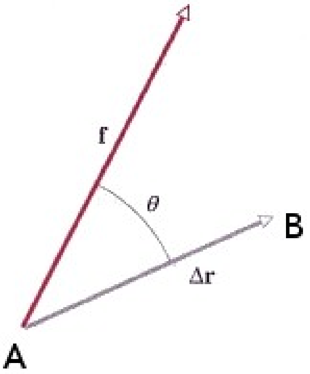
Lavoro ed Energia

Lavoro di una forza

1) forza f indipendente dal punto di applicazione e dal tempo.
Se il suo punto di applicazione effettua uno spostamento AB, si definisce "**lavoro della forza $\underline{f}$** "



$$L_{AB} = \underline{f} \bullet \underline{AB} = \underline{f} \bullet (\underline{r}_B - \underline{r}_A) =$$
$$= \underline{f} \bullet \Delta\underline{r} = f\, \Delta r \cos\theta$$

Se $\theta < \pi/2$ --> $L_{AB} > 0$ --> "**lavoro motore**"
Se $\theta > \pi/2$ --> $L_{AB} < 0$ --> "**lavoro resistente**"

2) forza f dipendente dal punto di applicazione
Si suddivide lo spostamento del punto di applicazione $\Delta\underline{r}$ nella somma di spostamenti $\Delta\underline{r}_i$ sufficientemente piccoli da considerare $\underline{f}$ costante e si ha $L \approx \Sigma_i\, \underline{f}(\underline{r}_i) \bullet \Delta\underline{r}_i$
Il valore del lavoro è ottenuto calcolando il limite di tale espressione per $\Delta\underline{r}_i$ (finiti) -> $d\underline{r}$ (infinitesimi), definendo il **lavoro elementare** $\delta L = \underline{f} \bullet d\underline{r} = f_x dx + f_y dy + f_z dz$
e ottenendo, lungo la traiettoria α

$$L_{AB} = {}_{\alpha}\int_A^B \delta L = {}_{\alpha}\int_A^B \underline{f} \bullet d\underline{r} = {}_{\alpha}\int_{X_A}^{X_B} f_x dx + {}_{\alpha}\int_{Y_A}^{Y_B} f_y dy + {}_{\alpha}\int_{Z_A}^{Z_B} f_z dz$$

L_{AB} dipende in genere, oltre che da A e B, dalla particolare traiettoria *α* seguita. Se L_{AB} è indipendente da *α* la forza $\underline{f}$ viene detta "**conservativa**"

Principio di indipendenza delle azioni simultanee
Se più forze $\underline{f}_i$ agiscono su un punto materiale, il lavoro della forza risultante $\underline{f}$ è uguale alla somma dei lavori $L_{AB\,i}$ delle singole forze

$$L_{AB} = {}_{\alpha}\int_A^B \underline{f} \bullet d\underline{r} = {}_{\alpha}\int_A^B \Sigma_i\, \underline{f}_i \bullet d\underline{r} = \Sigma_i\, {}_{\alpha}\int_A^B \underline{f}_i \bullet d\underline{r} = \Sigma_i\, L_{AB\,i}$$

Forze conservative

Se il lavoro delle forze agenti sul punto materiale lungo un percorso dipende solo dagli estremi del percorso le forze vengono dette “**conservative**”. Perché ciò accada è necessario e sufficiente che esista **una funzione scalare della sola posizione V(r)** tale che sia verificata la relazione

$$\delta L = - dV \quad \text{-->} \quad L_{AB} = {}_{\alpha}\int_A^B \delta L = - {}_{\alpha}\int_A^B dV = V_A - V_B = - \Delta V$$

In tal caso il lavoro elementare è un “differenziale esatto”. La grandezza V(r) prende il nome di “**energia potenziale**” ed è definita a meno di una costante additiva arbitraria.

Se esiste l'energia potenziale V(r), potremo scrivere

$$\delta L = f_x dx + f_y dy + f_z dz = - (\partial V/\partial x)dx - (\partial V/\partial y)dy - (\partial V/\partial z)dz$$

$$\rightarrow \underline{f} = - \text{grad } V(x,y,z) = - \underline{\nabla} V(x,y,z)$$

con l'operatore vettoriale $\underline{\nabla}$ (**nabla**) definito da

$$\underline{\nabla} = (\partial /\partial x, \partial /\partial y, \partial /\partial z)$$

Potremo inoltre definire il vettore “**rotore di f**” tramite

$$\text{rot } \underline{f} = \underline{\nabla} \times \underline{f} = \begin{vmatrix} \underline{u}_x & \underline{u}_y & \underline{u}_z \\ \partial /\partial x & \partial /\partial y & \partial /\partial z \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} =$$

$$= (\partial f_z/\partial y - \partial f_y/\partial z)\underline{u}_x + (\partial f_x/\partial z - \partial f_z/\partial x)\underline{u}_y + (\partial f_y/\partial x - \partial f_x/\partial y)\underline{u}_z$$

Se l’insieme di definizione di f è semplicemente connesso (ovvero senza buchi o composto di pezzi non separati) e f è una forza conservativa --> $\text{rot } \underline{f} = \underline{\nabla} \times \underline{f} = \underline{\nabla} \times (- \underline{\nabla} V) = 0$

[poiché $\partial f_z/\partial y = \partial f_y/\partial z$, $\partial f_x/\partial z = \partial f_z/\partial x$, $\partial f_y/\partial x = \partial f_x/\partial y$ ovvero $\partial^2 V/\partial y\partial z = \partial^2 V/\partial z\partial y$, $\partial^2 V/\partial z\partial x = \partial^2 V/\partial x\partial z$, $\partial^2 V/\partial x\partial y = \partial^2 V/\partial y\partial x$ è condizione sempre verificata]

Esempi di forze (campi) conservative

1) **Forza peso**

- ► campo uniforme ($\underline{f}$ indipendente da $\underline{r}$)
  -> **conservativo** in quanto derivate del rotore tutte nulle
- ► scelto un SdR cartesiano con asse z verso l'alto si ha
  -> $\mathbf{\underline{f} = (0, 0, -mg)}$
- ► $\delta L = \underline{f} \bullet d\underline{r} = -\,mg\,dz$ -> $L_{AB} = {}_{\alpha}\int_A^B \delta L = mg(z_A - z_B) = -\Delta V$
  -> $\mathbf{V = mgz}$ (avendo scelto V=0 per z=0)

2) **Forza elastica (molla ideale)**

- ► campo dipendente linearmente da una coordinata
  -> **conservativo** in quanto derivate del rotore tutte nulle
- ► scelto un SdR cartesiano con asse x lungo la molla e origine nella posizione della molla non deformata
  -> $\mathbf{\underline{f} = (-kx\,,\, 0,\, 0)}$
- ► $\delta L = \underline{f} \bullet d\underline{r} = -kx\,dx$ -> $L_{AB} = {}_{\alpha}\int_A^B \delta L = (k/2)(x_A^{\,2} - x_B^{\,2}) = -\Delta V$
  -> $\mathbf{V = (½)\, kx^2}$ (avendo scelto V=0 per x=0)

3) **Forza centrale a simmetria sferica**

- ► forza f agente su punto materiale P e diretta sempre verso un punto O (che sceglieremo come origine del SdR)
  $\mathbf{\underline{f} = f(r)\, \underline{u}_r}$
- ► $\delta L = \underline{f} \bullet d\underline{r} = f(r)\, \underline{u}_r \bullet (dr\, \underline{u}_r + r\, d\underline{u}_r) = f(r)\, dr = -\, dV(r)$
  -> $\mathbf{f(r) = -\, dV(r)/dr}$
  campo conservativo purché f(r) ammetta una primitiva V(r) (condizione normalmente soddisfatta)
- ► attrazione gravitazionale:
  -> forza agente tra due punti materiali di massa m_1 e m_2 posti a distanza r
  $\mathbf{\underline{f} = -\,(G\, m_1\, m_2 / r^2)\, \underline{u}_r = f(r)\, \underline{u}_r}$
  -> $\mathbf{V(r) = -\, G\, m_1\, m_2 / r}$ avendo scelto V(r) = 0 per r = ∞
  con $\mathbf{G = 6.67\ 10^{-11}\ Nm^2 / kg^2}$

Esempi di forze (campi) conservative

4) **Forza centrifuga**

► in un SdR non inerziale rotante con velocità angolare $\underline{\omega} = \omega\, \underline{u}_z$ rispetto ad un SdR inerziale, una massa m posta a distanza ρ dall'asse di rotazione subisce una forza fittizia centrifuga

$$\underline{f} = m\, \omega^2\, \rho\, \underline{u}_\rho = f(\rho)\, \underline{u}_\rho$$

con $\underline{u}_\rho$ versore radiale in coordinate cilindriche.

La posizione del punto P in tale SdR è data da
$\underline{r} = \rho\, \underline{u}_\rho + z\, \underline{u}_z$ --> $d\underline{r} = d\rho\, \underline{u}_\rho + \rho\, d\underline{u}_\rho + dz\, \underline{u}_z$ e quindi

► $\delta L = \underline{f} \bullet d\underline{r} = f(\rho)\, \underline{u}_\rho \bullet (d\rho\, \underline{u}_\rho + \rho\, d\underline{u}_\rho + dz\, \underline{u}_z) = f(\rho)\, d\rho$

► $L_{AB} = {}_{\alpha}\int_A^B \delta L = -(m\omega^2/2)(\rho_A^2 - \rho_B^2) = -\Delta V$

► $\mathbf{V(\rho) = -(½)\, m\omega^2\rho^2}$ avendo scelto $V(\rho) = 0$ per $\rho = 0$

Esempi di forze (campi) conservative

5) **Considerazioni finali**

Nei campi di forze conservativi è spesso utile individuare il luogo geometrico dei punti in cui l'energia potenziale assume lo stesso valore. Tale luogo è generalmente una superficie (detta “equipotenziale”)

Superficie equipotenziale --> **V = costante**

--> $\delta L = 0$ per spostamenti sulla superficie

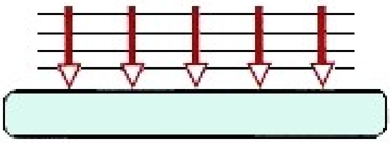
--> $\underline{f}$ è $\perp$ alla superficie in ogni suo punto

Si usa spesso rappresentare un campo di forze disegnando le superfici equipotenziali per valori di V equispaziati da un certo ΔV. In tale rappresentazione avremo per $\underline{f}$ (P):

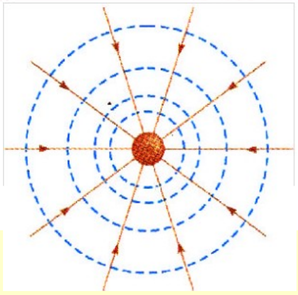
--> verso puntante alla superficie contigua di energia potenziale inferiore (segno – nella relazione tra δL e ΔV)

--> modulo tanto maggiore quanto più vicine sono in P le superfici equipotenziali corrispondenti ad un dato ΔV

forza peso →



forza gravitazionale →



Esempi di forze (campi) non conservative

1) **Attrito radente dinamico**

► $\underline{R}_t = - \mu_d \; R_n \, \underline{u}_v$ con $\underline{u}_v$ versore della velocità

► $L_{AB} = {}_\alpha\int_A^B \delta L = {}_\alpha\int_A^B \underline{R}_t \bullet d\underline{r} = {}_\alpha\int_A^B - \mu_d \, R_n \, \underline{u}_v \bullet d\underline{r}$

$$= - \mu_d \; R_n \; {}_\alpha\int_A^B \underline{u}_v \bullet d\underline{r}$$

ma $d\underline{r} = \underline{v} \, dt = v \, \underline{u}_v \, dt$ --> $\underline{u}_v \bullet d\underline{r} = \underline{u}_v \bullet v \, \underline{u}_v \, dt = v \, dt$

e quindi

$$L_{AB} = - \mu_d \, R_n \; {}_\alpha\int_A^B v \, dt = - \mu_d \; R_n \; S_{AB}^{(\alpha)}$$

dove $S_{AB}^{(\alpha)}$ è la lunghezza del percorso da A a B lungo α

► forza di attrito è **non conservativa** (dipendenza dal percorso, lavoro sempre negativo anche per percorso chiuso)

2) **Resistenza viscosa di un mezzo**

► $\underline{f}_R = - \; \beta \, v \, \underline{u}_v$

► $L_{AB} = {}_\alpha\int_A^B \delta L = {}_\alpha\int_A^B \underline{f}_R \bullet d\underline{r} = {}_\alpha\int_A^B - \beta \, v \, \underline{u}_v \bullet d\underline{r}$

$$= {}_\alpha\int_A^B - \beta \, v^2 \, dt = - \beta \; {}_\alpha\int_A^B v^2 \, dt$$

► $\underline{f}_R$ **non conservativa** in quanto ${}_\alpha\int_A^B v^2 \, dt > 0$ sempre, anche per un percorso chiuso

3) **Caso generale**

Sono non conservative le forze dipendenti dalla velocità oppure esplicitamente dal tempo