

Cinematica dei moti relativi

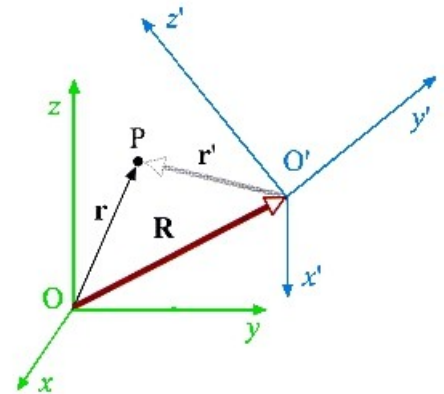
Carattere relativo del moto --> scelta sistema di riferimento

Cercheremo le leggi di trasformazione “classiche” dei vettori \underline{v} e \underline{a} di uno stesso punto materiale tra due sistemi di riferimento in moto relativo l'uno rispetto all'altro.

Dati due sistemi di riferimento (SdR) S e S' , indichiamo con \underline{R} il vettore posizione dell'origine O' di S' rispetto all'origine O di S . La posizione di un punto P è individuata in S dal vettore posizione \underline{r} e in S' da \underline{r}' ; potremo scrivere:

$$\underline{r} = (\underline{r} - \underline{R}) + \underline{R} = \dots\dots\dots = \underline{r}' + \underline{R}$$

purché valgano le seguenti condizioni:



1) **lo spazio sia assoluto** --> indipendente da SdR
--> osservatori in S e S' misurano le stesse distanze necessarie per determinare i vettori

2) **il tempo sia assoluto** --> indipendente da SdR
--> osservatori in S e S' misurano lo stesso intervallo di tempo Δt per determinare la durata di uno stesso fenomeno

--> concetto di contemporaneità necessario per stabilire che le misure sono realizzate allo stesso istante

Nel seguito supporremo sempre che le due precedenti condizioni siano soddisfatte e quindi potremo scrivere

$$\underline{r} = \underline{r}' + \underline{R}$$

Derivate di vettori e SdR

Per un generico vettore \underline{w} potremo scrivere in S e S'

$$\underline{w} = w_x \underline{u}_x + w_y \underline{u}_y + w_z \underline{u}_z = w_x' \underline{u}_x' + w_y' \underline{u}_y' + w_z' \underline{u}_z'$$

La derivata rispetto al tempo di \underline{w} in S è data da

$$\begin{aligned} (d\underline{w}/dt)_S &= (dw_x'/dt)_S \underline{u}_x' + (dw_y'/dt)_S \underline{u}_y' + (dw_z'/dt)_S \underline{u}_z' + \\ &w_x' (d\underline{u}_x'/dt)_S + w_y' (d\underline{u}_y'/dt)_S + w_z' (d\underline{u}_z'/dt)_S \end{aligned}$$

ed inoltre sappiamo che

$$(d\underline{u}_x'/dt)_S = \underline{\omega}_1 \times \underline{u}_x' \quad (d\underline{u}_y'/dt)_S = \underline{\omega}_2 \times \underline{u}_y' \quad (d\underline{u}_z'/dt)_S = \underline{\omega}_3 \times \underline{u}_z'$$

Per la permanenza nel tempo dell'ortogonalità tra \underline{u}_x' , \underline{u}_y' e \underline{u}_z'

$$\text{si ha che} \quad \underline{\omega}_1 = \underline{\omega}_2 = \underline{\omega}_3 = \underline{\omega}(t)$$

dove $\underline{\omega}(t)$ caratterizza il moto rotatorio relativo delle due terne

Per la condizione di tempo assoluto avremo

$$(dw_x'/dt)_S = (dw_x'/dt)_{S'} \quad \text{e analoghe per } y \text{ e } z$$

e quindi concludendo otteniamo

$$\underline{(d\underline{w} / dt)_S} = \underline{(d\underline{w} / dt)_{S'}} + \underline{\omega} \times \underline{w}$$

che esprime la variazione nel tempo del vettore \underline{w} come vista nei due SdR

Trasformazione del vettore velocità

Per il vettore velocità nel sistema di riferimento S possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\underline{v} &= (d\underline{r}/dt)_S = (d\underline{R}/dt)_S + (d\underline{r}'/dt)_S = (d\underline{R}/dt)_S + (d\underline{r}'/dt)_S + \underline{\omega} \times \underline{r}' \\ &= (d\underline{R}/dt)_S + \underline{v}' + \underline{\omega} \times (\underline{r} - \underline{R}) = \underline{v}' + (d\underline{R}/dt)_S + \underline{\omega} \times (\underline{r} - \underline{R}) \\ &= \underline{v}' + \underline{v}_t \quad \text{--> legge di trasformazione delle velocità}\end{aligned}$$

con \underline{v}_t velocità di trascinamento ($\underline{v} = \underline{v}_t$ se $\underline{v}' = 0$)

La velocità \underline{v} di un generico punto in S è data dalla somma vettoriale della velocità \underline{v}' in S' e della velocità \underline{v}_t in S del punto solidale con S' istantaneamente coincidente con il punto mobile

- Applicazioni -

1) $\underline{\omega} = 0$ --> $\underline{v}_t = (d\underline{R}/dt)_S$ identico per tutti i punti in S'

--> S' effettua un moto di "traslazione" rispetto a S

--> i versori in S' si mantengono paralleli a sé stessi

2) $\underline{\omega} \neq 0$ --> \underline{v}_t varia da punto a punto in S'

caso particolare --> se $(d\underline{R}/dt)_S = 0$ allora

$$\underline{v}_t = \underline{\omega}(t) \times (\underline{r} - \underline{R})$$

ovvero \underline{v}_t rappresenta la velocità di un punto materiale che si muove in S di moto circolare, con velocità angolare $\underline{\omega}(t)$, sulla circonferenza di asse (variabile nel tempo) parallelo a $\underline{\omega}(t)$ e passante per O'

--> S' è in "rotazione" rispetto a S

Trasformazione del vettore accelerazione

Per il vettore accelerazione nel sistema di riferimento S possiamo scrivere $[\underline{v} = \underline{v}' + (d\underline{R}/dt)_S + \underline{\omega} \times \underline{r}']$

$$\underline{a} = (d\underline{v}/dt)_S = (d\underline{v}'/dt)_S + (d^2\underline{R}/dt^2)_S + (d\underline{\omega}/dt)_S \times \underline{r}' + \underline{\omega} \times (d\underline{r}'/dt)_S$$

Utilizzando la relazione $(d\underline{v}'/dt)_S = (d\underline{v}'/dt)_{S'} + \underline{\omega} \times \underline{v}' = \underline{a}' + \underline{\omega} \times \underline{v}'$

ricaviamo infine [ricordando che $(d\underline{r}'/dt)_S = (d\underline{r}'/dt)_{S'} + \underline{\omega} \times \underline{r}'$]

$$\begin{aligned} \underline{a} &= \underline{a}' + \underline{\omega} \times \underline{v}' + (d^2\underline{R}/dt^2)_S + (d\underline{\omega}/dt)_S \times \underline{r}' + \underline{\omega} \times \underline{v}' + \underline{\omega} \times [\underline{\omega} \times \underline{r}'] \\ &= \underline{a}' + 2 \underline{\omega} \times \underline{v}' + (d^2\underline{R}/dt^2)_S + (d\underline{\omega}/dt)_S \times (\underline{r} - \underline{R}) + \underline{\omega} \times [\underline{\omega} \times (\underline{r} - \underline{R})] \end{aligned}$$

Da questa otteniamo l'accelerazione di trascinamento \underline{a}_t ponendo $\underline{a}' = 0$ e $\underline{v}' = 0$

$$\begin{aligned} \underline{a}_t &= (d^2\underline{R}/dt^2)_S + (d\underline{\omega}/dt)_S \times (\underline{r} - \underline{R}) + \underline{\omega} \times [\underline{\omega} \times (\underline{r} - \underline{R})] = \\ &= \underline{A} + \underline{\alpha} \times (\underline{r} - \underline{R}) + \underline{\omega} \times [\underline{\omega} \times (\underline{r} - \underline{R})] \end{aligned}$$

con \underline{A} accelerazione di O' in S e $\underline{\alpha}$ accelerazione angolare di S' rispetto a S

Se poi si definisce l'accelerazione di Coriolis con la relazione

$$\underline{a}_{co} = 2 \underline{\omega} \times \underline{v}'$$

si ottiene infine

$$\underline{a} = \underline{a}' + \underline{a}_t + \underline{a}_{co} \quad \text{--> legge di trasformazione delle accelerazioni}$$

Trasformazione del vettore accelerazione

$$\begin{aligned}\underline{a} &= \underline{a}' + 2 \underline{\omega} \times \underline{v}' + (d^2\underline{R}/dt^2)_S + (d\underline{\omega}/dt)_S \times (\underline{r} - \underline{R}) + \underline{\omega} \times [\underline{\omega} \times (\underline{r} - \underline{R})] \\ &= \underline{a}' + \underline{a}_{c_0} + \underline{a}_t\end{aligned}$$

$$\underline{a}_t = \underline{A} + \underline{\alpha} \times (\underline{r} - \underline{R}) + \underline{\omega} \times [\underline{\omega} \times (\underline{r} - \underline{R})]$$

$$\underline{a}_{c_0} = 2 \underline{\omega} \times \underline{v}'$$

Commenti

\underline{a}_t rappresenta l'accelerazione in S del punto solidale con S' in cui viene a trovarsi il punto materiale mobile (per esso $\underline{a}' = 0$ e $\underline{v}' = 0 \rightarrow \underline{a}_{c_0} = 0$)

\underline{a}_{c_0} per capirne l'importanza consideriamo il semplice caso in cui $O = O'$ e S' ruota con velocità angolare $\underline{\omega}$ costante (antiorario) intorno a $\underline{u}_z = \underline{u}_z'$ ed inoltre P in quiete in S

→ osservatore in S'
vede ruotare P orario ($-\underline{\omega}$), con velocità
 $\underline{v}' = -\underline{\omega} \times \underline{r}$ e con accelerazione centripeta $\underline{a}' = -\omega^2 \underline{r}$

→ osservatore in S

$$\underline{v} = \underline{v}' + \underline{v}_t = -\underline{\omega} \times \underline{r} + \underline{\omega} \times \underline{r} = 0$$

$$\begin{aligned}\underline{a} &= \underline{a}' + \underline{a}_t + \underline{a}_{c_0} = -\omega^2 \underline{r} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) + 2 \underline{\omega} \times \underline{v}' = \\ &= -\omega^2 \underline{r} - \omega^2 \underline{r} + 2 \omega^2 \underline{r} = 0\end{aligned}$$

Moto relativo di traslazione rettilinea

Se $\underline{\omega} = 0 \rightarrow$ moto relativo di S' rispetto ad S è caratterizzato dal solo vettore \underline{v}_t .

Le relazioni di trasformazione diventano in tal caso

$$(1) \quad \underline{v} = \underline{v}' + \underline{v}_t \qquad \underline{a} = \underline{a}' + \underline{a}_t \quad (2)$$

Se $\underline{v}_t = \text{costante}$ in direzione e verso \rightarrow

S' in traslazione rettilinea rispetto a S

Se \underline{v}_t rimane costante nel tempo $\rightarrow \underline{a}_t = 0 \quad \rightarrow$

$\rightarrow S'$ in traslazione rettilinea uniforme rispetto a S

In tali condizioni supponiamo che a $t = t' = 0$ sia $O=O'$; avremo

$$\begin{aligned} \underline{r} &= \underline{r}' + \underline{v}_t t' & \underline{r}' &= \underline{r} - \underline{v}_t t \\ t &= t' & t' &= t \end{aligned}$$

Leggi di trasformazione di Galileo
(valide per i “sistemi inerziali”)

Dalla (1) segue che la velocità di un punto materiale dipende dal sistema di riferimento (“non invariante”) ma sperimentalmente la velocità della luce nel vuoto è indipendente dal SdR.

Conseguenza \rightarrow revisione del carattere assoluto dello spazio e del tempo

\rightarrow “Leggi di trasformazione di Lorentz” che
- rendono velocità della luce \underline{c} “invariante”
- coincidono con quelle di Galileo se $\underline{v}_t \ll \underline{c}$

Dalla (2) segue che nei sistemi inerziali l'accelerazione di un punto materiale non dipende dal sistema di riferimento (“invariante”, importante nella dinamica)