}$	$0.866 \cdot 10^{-1}$	$-1.4 \cdot 10^{-3}$	$-2.1 \cdot 10^{-3}$
0.9	0.7833	$1.17 \cdot 10^{-1}$	$1.49 \cdot 10^{-1}$	$-4.8 \cdot 10^{-3}$	$-0.62 \cdot 10^{-2}$

# Valori approssimati delle funzioni

## Esercizi, esercizi, esercizi.....

Determinare il numero di cifre significative e l'ordine di grandezza dei risultati delle seguenti misure della grandezza fisica  $y$  ( $\Delta y$  indica l'incertezza di misura):

$y$	2.321	$0.176364 \cdot 10^3$	$2.1533 \cdot 10^{-2}$	$0.0427 \cdot 10^3$
$\Delta y$	$3 \cdot 10^{-2}$	0.03	$4 \cdot 10^{-5}$	0.2
[nr c.s. $\rightarrow$	3	5	4	3]
[odg $\rightarrow$	$10^0$	$10^2$	$10^{-2}$	10]

Determinare, con approssimazione del 1% e del 0.2%, i valori delle seguenti operazioni:

$$\frac{8}{7}; \quad \frac{26}{9}; \quad \sqrt{18}; \quad 16^{2.5}; \quad \left(\frac{1}{625}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

$\left[\frac{8}{7} \rightarrow 1.14 \text{ e } 1.143; \frac{26}{9} \rightarrow 2.89 \text{ e } 2.889; \sqrt{18} \rightarrow 4.24 \text{ e } 4.24; 16^{2.5} = 1.02 \cdot 10^3 \text{ e } 1.024 \cdot 10^3; \left(\frac{1}{625}\right)^{\frac{1}{4}} = 2.00 \cdot 10^{-1} \text{ e } 2.000 \cdot 10^{-1}\right]$

Calcolare i valori delle seguenti funzioni, nei punti indicati, con una approssimazione relativa di  $10^{-2}$ :

$$\begin{aligned} \text{sen}(x/2) \quad \text{in } x = 0.4^\circ; & \quad \frac{1}{(8+2x)^2} \quad \text{in } x = 4 \cdot 10^{-2} \\ \frac{1}{(1-x)^3} \quad \text{in } x = -2 \cdot 10^{-3}; & \quad e^{+x^3} \quad \text{in } x = 0.2 \end{aligned}$$

$\left[\text{sen}(x/2) \simeq 3.50 \cdot 10^{-3}; \frac{1}{(8+2x)^2} \simeq 0.0153; \frac{1}{(1-x)^3} \simeq 1.00; e^{+x^3} \simeq 1.01\right]$