Cinematica

Obbiettivo: descrizione spazio-temporale del moto di un corpo

La posizione e il moto di un corpo sono concetti “relativi”: necessità di scegliere un “sistema di riferimento” (SdR), che chiameremo “fisso”, secondo criteri di comodità e di semplicità (ex. sistema terrestre, sistema solare, ecc.)

Schematizzazione del **punto materiale:**
corpo avente
- massa finita
- dimensioni trascurabili (ma non nulle!) rispetto alle distanze lineari che esso percorre

Equazione vettoriale del moto

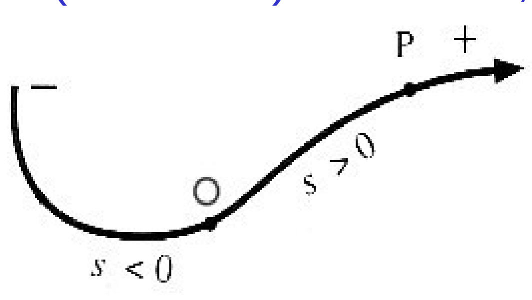
Nel SdR cartesiano prescelto il moto del corpo è descritto da

$$\underline{r} = \underline{r}(t) \;\; \text{-->} \;\; \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

che definiscono la “traiettoria” nello spazio in funzione del tempo. Fissata un'origine O sulla traiettoria e indicata con s (numero reale) l'ascissa curvilinea (intrinseca) su di essa, per ogni punto P della traiettoria avremo

s = lunghezza dell'arco OP

e quindi il moto di P potrà essere espresso tramite



$\underline{r} = \underline{r}(s)$ ↓ equazione della traiettoria

$s = s(t)$ ↓ legge oraria

Velocità del punto materiale

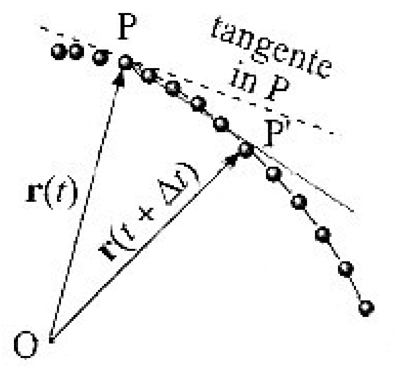
Nel SdR prescelto

avremo a $t = t_1$ --> $\underline{r} = \underline{r}(t_1)$

a $t = t_1 + \Delta t$ --> $\underline{r} = \underline{r}(t_1 + \Delta t)$

Si definisce velocità media nell'intervallo Δt

$$\underline{v}_m = [\, \underline{r}(t_1 + \Delta t) - \underline{r}(t_1)] \,/\, \Delta t$$



$\underline{v}_m$ non dipende dal percorso reale ma solo dalle posizioni iniziale e finale (secante PP') in Δt.

Per una descrizione più fedele del moto occorre allora definire la velocità istantanea tramite

$$\underline{v}(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} \underline{v}_m = \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta \underline{r} \,/\, \Delta t) = (d\underline{r}/dt)_{t1}$$

Introducendo il versore tangente $\underline{u}_t$ come

$$\underline{u}_t(P) = \lim_{\Delta s \to 0} (\Delta \underline{r} \,/\, \Delta s) = (d\underline{r}/ds)_P$$

si ha che $\underline{v}(t_1)$ è tangente alla traiettoria in $P(t_1)$ come può anche essere evidenziato da

$$\underline{v}(t_1) = (d\underline{r}/dt)_{t1} = (d\underline{r}/ds) \bullet (ds/dt) = (ds/dt) \bullet \underline{u}_t(P) = v_s\, \underline{u}_t$$

ed ha una rappresentazione cartesiana data da

$$\underline{v}(t_1) = (dx/dt)\underline{u}_x + (dy/dt)\underline{u}_y + (dz/dt)\underline{u}_z = v_x \underline{u}_x + v_y \underline{u}_y + v_z \underline{u}_z$$

Accelerazione del punto materiale

Analogamente a quanto visto per la velocità definiremo accelerazione media nell'intervallo Δt

$$\underline{a}_m = [\underline{v}(t_1 + \Delta t) - \underline{v}(t_1)] / \Delta t$$

e un'accelerazione istantanea

$$\underline{a}(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} \underline{a}_m = \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta \underline{v} / \Delta t) = (d\underline{v}/dt)_{t_1} = (d^2\underline{r}/dt^2)_{t_1}$$

con rappresentazione cartesiana data da

$$\underline{a}(t_1) = (dv_x/dt)\underline{u}_x + (dv_y/dt)\underline{u}_y + (dv_z/dt)\underline{u}_z = a_x \underline{u}_x + a_y \underline{u}_y + a_z \underline{u}_z$$

Espressione intrinseca

$$\underline{a}(t_1) = (d\underline{v}/dt)_{t1} = (dv_s \underline{u}_t /dt)_{t1} = (dv_s/dt)_{t1} \underline{u}_t + v_s (d\underline{u}_t /dt)_{t1}$$

componente tangenziale — componente normale

$$(d\underline{u}_t /dt)_{t_1} = (d\underline{u}_t /ds)(ds/dt) = v_s (d\varphi/ds)\underline{u}_n = (v_s/\rho)\underline{u}_n$$

con $\underline{u}_n$ versore normale alla traiettoria in P e ρ raggio del cerchio osculatore in P.

Concludendo

$$\underline{a}(t_1) = \underline{a}_t(t_1) + \underline{a}_n(t_1) = a_t(t_1)\underline{u}_t + a_n(t_1)\underline{u}_n =$$

$$= (dv_s/dt)\underline{u}_t + (v_s^2/\rho)\underline{u}_n = a_s \underline{u}_t + (v_s^2/\rho)\underline{u}_n$$

E' evidente che se $\rho \to \infty$ allora $a_n(t_1) \to 0$

Classificazione dei moti elementari

Le due relazioni $\underline{v}(t_1) = v_s\, \underline{u}_t = (ds/dt)\underline{u}_t$

$\underline{a}(t_1) = (dv_s/dt)\underline{u}_t + (v_s^2/\rho)\underline{u}_n$

permettono di classificare i moti elementari, caratterizzando l'aspetto cinematico in maniera indipendente da quello geometrico (traiettoria)

Due casi particolarmente semplici sono
1) **moti uniformi** --> v_s = costante = v_{s0}
2) **moti uniformemente vari** --> dv_s/dt = costante = $a_{s\,0}$

1) **moto uniforme**
Ricordando che $v_s = (ds/dt) = v_{s0}$, la legge oraria può essere ottenuta da

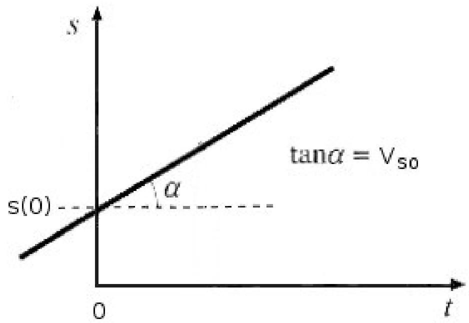
$s(t) = \int(ds/dt)\, dt + C = \int v_s\, dt + C = v_{s0}\, t + C$ -->

--> $s(t) = v_{s0}\, t + s(0)$

con rappresentazione grafica riportata accanto, ed inoltre

$\underline{v}(t) = v_{s0}\, \underline{u}_t$

$\underline{a}(t) = (v_{s0}^2/\rho)\underline{u}_n$ = costante



Lo stesso risultato è ottenibile con la seguente procedura, detta “separazione delle variabili”

$v_s(t) = v_{s0} = ds/dt$ --> $ds = v_{s\,0}dt$

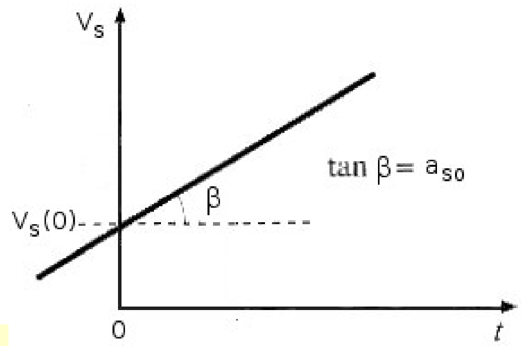
ed integrando i due membri tra t=0 e t

$s(t) - s(0) = v_{s0}\,(t - 0)$ --> $s(t) = v_{s0}\, t + s(0)$

Classificazione dei moti elementari

2) **moto uniforme vario** (a_s = costante = a_{s0})
In maniera analoga al caso precedente si ottiene
$v_s(t) = a_{s0}\, t + v_s(0)$

con rappresentazione grafica riportata accanto nel caso in cui a_{s0} e $v_s(0)$ positivi

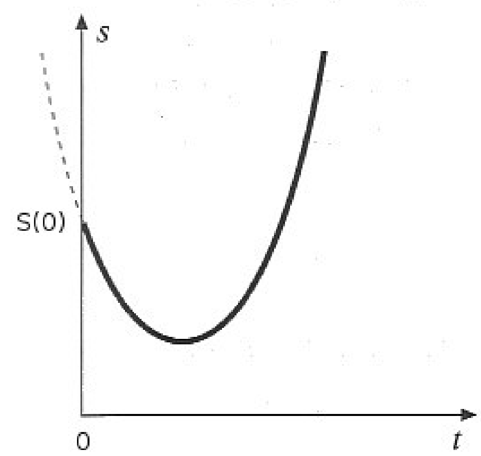


Per arrivare alla legge oraria potremo applicare nuovamente la procedura di separazione delle variabili ottenendo

$ds = v_s dt = a_{s0}\, t\, dt + v_s(0)\, dt$ --> $s(t) - s(0) = ½\, a_{s0}\, t^2 + v_s(0)\, t$

e infine $s(t) = ½\, a_{s0}\, t^2 + v_s(0)\, t + s(0)$

con rappresentazione grafica riportata accanto nel caso in cui a_{s0} e $s(0)$ positivi, $v_s(0)$ negativa



Ricavando t dalla relazione per $v_s(t)$ e sostituendo in quella per s(t) si ottiene

$$v_s^2(t) = 2\, a_{s0}\, [s(t) - s(0)] + v_s^2(0)$$

che esprime la velocità in funzione dell'ascissa curvilinea

Classificazione dei moti elementari

Applichiamo i moti elementari a particolari traiettorie geometriche

Moti rettilinei

Scegliendo un asse coordinato (ad es. x) coincidente con la traiettoria, si ha semplicemente

a) **moto rettilineo uniforme** --> $x(t) = v_{s0}\, t + x(0)$

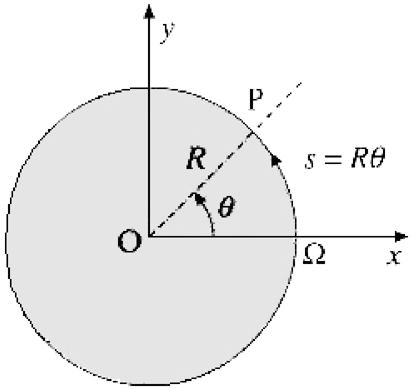
b) **moto rettilineo uniformemente accelerato** -->

--> $x(t) = \frac{1}{2} a_{s0}\, t^2 + v_s(0)\, t + x(0)$

Moti circolari

Caratterizziamo la traiettoria facendo riferimento alla figura equazione parametriche:

$x = R\cos\theta$ $\qquad$ $y = R\mathrm{sen}\theta$ $\qquad$ $z=0$



vettore posizione:

$\underline{r} = R\underline{u}_r$ con $\underline{u}_r = \cos\theta\, \underline{u}_x + \mathrm{sen}\theta\, \underline{u}_y$

La coordinata curvilinea, a partire da $\Omega = (R,0,0)$, è $s = R\theta$

versore tangente: $\underline{u}_t = d\underline{r}/ds = d\underline{u}_r/d\theta = -\mathrm{sen}\theta\, \underline{u}_x + \cos\theta\, \underline{u}_y$

versore normale: dalla relazione $d\underline{u}_t = d\theta\, \underline{u}_n = (ds/R)\, \underline{u}_n$

segue che $u = R du/ds = -\cos\theta\, u - \mathrm{sen}\theta\, u = - u$

a) **moto circolare uniforme**

Da $s(t) = v_{s\,0}\, t + s(0)$ segue che $\theta(t) = (v_{s\,0}/R)\, t + \theta(0) = \omega t + \theta(0)$

e, se $\theta(0)=0$, anche $\boxed{\underline{r}(t) = R\cos\omega t\, \underline{u}_x + R\,\mathrm{sen}\omega t\, \underline{u}_y}$

infine, essendo $dv_s/dt = 0$, si ha

$\underline{a}(t) = (v_{s\,0}^2/R)\, \underline{u}_n = (\omega^2 R)\, \underline{u}_n = -\omega^2\, \underline{r}$ $\qquad$ accelerazione centripeta

Classificazione dei moti elementari

b) Moto circolare uniformemente vario

Da $s(t) = \frac{1}{2}\, a_{s0}\, t^2 + v_s(0)\, t + s(0)$ segue che

$$\theta(t) = (a_{s0}/2R)\, t^2 + (v_s(0)/R)\, t + \theta(0)$$

ed inoltre

$$\underline{a}(t) = (dv_s/dt)\underline{u}_t + (v_s^2/R)\underline{u}_n$$

Ricordando che la derivata rispetto al tempo di un vettore di modulo costante (il vettore posizione nel moto circolare) è data da

$$d\underline{r}/dt = \underline{v}(t) = \underline{\omega}(t) \times \underline{r}(t)$$

con $\underline{\omega}(t) = (d\theta/dt)\underline{u}_z = \omega(t)\, \underline{u}_z$ velocità angolare, avremo

$$\underline{v}(t) = \underline{\omega}(t) \times \underline{r}(t) = \omega(t)\, r\, \underline{u}_t$$

Potremo definire l'accelerazione angolare come

$$\underline{\alpha}(t) = d\underline{\omega}(t)/dt = (d\omega(t)/dt)\, \underline{u}_z = (d^2\theta(t)/dt^2)\, \underline{u}_z$$

e ricavare

$$\underline{a}(t) = d\underline{v}(t)/dt = d[\underline{\omega}(t) \times \underline{r}(t)]/dt =$$
$$= [d\underline{\omega}(t)/dt] \times \underline{r}(t) + \underline{\omega}(t) \times d[\underline{r}(t)]/dt =$$
$$= \underline{\alpha}(t) \times \underline{r}(t) + \underline{\omega}(t) \times [\underline{\omega}(t) \times \underline{r}(t)] =$$
$$= \underline{\alpha}(t) \times \underline{r}(t) \quad - \quad \omega^2 \underline{r}$$

componente tangenziale   componente centripeta

Moti elementari

Relazioni fondamentali

$$\underline{\mathbf{v}}(t_1) = v_s\, \underline{\mathbf{u}}_t = (ds/dt)\underline{\mathbf{u}}_t$$

$$\underline{\mathbf{a}}(t_1) = (dv_s/dt)\underline{\mathbf{u}}_t + (v_s^2/\rho)\underline{\mathbf{u}}_n$$

Moti rettilinei

Scegliendo un asse coordinato (ad es. x) coincidente con la traiettoria, si ha semplicemente

a) **moto rettilineo uniforme**

$x(t) = v_{s0}\, t + x(0)$; $v(t) = v_{s0}$; $a(t) = 0$

b) **moto rettilineo uniformemente accelerato**

$x(t) = ½\, a_{s0}\, t^2 + v_s(0)\, t + x(0)$; $v(t) = a_{s0}\, t + v_s(0)$; $a(t) = a_{s0}$

Moti circolari

a) **moto circolare uniforme**

$s(t) = v_{s0}\, t + s(0)$ --> $\theta(t) = (v_{s0}/R)\, t + \theta(0) = \omega t + \theta(0)$

$\underline{r}(t) = R \cos\omega t\, \underline{u}_x + R\, \mathrm{sen}\,\omega t\, \underline{u}_y$

$\underline{v}(t) = v_{s0}\, \underline{\mathbf{u}}_t$ --> $\omega(t) = v_{s0}/R$

$\underline{a}(t) = (v_{s0}^2/R)\, \underline{u}_n = -\, \omega^2\, \underline{r}$

b) **moto circolare uniformemente vario**

$s(t) = ½\, a_{s0} t^2 + v_s(0)\, t + s(0)$ --> $\theta(t) = (a_{s0}/2R)t^2 + (v_s(0)/R)t + \theta(0)$

$\underline{v}(t) = (a_{s0}\, t + v_s(0))\, \underline{\mathbf{u}}_t$ --> $\omega(t) = (a_{s0}/R)\, t + (v_s(0)/R)$

$\underline{\alpha}(t) = d\underline{\omega}(t)/dt = (d\omega(t)/dt)\, \underline{u}_z = (d^2\theta(t)/dt^2)\, \underline{u}_z = (a_{s0}/R)\, \underline{u}_z$

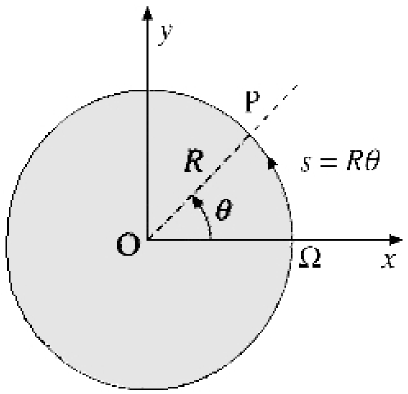
$\underline{a}(t) = \underline{\alpha}(t) \times \underline{r}(t) \quad - \quad \omega^2 \underline{r}$

Moti periodici

Moto circolare uniforme: $\underline{r}(t) = R\cos\theta\, \underline{u}_x + R\,\text{sen}\theta\, \underline{u}_y$

con $\theta = \omega t$ e quindi

$\underline{r}(t) = R\cos\omega t\, \underline{u}_x + R\,\text{sen}\omega t\, \underline{u}_y$



primo caso di moto periodico
ovvero di moto per il quale

$$\underline{r}(t+nT) = \underline{r}(t)$$

per ogni n intero.
Si ha subito che $T = 2\pi / \omega$

Inoltre $\underline{a}(t) = -\omega^2 \underline{r}$ --> $d^2\underline{r}/dt^2 = -\omega^2 \underline{r}$

$$d^2x/dt^2 = -\omega^2 x \qquad d^2y/dt^2 = -\omega^2 y$$

equazioni differenziali caratteristiche
del moto armonico

con soluzione

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

dove A (ampiezza) e φ (fase iniziale) sono determinate dalle condizioni iniziali (valori di x e di dx/dt a t=0, x_0 e $v_{x\,0}$) tramite le relazioni

$$\text{tg}\,\varphi = -v_{x\,0} / \omega x_0 \qquad A = \sqrt{x_0^2 + v_{x\,0}^2/\omega^2}$$

Teorema di Fourier:
una funzione periodica può essere espressa come somma finita o infinita di funzioni sinusoidali

Problema inverso della cinematica

Problema diretto:
nota (misurata) $\underline{r}(t)$ --> $\underline{v}(t)$ --> $\underline{a}(t)$

Problema inverso:
nota (misurata) $\underline{v}(t)$ --> ? --> $\underline{r}(t)$ (1)
oppure
nota (misurata) $\underline{a}(t)$ --> ? --> $\underline{v}(t)$ --> ? --> $\underline{r}(t)$ (2)

Risposta a (1): SI, purché la conoscenza di $\underline{v}(t)$ sia sufficientemente dettagliata e sia nota $\underline{r}(t)$ ad un istante t_0.
Si avrà allora

$$\underline{r}(t) = \underline{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \underline{v}(t')\, dt'$$

Risposta a (2): SI, purché la conoscenza di $\underline{a}(t)$ sia sufficientemente dettagliata e siano note $\underline{v}(t)$ e $\underline{r}(t)$ ad un istante t_0.
Si avrà allora

$$\underline{v}(t) = \underline{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \underline{a}(t')\, dt'$$

e poi nuovamente

$$\underline{r}(t) = \underline{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \underline{v}(t')\, dt'$$

Applicazione (moto dei gravi):
se si trascura la resistenza dell'aria, tutti i corpi in vicinanza della superficie terrestre si muovono con accelerazione costante $\underline{g}$ diretta verticalmente verso il basso.
Avremo quindi

$$\underline{v}(t) = \underline{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \underline{g}(t')\, dt' = \underline{v}(t_0) + \underline{g}\,(t - t_0)$$

$$\underline{r}(t) = \underline{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \underline{v}(t')\, dt' = \underline{r}(t_0) + \underline{v}(t_0)\,(t - t_0) + ½\, \underline{g}\,(t - t_0)^2$$

Esercizi sui moti elementari

1) Per poter decollare un aereo a reazione deve raggiungere la velocità minima v_0 = 85 m/s (velocità minima di sostentamento), dopo un moto uniformemente accelerato con a_0=4.0 m/s^2. Nel caso in cui il pilota dovesse interrompere il decollo, può farlo con una decelerazione di modulo a_1=5.0 m/s^2 al massimo.
Determinare la minima lunghezza che la pista dovrebbe avere affiché l'aereo abbia spazio sufficiente per fermarsi anche nel caso in cui il pilota decidesse di interrompere il decollo al momento in cui l'aereo raggiunge la minima velocità di sostentamento (R. 1626 m)

2) Da un suolo orizzontale si spara un proiettile nella direzione che forma un angolo φ_0 rispetto al suolo. Chiamando θ il cosiddetto angolo di visuale corrispondente all'angolo che la congiungente tra il punto di lancio e il punto di massima quota forma con l'orizzontale,
a) determinare la relazione tra θ e φ_0
b) calcolare il valore di θ corrispondente a φ_0 = 45°
(R. a) tan θ = !/2 tan φ_0 ; b) θ = 26.56°

3) Una pallina di massa m = 100 g viene lanciata orizzontalmente con una velocità v = 5.0 m/s. All'istante del lancio (preso come istante iniziale, t=0) la pallina si trova ad una quota h = 1.0 m. Determinare:
a) a quale distanza (dalla verticale per il punto di partenza) la pallina raggiunge il pavimento
b) il tempo complessivo in cui la pallina, dopo l'impatto con il pavimento (supposto istantaneo e perfettamente elastico), ritorna all'altezza pari a h/2.
(R. a) 2.25 m ; b) 0.58 s)

4) Da lontano un automobilista vede scattare il verde del semaforo e decide di tentare di passare prima che torni il rosso. Egli stima che la sua distanza dal semaforo sia di 600 m e sa che il verde ha una durata di 45 s. La sua velocità è di 30 km/h. Riuscirà a passare in tempo? In caso negativo,, di quanto deve accelerare per riuscirci?
(R. per passare il semaforo è necessaria un'accelerazione maggiore di 0.22 m/s^2)

5) All'istante t=0, un'auto si mette in moto su una pista circolare di raggio R= 300m. Fino all'istante t_1=10 s, l'accelerazione tangenziale ha valore costante a_t e lo spazio percorso è 150 m. Si determini il modulo e la direzione dell'accelerazione totale dell'auto all'istante t_1
(R. a = 4.24 m/s^2 , tanφ = 1 con φ angolo tra l'accelerazione e il vettore posizione a t = t_1)

6) Un satellite si muove intorno alla Terra (R_T = 6371 km) ad una distanza di 550 km dalla superficie e con un periodo di rivoluzione T = 1h 35m 12 s.
a) Calcolare l'accelerazione centripeta e la velocità del satellite
b) Esprimere la velocità e l'accelerazione del satellite in forma vettoriale
(R. a) v = 7.63 m/s a_c = 8.35 m/s^2; b) $\underline{v}$ = v[-sen(wt)$\underline{u}_x$ + cos(wt)$\underline{u}_y$]; $\underline{a}$ = -a[cos(wt)$\underline{u}_x$ + sen(wt)$\underline{u}_y$]

7) Si considerino i moti circolari uniformi elencati nel seguito e si proceda al calcolo delle grandezze richieste.
a) Davide rotea la sua fionda, di lunghezza l = 1.0 m, alla velocità di 2 giri al secondo. Con quale velocità si muove il sasso verso la fronte di Golia nel momento in cui viene lasciato andare?
b) Quale è il modulo dell'accelerazione di un granello di polvere sul bordo di un disco che gira a 33 giri al minuto e ha un diametro D = 30 cm?
(R. a) v = 12.6 m/s ; b) a = 1.79 m/s^2)