Moto del Centro di Massa

Avremo quindi

$$\underline{\mathbf{F}}^{(e)} = \Sigma_i \, \underline{\mathbf{f}}_i^{(e)} = d(\underline{\mathbf{Q}}) / dt \qquad (1)$$

detta “Prima Equazione della Dinamica” dei sistemi di punti materiali.

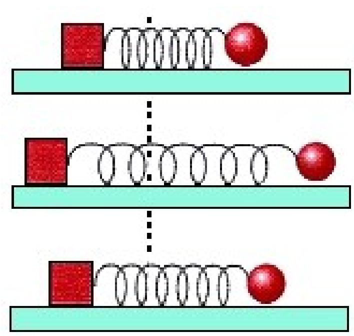
Quando il sistema è **“isolato”** il risultante delle forze esterne è nullo e quindi $\underline{Q}$ = costante
cioè **la quantità di moto totale di conserva**. Tale conservazione stabilisce un legame tra le quantità di moto dei singoli sottinsie-mi di un sistema, indipendentemente dalle forze ad esso interne (ex. quantità di moto opposte tra pistola e proiettile nello sparo)

La relazione (1) può anche essere riscritta nella forma

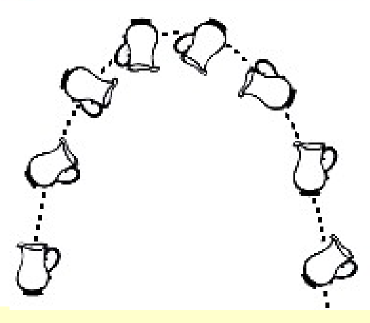
$$\underline{\mathbf{F}}^{(e)} = d(M\underline{\mathbf{v}}_{CM}) / dt = M\underline{\mathbf{a}}_{CM}$$

Tale relazione mostra che il CM di un sistema si muove come un punto materiale nel quale sia concentrata l'intera massa del sistema e sul quale agisca il risultante delle forze esterne applicate ai punti del sistema

Applicazioni



1) molla con attaccati agli estremi due corpi di massa diversa. Se si allunga la molla e poi la si lascia andare, i due corpi oscillano mantenendo fermo il CM



2) oggetto lanciato in aria con una certa velocità iniziale. Il CM del corpo compie la traiettoria parabolica ricavata nel caso del punto materiale

Momento angolare di un sistema

La Prima Equazione della Dinamica dei sistemi permette di studiare il moto traslatorio di un sistema di punti materiali ma nulla dice sui moti rotatori.

A tal fine si definisce il "**momento angolare totale**" di un sistema di punti materiali rispetto ad un polo Ω tramite la relazione

$\underline{P}_\Omega = \Sigma_i (\underline{r}_i - \underline{r}_\Omega) \times \underline{q}_i = \Sigma_i \underline{\dot{p}}_i$ ($\underline{P}_\Omega = \int (\underline{r} - \underline{r}_\Omega) \times d\underline{q}$ continuo)

Per un punto materiale --> $d\underline{p}/dt = \underline{M}_\Omega - \underline{v}_\Omega \times \underline{q}$ e quindi

$d\underline{P}_\Omega/dt = d(\Sigma_i \underline{p}_i)/dt = \Sigma_i\, d\underline{p}_i/dt = \Sigma_i \underline{M}_{i\,\Omega} - \Sigma_i (\underline{v}_\Omega \times \underline{q}_i) =$
$= \Sigma_i \underline{M}_{i\,\Omega} - \underline{v}_\Omega \times \underline{Q}$

ma $\underline{Q} = M\, \underline{v}_{CM}$ e quindi

$d\underline{P}_\Omega/dt = \Sigma_i \underline{M}_{i\,\Omega} - M\, \underline{v}_\Omega \times \underline{v}_{CM} = \underline{M}_\Omega - M\, \underline{v}_\Omega \times \underline{v}_{CM}$

Anche in questo caso potremo separare il contributo delle forze interne ed esterne $\underline{M}_\Omega = \underline{M}_\Omega^{(i)} + \underline{M}_\Omega^{(e)}$ e, tenendo conto del principio di azione e azione ricavare

$\underline{M}_\Omega^{(i)} = \Sigma_{i\,j} [(\underline{r}_i - \underline{r}_\Omega) \times \underline{f}_{i\,(j)} + (\underline{r}_j - \underline{r}_\Omega) \times \underline{f}_{j\,(i)}] =$
$= \Sigma_{i\,j} (\underline{r}_i - \underline{r}_j) \times \underline{f}_{i\,(j)} = 0$ in quanto $(\underline{r}_i - \underline{r}_j) \,//\, \underline{f}_{i\,(j)}$.

Concludendo $d\underline{P}_\Omega/dt = \underline{M}_\Omega^{(e)} - M\, \underline{v}_\Omega \times \underline{v}_{CM}$

Se $\underline{v}_\Omega = 0$
o $\underline{v}_\Omega = \underline{v}_{CM}$
o $\Omega \equiv CM$

$d\underline{P}_\Omega/dt = \underline{M}_\Omega^{(e)}$

(Seconda Equazione della Dinamica dei Sistemi)

Momento angolare di un sistema

ATTENZIONE!!!!!

Ai fini del calcolo del momento della quantità di moto di un sistema **NON** è lecito sostituire il sistema con un solo punto di massa M posto nel CM !!!!

Infatti, ponendo per comodità il polo Ω nell'origine O del SdR, si ha

$$\underline{P}_\Omega = \Sigma_i\ \underline{r}_i \times \underline{q}_i = \Sigma_i (\underline{r}_i' + \underline{r}_{CM}) \times \underline{q}_i = \underline{P}_{CM} + \underline{r}_{CM} \times \underline{Q} =$$
$$= \underline{P}_{CM} + \underline{r}_{CM} \times M\, \underline{v}_{CM}$$

dove $\underline{P}_{CM} = \Sigma_i\ \underline{r}_i' \times \underline{q}_i = \Sigma_i (\underline{r}_i - \underline{r}_{CM}) \times \underline{q}_i$ è il momento angolare rispetto al CM. Quindi **il momento angolare rispetto ad un qualsiasi polo è dato dalla somma di quello rispetto al CM e del termine $\underline{r}_{CM} \times M\underline{v}_{CM}$.**

EQUAZIONI CARDINALI DELLA MECCANICA

$$\underline{F}^{(e)} = d(\underline{Q}) / dt$$
$$\underline{M}_\Omega^{(e)} = d\underline{P}_\Omega / dt$$

rappresentano la massima conoscenza possibile sulle relazioni fra le grandezze fisiche $\underline{Q}$ e $\underline{P}_\Omega$ e le cause della loro variazione.

► valide in SdR inerziali ma possono essere utilizzate anche in SdR non inerziali purché si tenga conto di forze fittizie.

► corrispondono a 6 equazioni scalari (numero piccolo rispetto a 3n coordinate di n particelle, se non n=2)

► per un sistema isolato

$\underline{F}^{(e)} = 0$ e $\underline{M}^{(e)} = 0$ --> $\underline{Q}$=cost e $\underline{P}_\Omega$ = cost

Dinamica dei sistemi di punti materiali

Punto materiale	Sistema di punti materiali
$\underline{q} = m\underline{v}$	$\underline{Q} = M\ \underline{v}_{CM}$
Prima Equ	
$d\underline{q}/dt = \underline{F}$	$d\underline{Q}/dt = \underline{F}^{(e)} = M\ \underline{a}_{CM}$
Seconda Equ	
$d\underline{p}_{\Omega}/dt = \underline{\mathit{M}}_{\Omega}$	$d\underline{P}_{\Omega}/dt = \underline{\mathit{M}}_{\Omega}^{(e)} - M\ \underline{v}_{\Omega} \times \underline{v}_{CM}$
	se $\Omega = CM$ -> $d\underline{P}_{CM}/dt = \underline{\mathit{M}}_{CM}^{(e)}$
	se $\underline{v}_{\Omega} = 0$ -> $d\underline{P}_{\Omega}/dt = \underline{\mathit{M}}_{\Omega}^{(e)}$
	$\underline{P}_{\Omega} = \underline{P}_{CM} + \underline{r}_{CM} \times M\ \underline{v}_{CM}$

Sistemi di forze parallele

Consideriamo un sistema di punti materiali sui quali agiscono forze parallele (ex. forza peso se il sistema ha dimensioni limitate rispetto a quelle della Terra)

$\underline{u}$ --> versore comune alle forze $\underline{f}_i = f_i\, \underline{u}$

$\underline{r}_i$ --> vettori posizione dei loro punti di applicazione

Questo sistema di forze è equivalente al semplice sistema costituito dalla forza $\underline{F} = \Sigma_i f_i\, \underline{u}$

applicata nel punto individuato dal vettore posizione $\underline{r}_f = \Sigma_i f_i\, \underline{r}_i / \Sigma_i f_i$

I due sistemi di forze hanno infatti:

► stesso risultante

► stesso momento risultante $\underline{M}$ rispetto a qualsiasi polo

Infatti

$$\underline{M} = \Sigma_i (\underline{r}_i \times f_i\, \underline{u}) = (\Sigma_i f_i\, \underline{r}_i) \times \underline{u} = (\Sigma_i f_i)\, \underline{r}_f \times \underline{u} = \underline{r}_f \times \underline{F}$$

Forze peso

$$\underline{g} = -g\, \underline{u}_z \quad \text{-->} \quad \underline{f}_i = \underline{w}_i = m_i\, \underline{g} = -m_i\, g\, \underline{u}_z$$

e quindi

$$\underline{F} = \underline{W} = M\, \underline{g} \quad \text{e} \quad \underline{r}_f = \Sigma_i m_i\, \underline{r}_i / M = \underline{r}_{CM}$$

$\underline{W}$ = “forza peso totale del sistema”

$\underline{r}_f$ = “baricentro del sistema” (coincidente con CM per corpi non molto estesi)

Altri casi

► reazioni vincolari esercitate da piano di appoggio liscio su corpo esteso

► forze fittizie associate ad accelerazione di trascinamento costante

Moto rispetto al centro di massa

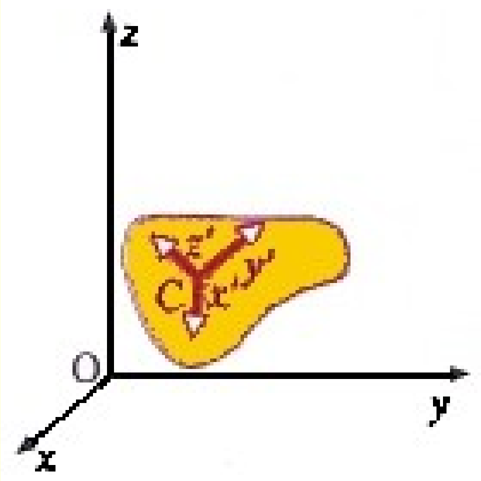
Scegliamo un SdR S' con origine nel CM. Avremo che

$$\Sigma_i \, m_i \, (\underline{r}_i - \underline{r}_{CM}) = \Sigma_i \, m_i \, \underline{r}_i' = 0$$

e derivando rispetto al tempo

$$\Sigma_i \, m_i \, \underline{v}_i' = \underline{Q}' = 0$$

ovvero la quantità di moto totale del sistema materiale è sempre nulla.
Derivando nuovamente rispetto al tempo si ha anche $\Sigma_i \, m_i \, \underline{a}_i' = 0$



Supponiamo che il SdR S' abbia una terna di assi con orientamento costante rispetto a S: avremo allora

$\underline{v}_i = \underline{v}_i' + \underline{v}_{CM}$

Per il momento angolare del sistema di punti nel sistema S' potremo scrivere

$$\underline{P}_{CM}' = \Sigma_i \, \underline{r}_i' \times m_i \underline{v}_i' = \Sigma_i \, \underline{r}_i' \times m_i (\underline{v}_i - \underline{v}_{CM}) =$$
$$= \Sigma_i \, (\underline{r}_i - \underline{r}_{CM}) \times m_i (\underline{v}_i - \underline{v}_{CM}) =$$
$$= \Sigma_i \, (\underline{r}_i - \underline{r}_{CM}) \times m_i \underline{v}_i - \Sigma_i \, m_i (\underline{r}_i - \underline{r}_{CM}) \times \underline{v}_{CM} =$$
$$= \Sigma_i \, (\underline{r}_i - \underline{r}_{CM}) \times m_i \underline{v}_i = \underline{P}_{CM}$$

quindi

$\underline{P}_{CM}'$ --> **grandezza intrinseca del sistema (momento angolare intrinseco)**

Concludendo $\underline{P}_{\Omega} = \underline{P}_{CM} + \underline{r}_{CM} \times M\underline{v}_{CM} = \underline{P}_{CM}' + \underline{r}_{CM} \times M\underline{v}_{CM}$

Tale espressione (**Teorema di König per il momento angolare**) evidenzia la separazione tra momento angolare intrinseco e moto del CM

(ex. - Terra: rotazione diurna e rivoluzione intorno al Sole
- particelle elementari: spin e moto orbitale)