Moto rispetto al centro di massa

Dalla relazione $\underline{P}_{CM}' = \underline{P}_{CM}$

segue immediatamente che $\underline{M}_{CM}^{(e)} = d\underline{P}_{CM}/dt = d\underline{P}_{CM}'/dt$

ma il momento di ciascuna forza dipende dal polo ma non dal SdR e quindi

$\underline{M}_{CM}'^{(e)} = \underline{M}_{CM}^{(e)}$ --> $\underline{M}_{CM}'^{(e)} = d\underline{P}_{CM}'/dt$

Concludendo, in S' possiamo utilizzare la seconda equazione cardinale considerando il momento risultante delle sole forze esterne “vere”, senza preoccuparci di quelle fittizie.

Per quanto riguarda l'energia cinetica K si ha

$K = \Sigma_i (½)\, m_i\, v_i^2 = \Sigma_i (½)\, m_i\, (\underline{v}_i' + \underline{v}_{CM}) \bullet (\underline{v}_i' + \underline{v}_{CM}) =$

$= \Sigma_i (½)\, m_i\, v_i'^2 + (½)\, M\, v_{CM}^2 + \Sigma_i m_i\, \underline{v}_i' \bullet \underline{v}_{CM} =$

$= K' + (½)\, M\, v_{CM}^2$

Tale relazione (**Teorema di König per l'energia cinetica**) esprime l'energia cinetica come somma dell'energia cinetica nel sistema del CM e dell'energia cinetica di un punto materiale di massa uguale alla massa totale e coincidente con il CM.

Lavoro ed Energia nei Sistemi

Per ogni punto materiale del sistema potremo scrivere il Teorema delle forze vive $\delta L_i = dK_i$ e sommando su tutte le particelle del sistema avremo

$$\delta L = \Sigma_i \delta L_i = \Sigma_i \delta L_i^{(e)} + \Sigma_i \delta L_i^{(i)} = \delta L^{(e)} + \delta L^{(i)} = dK$$

In generale $\delta L^{(i)} \neq 0$; ad esempio per un sistema di due punti materiali avremo $\delta L^{(i)} = \underline{f}_1 \bullet d\underline{r}_1 + \underline{f}_2 \bullet d\underline{r}_2 = \underline{f}_2 \bullet (d\underline{r}_2 - d\underline{r}_1) = \underline{f}_2 \bullet d(\underline{r}_2 - \underline{r}_1)$ ma $\underline{f}_2 \,//\, \underline{r}_2 - \underline{r}_1$ e quindi $\delta L^{(i)} = f_2 \, d|\underline{r}_2 - \underline{r}_1|$ legato alla variazione di distanza tra i due punti materiali

Potremo riscrivere il Teorema delle forze vive nella forma

$$dK = \delta L^{(e,c)} + \delta L^{(e,nc)} + \delta L^{(i,c)} + \delta L^{(i,nc)} = -dV^{(e)} - dV^{(i)} + \delta L^{(e,nc)} + \delta L^{(i,nc)}$$

separando il contributo delle forze non conservative da quello delle forze conservative. In particolare $V^{(i)}$ rappresenta l'energia potenziale interna del sistema di punti materiali.
Essa è dovuta a forze conservative di origine elettromagnetica, dipendenti dalle distanze relative tra I punti materiali costituenti, e quindi $\delta L^{(i,nc)} = 0$. Avremo allora

$$d(K + V^{(i)}) = \delta L^{(e)}$$

La grandezza $E^{(0)} = K + V^{(i)}$ viene detta "energia propria del sistema" e rimane costante in assenza di lavoro di forze esterne

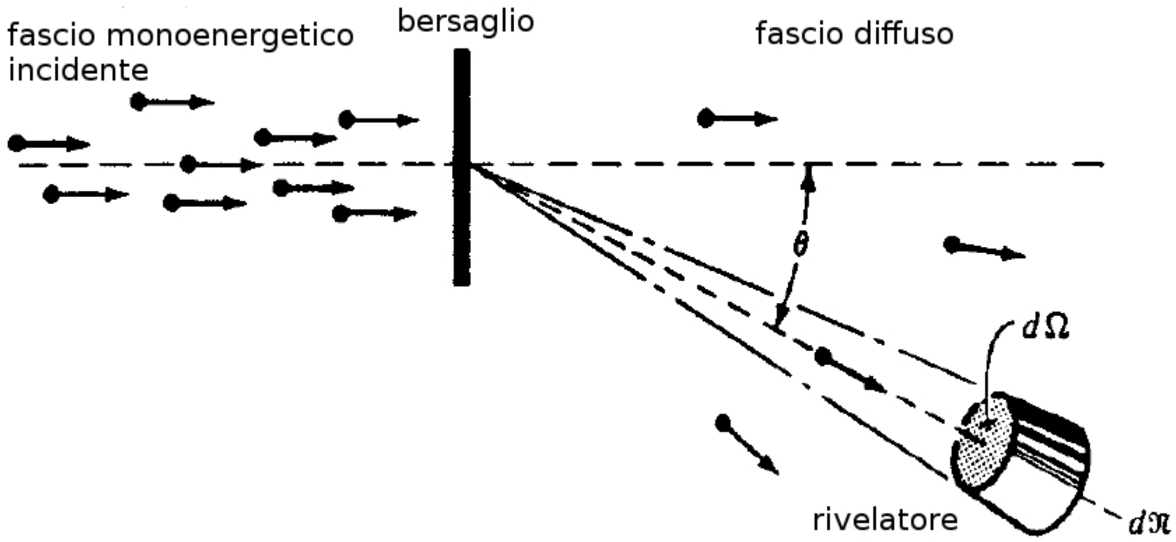
Dal Teorema di König avremo poi

$$E^{(0)} = K' + (½)Mv_C^2 + V^{(i)} = U + K_C \dashrightarrow dE^{(0)} = dU + dK_C = \delta L^{(e)}$$

con $U = K' + V^{(i)}$ detta "energia interna" del sistema (energia propria nel SdR del CM). Il lavoro delle forze esterne può quindi produrre una variazione sia dell'energia cinetica del CM che dell'energia interna.

Fenomeni d'urto

Esaminiamo il problema delle collisioni tra un fascio di particelle di energia nota con quelle di un bersaglio.



Si hanno due possibilità di "**urto**":
Diffusione --> stato finale con stesse particelle dello stato iniziale
Reazione --> stato finale con particelle diverse da stato iniziale

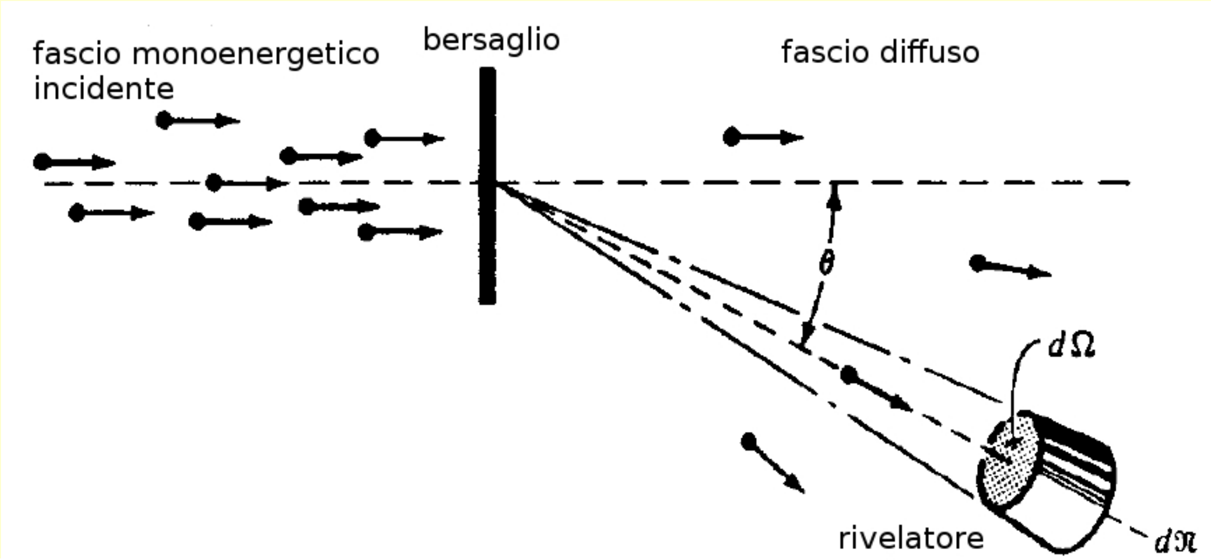
Caratteristica comune ai due casi:
forze agenti fra i due corpi interagenti hanno intensità elevata per un tempo breve (interazione con altre particelle trascurabile) -->

sistema isolato --> conservazione quantità di moto

--> conservazione momento angolare

--> conservazione energia propria

Fenomeni d'urto



sistema isolato

Durata interazione --> $\Delta t = t_f - t_i$

Per gli impulsi delle due particelle avremo

$\underline{J}_1 = \Delta \underline{q}_1 = \Delta \underline{q}_1^{(i)} + \Delta \underline{q}_1^{(e)} = \int_{ti}^{tf} \underline{f}_{1(2)}\, dt + \int_{ti}^{tf} \underline{f}_1^{(e)}\, dt$

$\underline{J}_2 = \Delta \underline{q}_2 = \Delta \underline{q}_2^{(i)} + \Delta \underline{q}_2^{(e)} = \int_{ti}^{tf} \underline{f}_{2(1)}\, dt + \int_{ti}^{tf} \underline{f}_2^{(e)}\, dt$

Se le forze esterne rimangono invariate durante urto e l'urto ha durata breve allora $\int_{ti}^{tf} \underline{f}_1^{(e)}\, dt = \int_{ti}^{tf} \underline{f}_2^{(e)}\, dt = 0$ e si ha

$\Delta \underline{q}_1 = -\Delta \underline{q}_2$ --> $\Delta \underline{Q} = 0$ --> $\underline{Q}(t_i) = \underline{Q}(t_f)$

[ex. urto tra palle biliardo: forze esterne --> gravità, vincoli
forze interne --> forze a contatto]

Analogamente per il momento angolare

$\Delta \underline{p}_{1\Omega} = \int_{ti}^{tf} \underline{M}_1\, dt = \int_{ti}^{tf} \underline{M}_1^{(i)}\, dt + \int_{ti}^{tf} \underline{M}_1^{(e)}\, dt$ ed analoga per $\Delta \underline{p}_{2\Omega}$

Anche in questo caso $\Delta \underline{p}_{1\Omega} = -\Delta \underline{p}_{2\Omega}$ --> $\underline{P}(t_i) = \underline{P}(t_f)$

E infine per l'energia

lavoro forze esterne --> trascurabile rispetto a energia interna a causa della brevità dell'urto
--> conservazione energia

energia cinetica costante --> urto elastico

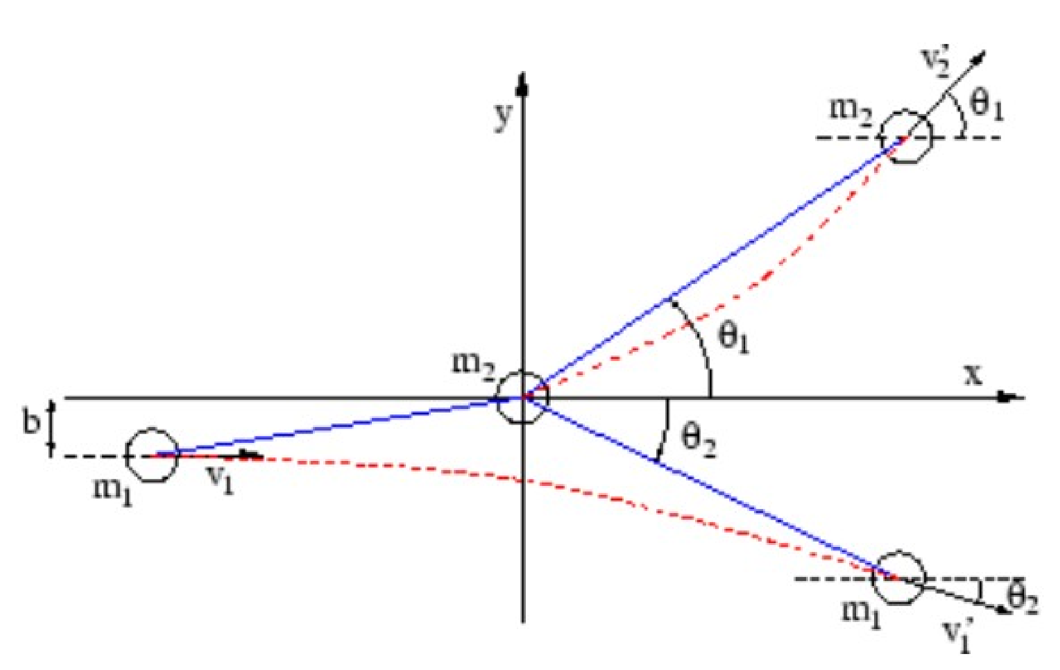
energia cinetica diminuisce --> urto anelastico

Fenomeni d'urto

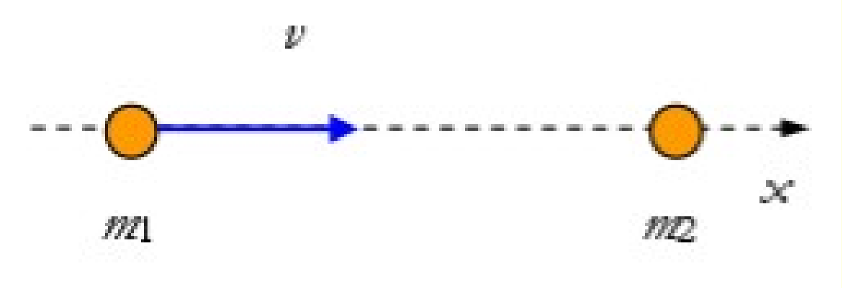
Conservazione $\underline{Q}$ --> $\underline{v}_{CM}$ costante
($\underline{Q} = M\,\underline{v}_{CM}$) --> $K_{CM} = (½)\,M\,v_{CM}^2$ costante
e quindi, essendo $K = K' + K_{CM}$ si ha
urto elastico --> K costante --> K ' costante
urto anelastico --> K diminuisce --> K ' diminuisce

Studio del moto nel **caso elastico**:
1) conservazione $\underline{Q}$ --> 3 equazioni scalari
2) conservazione K --> 1 equazione scalare
con 6 gradi di libertà --> problema non risolvibile

Il problema è risolvibile se è noto lo stato iniziale ed è stata determinata la direzione orientata finale di una particella.



Fenomeni d'urto



Caso elastico semplice --> urto centrale (unidimensionale)

$$(½)\, m_1 v_{1i}^2 + (½)\, m_2 v_{2i}^2 = (½)\, m_1 v_{1f}^2 + (½)\, m_2 v_{2f}^2$$
$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

Note v_{1i} e v_{2i} abbiamo quindi due equazioni in due incognite con soluzioni

$$v_{1f} = [(m_1 - m_2)\, v_{1i} + 2\, m_2 v_{2i}] / (m_1 + m_2)$$
$$v_{2f} = [(m_2 - m_1)\, v_{2i} + 2\, m_1 v_{1i}] / (m_1 + m_2)$$

Se $m_1 = m_2$ --> $v_{1f} = v_{2i}$ --> scambio di velocità

Se $v_{2i} = 0$ --> $v_{1f} = [(m_1 - m_2)\, v_{1i}] / (m_1 + m_2)$

$v_{2f} = [2\, m_1 v_{1i}] / (m_1 + m_2)$

--> $m_1 > m_2$ --> $v_{1f} > 0$

--> $m_1 = m_2$ --> $v_{1f} = 0$

--> $m_1 < m_2$ --> $v_{1f} < 0$

--> $m_1 \ll m_2$ --> $v_{2f} \approx 0$ $v_{1f} = -v_{1i}$

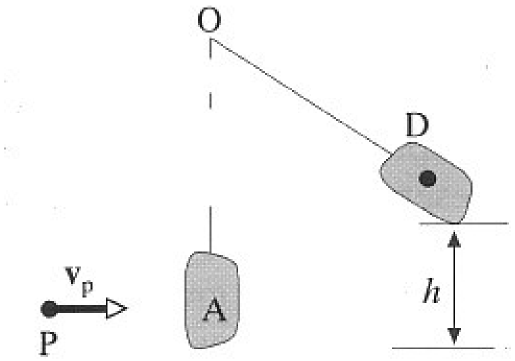
rimbalzo

Fenomeni d'urto

Studio del moto nel caso **completamente anelastico**:

Pendolo balistico (misura velocità di un proiettile)
└> corpo A di massa M attaccato a supporto fisso O tramite corda inestendibile

Proiettile P colpisce corpo A e il sistema P+A entra in rotazione e raggiunge quota h



Subito dopo urto --> P e A sono in quiete relativa ed hanno stessa velocità v_D.

Dalla conservazione del momento angolare

$$\underline{r} \times m\, \underline{v}_P = \underline{r} \times (m+M)\, \underline{v}_D \quad \rightarrow \quad \underline{v}_D = m\, \underline{v}_P / (m+M)$$

Successivamente, dalla conservazione dell'energia si ha

$$(½)\,(m+M)\, v_D^2 = (m+M)\, gh$$

e quindi

$$v_P = (1 + M/m)\sqrt{2gh}$$