Principi della Dinamica

Primo Principio della Dinamica

"Esistono infiniti sistemi di riferimento, detti inerziali, rispetto ai quali ogni punto materiale libero ha velocità costante"

Secondo Principio della Dinamica

"In un sistema di riferimento inerziale, ogni volta che un corpo ha un moto accelerato esiste (almeno) una forza responsabile di tale accelerazione; tra forza risultante e accelerazione esiste in ogni istante la relazione $\underline{f}(t) = m\,\underline{a}(t)$"

Terzo Principio della Dinamica

"Ogni volta che un corpo subisce l'azione di una forza $\underline{f}_1$ da parte di un secondo corpo, anche quest'ultimo è soggetto a una forza $\underline{f}_2$ per effetto del primo, con $\underline{f}_2 = -\underline{f}_1$."

Quantità di moto e impulso

Corpo (puntiforme) di massa m e velocità $\underline{v}$ (ad un istante t) si definisce il vettore

$\underline{q} = m\underline{v}$ --> **quantità di moto** del corpo all'istante t

Primo principio:
"*Esistono infiniti sistemi di riferimento, detti inerziali, nei quali ogni punto materiale libero ha quantità di moto costante*"

Se invece sul corpo agiscono forze non bilanciate allora

$$d\underline{q}/dt = d(m\underline{v})/dt = m\underline{a} + (dm/dt)\,\underline{v} \quad (1)$$

Secondo principio:
"*In un sistema di riferimento inerziale, ogni volta che un corpo cambia la propria quantità di moto, esiste (almeno) una forza responsabile di tale cambiamento: fra forza risultante e quantità di moto vale in ogni istante la relazione*

$\underline{f} = d\underline{q}/dt$ " [coincidente con $\underline{f} = m\underline{a}$ se m è costante]

Nota $\underline{f}$ si definisce "impulso della forza $\underline{f}$ " nell'intervallo di tempo (t_1,t_2) il vettore

$$\underline{J} = \int_{t_1}^{t_2} \underline{f}\, dt \quad \text{-->} \quad \underline{J} = \underline{u}_x \int_{t_1}^{t_2} f_x\, dt + \underline{u}_y \int_{t_1}^{t_2} f_y\, dt + \underline{u}_z \int_{t_1}^{t_2} f_z\, dt$$

Nel caso di più forze $\underline{f}_i$ agenti sul punto materiale avremo

$$\underline{J} = \int_{t_1}^{t_2} \underline{f}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \underline{f}_i\, dt = \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \underline{f}_i\, dt = \sum_i \underline{J}_i$$

Dalla (1) segue $\underline{J} = \int_{t_1}^{t_2} \underline{f}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} d\underline{q} = \underline{q}_2 - \underline{q}_1 = \Delta\underline{q}$

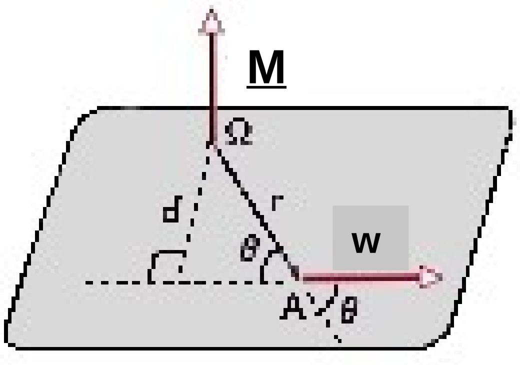
Teorema della quantità di moto (o dell'impulso):

"*L'impulso della forza risultante agente su un punto materiale durante un intervallo di tempo Δt è uguale alla variazione della quantità di moto nel Δt* "

Momento angolare

Si definisce "**momento**" $\underline{\mathbf{M}}$ di un vettore $\underline{w}$ (applicato in A) rispetto ad un punto Ω (polo o centro di riduzione) il vettore

$$\underline{\mathbf{M}} = \underline{\mathbf{r}} \times \underline{\mathbf{w}} \qquad \text{con } \underline{r} = \underline{\Omega A}$$



Il vettore M è ⊥ al piano di $\underline{r}$ e $\underline{w}$ ed ha modulo

$$\mathbf{M = r\, w\, sen(\theta) = d\, w}$$

con θ angolo tra le direzioni di $\underline{r}$ e $\underline{w}$

d (braccio) distanza del polo dalla retta di azione di $\underline{w}$.

Si definisce "**momento assiale**" $\mathbf{M_u}$ di $\underline{w}$ rispetto ad un asse di versore $\underline{u}$ la grandezza scalare

$$\mathbf{M_u} = (\underline{\mathbf{r}} \times \underline{\mathbf{w}}) \cdot \underline{\mathbf{u}}$$

con $\underline{r} = \underline{\Omega A}$ dove Ω è un qualsiasi (????) punto dell'asse

Se $\underline{w} = \underline{q}$ (quantità di moto del punto materiale) il "**momento della quantità di moto o momento angolare**" $\underline{\mathbf{p}}_\Omega$ è dato da

$$\underline{\mathbf{p}}_\Omega = (\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}_\Omega) \times \underline{\mathbf{q}} = \underline{\mathbf{r}}\,' \times \underline{\mathbf{q}}$$

con $\underline{r}\,'$ vettore che congiunge il polo Ω con il punto materiale

Derivando rispetto al tempo

$$\mathbf{d\underline{p}_\Omega/dt} = [\, d(\underline{r} - \underline{r}_\Omega)/dt \,] \times \underline{q} + (\underline{r} - \underline{r}_\Omega) \times d\underline{q}/dt =$$

$$= (\underline{v} - \underline{v}_\Omega) \times \underline{q} + (\underline{r} - \underline{r}_\Omega) \times \underline{f} =$$

$$= -\,\underline{v}_\Omega \times \underline{q} + (\underline{r} - \underline{r}_\Omega) \times \underline{f} = \mathbf{-\,\underline{v}_\Omega \times \underline{q} + \underline{M}_\Omega}$$

con $\underline{\mathbf{M}}_\Omega$ "momento della forza $\underline{f}$ ". Se si sceglie come polo Ω un punto fisso allora

$$\mathbf{d\underline{p}_\Omega/dt = \underline{M}_\Omega}$$

Momento angolare

Integrando la relazione $d\underline{p}_{\Omega}/dt = \underline{M}_{\Omega}$ rispetto al tempo si ha

$\Delta\underline{p}_{\Omega} = \int_{t_1}^{t_2} \underline{M}_{\Omega}\, dt$ (**Teorema del momento dell'impulso**)

Inoltre, se $\underline{M}_{\Omega} = 0 \rightarrow \underline{p}_{\Omega} =$ costante

↓

corpo puntiforme soggetto a una "**forza centrale**", ovvero forza diretta lungo la retta congiungente la posizione del punto materiale con un dato punto (ex: forza gravitazionale)

Quindi per forze centrali il momento angolare rispetto al centro di forza si conserva (conservazione del momento angolare).

Altre caratteristiche dei moti centrali:

1) sono piani

da $\underline{p}_{\Omega} =$ costante $\rightarrow \underline{r} \times \underline{v} =$ costante $\rightarrow$ il piano individuato da $\underline{r}$ e $\underline{v}$ rimane invariato nel tempo

2) avvengono con velocità areolare costante

velocità areolare $\underline{\sigma}$ = vettore con direzione $\perp$ al piano del moto, verso tale da vedere $\underline{r}$ ruotare in senso antiorario e modulo dato dalla rapidità con la quale il vettore $\underline{r}$ spazza il piano

In un intervallo infinitesimo dt, si ha $d\underline{r} = \underline{v}\, dt$ e quindi l'area dA spazzata da $\underline{r}$ è data, a meno di infinitesimi di ordine superiore

$dA = |\underline{r} \times d\underline{r}| / 2 = |\underline{r} \times \underline{v}|\, dt / 2$

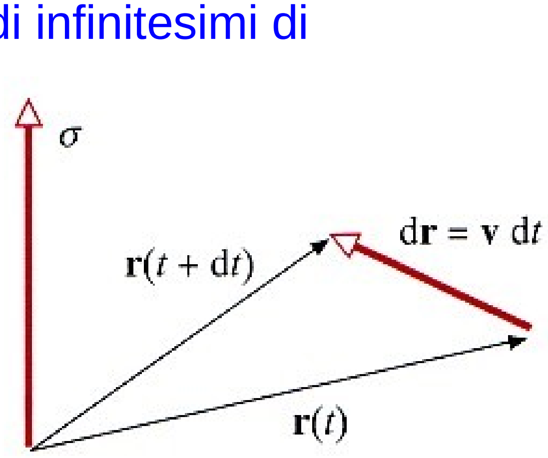
Per il modulo della velocità areolare $\underline{\sigma}$ si ha quindi

$\sigma = dA/dt = |\underline{r} \times \underline{v}| / 2 = p / 2m$

e quindi

$$\underline{\sigma} = \underline{p} / 2m$$

Infine $\underline{p}_{\Omega} =$ costante $\rightarrow \underline{\sigma} =$ cost



Applicazione dei Principi della Dinamica

Applicazione: l'equazione **f = m a** può essere utilizzata in modi diversi:

a) per la misura indiretta di m da misure dirette di f e a

b) per la misura indiretta di a da misure dirette di m e f ;
note a e le condizioni iniziali è possibile determinare l'equazione del moto

c) nota l'equazione del moto si possono determinare le caratteristiche delle forze agenti sul corpo
(caso particolare: statica
→ corpo in quiete
→ forze necessarie per equilibrio)

In un sistema di riferimento di coordinate cartesiane ortogonali l'equazione vettoriale può essere rappresentata da tre equazioni differenziali nelle incognite x, y e z

$$f_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = m\,\ddot{x}$$

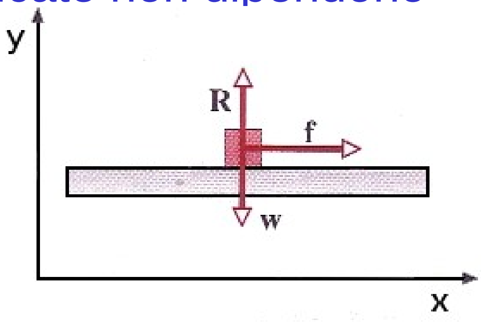
$$f_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = m\,\ddot{y}$$

$$f_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = m\,\ddot{z}$$

Vediamo nel seguito alcune applicazioni

Forze costanti

Consideriamo casi in cui le forze applicate non dipendono né da r, né da v, né da t.

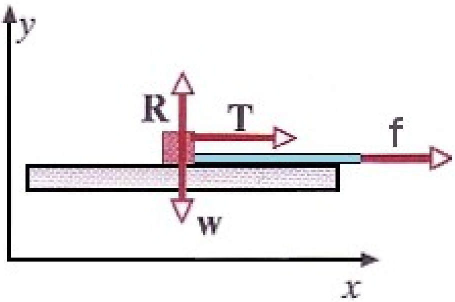


a) forza costante f applicata ad un corpo di massa m poggiato su piano orizzontale liscio

W + R + f = ma -> $f = m\ddot{x}$ -> moto rett. unif. acc.

-> $R - W = m\ddot{y} = 0$ -> R = W

b) forza costante applicata, tramite un filo di massa m_f, ad un corpo di massa m poggiato su piano orizzontale liscio



sul corpo -> $T = m\ddot{x}$

-> $R - W = m\ddot{y} = 0$

sul filo -> $f - T = m_f\ddot{x}$

-> $R_f - W_f = m_f\ddot{y} = 0$

considerando il sistema filo + corpo come un unico corpo

-> $$f = (m + m_f)\ddot{x}$$

-> $$R_{tot} - W_{tot} = R + R_f - W - W_f = (m + m_f)\ddot{y}$$

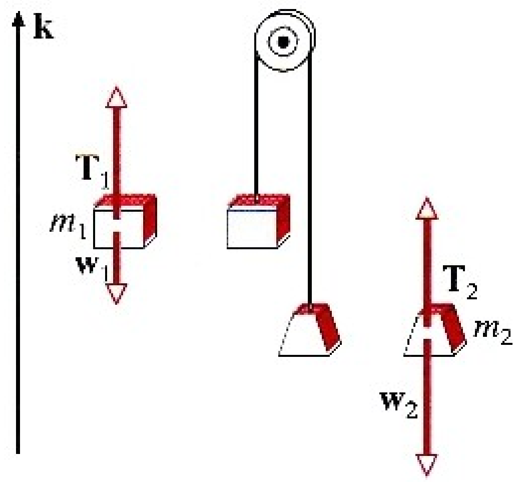
dalle quali si ottiene $\ddot{x} = \dfrac{f}{m+m_f}$ e $T = \dfrac{f\,m}{m+m_f} < f$

Quindi la forza f riduce la sua intensità lungo il filo. Se $m_f \ll m$ allora T ≈ f e il filo si limita a trasmettere la forza f da un suo estremo all'altro. In tal caso le forze applicate al filo (-T e f) sono uguali ed opposte

Forze costanti

c) macchina di Atwood

Due corpi, di massa m_1 e m_2, appesi agli estremi di un filo, inestensibile e di massa trascurabile rispetto a quelle dei corpi, che passa nella gola di una carrucola ideale (massa trascurabile e girevole senza attrito).



Applicando la seconda legge della dinamica ai due corpi si ha

corpo 1 $\underline{w}_1 + \underline{T}_1 = m_1 \underline{a}_1$

corpo 2 $\underline{w}_2 + \underline{T}_2 = m_2 \underline{a}_2$

Ma $T_1 = T_2 = T$ e $a_{1z} = - a_{2z} = a_z$ e quindi

$T = (w_1 m_2 + w_2 m_1)/ (m_1 + m_2)$ $a_z = g (m_2 – m_1)/(m_1 + m_2)$

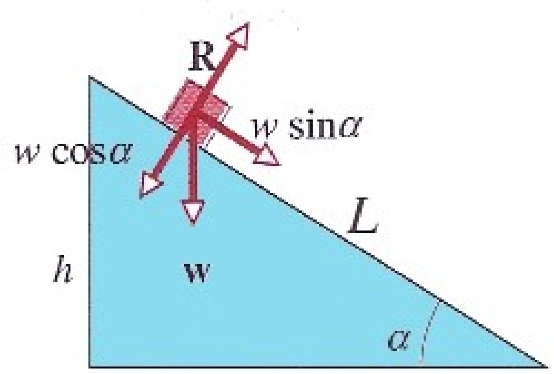
che permette di misurare g dalla misura di a_z, m_1 e m_2

d) corpo poggiato su un piano inclinato liscio

Corpo che può scivolare senza attrito lungo un piano inclinato di un angolo α rispetto al piano "orizzontale" (cosa è?)

Dalla seconda legge della dinamica

$\underline{R} + \underline{w} = m \underline{a}$



Proiettando lungo le direzioni normale (n) e tangente (t) alla traiettoria si ha

n) $R – w \cos α = 0$ -- > $R = w \cos α$

t) $w \sin α = m (d^2s/dt^2)$ -- > moto uniformemente accelerato

e quindi, se per $t = 0$ vale $s(0) = 0$ e $v(0) = 0$, si ha

$s(t) = ½ (g \sin α) t^2$ e $v(t) = (g \sin α) t$

Se indichiamo con h la quota da cui parte il corpo si ottiene infine $v^2_{fin} = 2 g h$ ovvero lo stesso valore della caduta libera