Sistemi Rigidi

Sistema rigido

--> **corpo indeformabile** (distanze costanti tra le coppie dei punti materiali costituenti) qualsiasi siano le forze esterne agenti su di esso

--> in realtà tutti I corpi sottoposti a forze si deformano e **quindi** quella del corpo rigido è un'utile **schematizzazione** che ne permette lo studio del moto

--> la **posizione del CM rimane invariata** rispetto a quella dei punti materiali

--> ha **6 gradi di libertà**: una terna di assi cartesiani orto-gonali **S'** solidale con esso sarebbe individuata, rispetto ad un sistema di riferimento fisso **S**, da
- 3 coordinate dell'origine
- 9 coseni direttori ma solo 3 indipendenti per le condizioni di ortonormalità

--> il moto del sistema può essere ricondotto a quello del **moto di una terna cartesiana rispetto all'altra**

Cinematica dei Sistemi Rigidi

Per la velocità di un punto P del sistema rigido avremo

$$\underline{v}(P) = \underline{v}'(P) + \underline{v}_t$$

dove $\underline{v}_t$ è la velocità di trascinamento (velocità in S del punto solidale con S' coincidente ad ogni istante con il punto P).
Ma in S' le velocità $\underline{v}'(P)$ dei punti materiali sono tutte nulle! Quindi

$$\underline{v}(P) = \underline{v}_t = \underline{V}(t) + \underline{\omega}(t) \times [\,\underline{r}(t) - \underline{R}(t)\,]$$

dove $\underline{V}(t) = (d\underline{R}/dt)_S$,

$\underline{r}(t)$ vettore posizione di P in S
$\underline{R}(t)$ vettore posizione dell'origine di S' in S
$\underline{\omega}(t)$ velocità angolare di S' rispetto a S

Per due punti A e B del sistema rigido avremo

$$\underline{v}(B) = \underline{v}(A) + \underline{\omega}(t) \times [\underline{r}(B) - \underline{r}(A)]$$

ed in generale

$$\underline{v} = \underline{v}_{CM} + \underline{\omega}(t) \times [\,\underline{r} - \underline{r}_{CM}\,]$$

dove $\underline{v}_{CM}$ e $\underline{r}_{CM}$ si riferiscono al centro di massa.
Il moto di un qualsiasi punto del sistema rigido può essere ricondotto ad una combinazione di una traslazione e di una rotazione attorno ad un asse.

Traslazione dei Sistemi Rigidi

Nel caso di traslazione del sistema rigido valgono le seguenti relazioni

$$\underline{v} = \underline{v}_{CM}$$

$$\underline{Q} = M\,\underline{v}_{CM} \qquad \text{(valida sempre)}$$

$$\begin{aligned}\underline{P}_{CM} &= \Sigma_i\ (\underline{r}_i - \underline{r}_{CM}) \times \underline{q}_i = \Sigma_i\ (\underline{r}_i - \underline{r}_{CM}) \times m_i\,\underline{v}_i = \\ &= \Sigma_i\ (\underline{r}_i - \underline{r}_{CM}) \times m_i\,\underline{v}_{CM} = \\ &= \Sigma_i\ (m_i\,\underline{r}_i - m_i\,\underline{r}_{CM}) \times \underline{v}_{CM} = 0\end{aligned}$$

$$\underline{P}_\Omega = \underline{P}_{CM} + (\underline{r}_{CM} - \underline{r}_\Omega) \times \underline{Q} = (\underline{r}_{CM} - \underline{r}_\Omega) \times \underline{Q}$$

e per la dinamica

Prima equazione cardinale della dinamica

$$\underline{F}^{(e)} = d\underline{Q}\,/dt = M\,\underline{a}_{CM}$$

Seconda equazione cardinale della dinamica

polo = CM $\qquad \underline{\mathit{M}}_{CM}^{(e)} = d\underline{P}_{CM}/dt = 0$

polo = Ω (fisso, $\underline{v}_\Omega = 0$,
oppure appartenente al sistema rigido, $\underline{v}_\Omega = \underline{v}_{CM}$)

$$\begin{aligned}\underline{\mathit{M}}_\Omega^{(e)} &= d\underline{P}_\Omega/dt = d[\,(\underline{r}_{CM} - \underline{r}_\Omega) \times \underline{Q}\,]/dt = \\ &= (d\underline{r}_{CM}/dt) \times \underline{Q} - (d\underline{r}_\Omega/dt) \times \underline{Q} + (\underline{r}_{CM} - \underline{r}_\Omega) \times d\underline{Q}/dt \\ &= \underline{v}_{CM} \times \underline{Q} - \underline{v}_\Omega \times \underline{Q} + (\underline{r}_{CM} - \underline{r}_\Omega) \times d\underline{Q}/dt \\ &= (\underline{r}_{CM} - \underline{r}_\Omega) \times d\underline{Q}/dt = (\underline{r}_{CM} - \underline{r}_\Omega) \times M\,\underline{a}_{CM}\end{aligned}$$

Rotazione con asse fisso dei Sistemi Rigidi

Scegliamo i due sistemi S e S' con gli assi z e z' coincidenti con l'asse di rotazione ed inoltre O = O'. Con tale scelta nella relazione $\underline{v}(P) = \underline{v}_t = \underline{V}(t) + \underline{\omega}(t) \times [\, \underline{r}(t) - \underline{R}(t)\,]$ si ha $\underline{V}(t) = 0$ e $\underline{R} = 0$ e quindi per ogni punto materiale costituente il sistema

$$\underline{\mathbf{v}}_i = \underline{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{(t)} \times \underline{\mathbf{r}}_i$$

I punti del sistema rigido (e quindi anche il CM), immobili in S', descrivono in S traiettorie circolari con il centro sull'asse di rotazione.

In tal caso valgono le seguenti relazioni

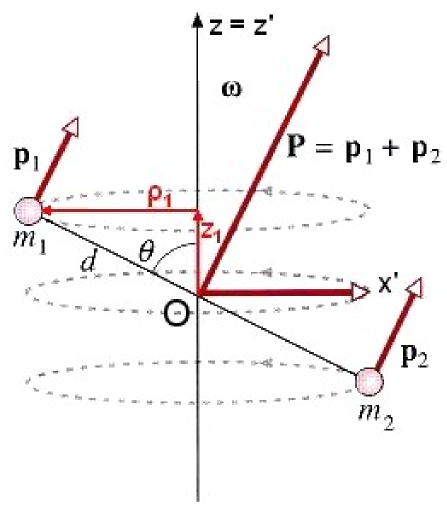
$$\underline{\mathbf{Q}} = \mathbf{M}\, \underline{\mathbf{v}}_{\mathbf{CM}} \neq \mathbf{0}$$ se CM non sta su asse fisso

$$\underline{\mathbf{P}}_{\mathbf{O}} = \Sigma_i\ \underline{\mathbf{r}}_i \times \underline{\mathbf{q}}_i = \Sigma_i\ \underline{\mathbf{r}}_i \times \mathbf{m}_i\, [\, \underline{\boldsymbol{\omega}} \times \underline{\mathbf{r}}_i\,]$$

Potremo scomporre il vettore $\underline{\mathbf{r}}_i$ in un componente lungo l'asse ($\mathbf{z}_i\, \underline{\mathbf{u}}_z$) e in uno perpendicolare all'asse ($\underline{\boldsymbol{\rho}}_i$) e avere

$$\underline{\mathbf{P}}_{\mathbf{O}} = \Sigma_i\ (\mathbf{z}_i\, \underline{\mathbf{u}}_z + \underline{\boldsymbol{\rho}}_i\,) \times \mathbf{m}_i\, [\, \underline{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{z}_i\, \underline{\mathbf{u}}_z + \underline{\boldsymbol{\rho}}_i\,)\,] = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$= -\Sigma_i\ \mathbf{m}_i\, \mathbf{z}_i\, \boldsymbol{\omega}\, \underline{\boldsymbol{\rho}}_i + \Sigma_i\ \mathbf{m}_i\, \boldsymbol{\rho}_i^{\,2}\, \underline{\boldsymbol{\omega}}$$

In generale $\underline{P}_O$ non è quindi parallelo a $\underline{\omega}$ e può essere scomposto in due componenti:



$$\underline{\mathbf{P}}_{//} = \Sigma_i\ \mathbf{m}_i\, \boldsymbol{\rho}_i^{\,2}\, \underline{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{I}\, \underline{\boldsymbol{\omega}}$$

con $\mathbf{I} = \Sigma_i\ \mathbf{m}_i\, \underline{\boldsymbol{\rho}}_i^{\,2}$ momento di inerzia (assiale)

$$\underline{\mathbf{P}}_{\perp} = -\Sigma_i\ \mathbf{m}_i\, \mathbf{z}_i\, \boldsymbol{\omega}\, \underline{\boldsymbol{\rho}}_i$$

Se asse rotazione = asse di simmetria
--> $\underline{\mathbf{P}}_{\perp} = \mathbf{0}$
In caso contario: Sistema rigido -->
--> $\underline{\boldsymbol{\rho}}_i$ ruotano intorno ad asse fisso con velocità angolare $\underline{\boldsymbol{\omega}}$
--> $\underline{\mathbf{P}}_{\perp}$ ruota con vel. angolare $\underline{\boldsymbol{\omega}}$ (precessione intorno all'asse)

Rotazione con asse variabile dei Sistemi Rigidi

Esempio: Rotolamento di una ruota

Come SdR S' scegliamo un SdR con origine nel CM della ruota e assi che si mantengono paralleli a sé stessi.
In S' tutti I punti della ruota si muovono con vel. angolare $\underline{\omega}$.
Ma S' si muove con velocità $\underline{v}_{CM}$ e quindi avremo

$$\underline{v}_i = \underline{v}_{CM} + \underline{\omega} \times (\underline{r}_i - \underline{r}_{CM})$$

Rotolamento puro: la velocità del punto di contatto (istantaneo) P* fra la ruota e la superficie di appoggio è nulla.
In tal caso avremo che

$$0 = \underline{v}_{CM} + \underline{\omega} \times (\underline{r}^* - \underline{r}_{CM}) \dashrightarrow \underline{v}_{CM} = \underline{\omega} \times (\underline{r}_{CM} - \underline{r}^*)$$
$$\dashrightarrow \underline{v}_i = \underline{\omega} \times (\underline{r}_i - \underline{r}^*)$$

ovvero l'espressione di un moto rotatorio, attorno ad un asse // a $\underline{\omega}$ e passante per P*. Tale asse viene detto “asse istantaneo di rotazione”.

Anche in questo caso varranno le relazioni:

$$\underline{Q} = M\,\underline{v}_{CM}$$

$$\underline{P} = \mathrm{I}\,\underline{\omega} + \underline{P}_{\perp}$$

purché $\underline{P}$ sia calcolato rispetto ad un polo giacente sull'asse di rotazione (ovvero P*)

Momento d'inerzia

Definizione: $I = \Sigma_i \, m_i \, \rho_i^{\,2}$ --> Grandezza Scalare Estensiva

Per un sistema continuo $I = \int \rho^2 dm$

Il momento di inerzia ha nelle rotazioni lo stesso ruolo della massa inerziale nelle traslazioni

Teorema di Huygens-Steiner

“Il momento di inerzia I di un corpo di massa M rispetto ad un asse è dato dalla somma di quello rispetto ad un asse parallelo e passante per il centro di massa e del termine Md^2 con d distanza tra gli assi”

$$I = I_{CM} + M d^2$$

Infatti, preso un SdR cartesiano ortogonale con asse z diretto lungo l'asse rispetto al quale si vuol determinare I
e asse x passante per il CM (di coordinata d) e indicando con X,Y e Z le coordinate dei punti in un SdR con origine nel CM avremo

$$I = \Sigma_i \, m_i \, \rho_i^{\,2} = \Sigma_i \, m_i \, (x_i^{\,2} + y_i^{\,2}) = \Sigma_i \, m_i \, [(X_i + d)^2 + Y_i^{\,2}] =$$

$$= \Sigma_i \, m_i \, (X_i^{\,2} + Y_i^{\,2}) + \Sigma_i \, m_i \, d^2 + 2\, d \, \Sigma_i \, m_i \, X_i = I_{CM} + M d^2$$

Nella tabella sono riportati i momenti d'inerzia rispetto al CM in alcune geometrie semplici

Corpo	Dimensione	Asse	Momento Inerzia
Disco	raggio R	⊥ al Disco	$(½)\, M\, R^2$
Disco	raggio R	Diametro	$(¼)\, M\, R^2$
Cilindro retto	raggio R	Asse Cilindro	$(½)\, M\, R^2$
Cilindro retto cavo	raggi Ri e Re	Asse Cilindro	$(½)\, M\, (Ri^2 + Re^2)$
Sfera	raggio R	Diametro	$(2/5)\, M\, R^2$
Asta	lunghezza L	⊥ ad Asta	$(1/12)\, M\, L^2$
Asta rettangolare	lati a, b	⊥ ad Asta	$(1/12)\, M\, (a^2 + b^2)$