DINAMICA DEI FLUIDI

Per descrivere il moto di un fluido sono possibili due diversi approcci

Descrizione lagrangiana

Descrizione del moto di tutte le particelle (atomi o molecole) che costituiscono il fluido tramite la conoscenza di equazioni del tipo

$$\begin{cases} x = x(x_0, y_0, z_0, t) \\ y = y(x_0, y_0, z_0, t) \\ z = z(x_0, y_0, z_0, t) \end{cases}$$

dove x_0, y_0 e z_0 --> posizione della particella all'istante iniziale (valori diversi corrispondono ad altra particella)

A causa dell'elevato numero di particelle tale descrizione risulta proibitiva.

Descrizione euleriana

Descrizione delle grandezze fisiche di interesse "in un certo numero di posizioni" nel fluido. Ad esempio la conoscenza del campo vettoriale di velocità si traduce nella conoscenza della funzione

$$\underline{v} = \underline{v}(x, y, z, t)$$

dove x, y e z sono le coordinate della posizione in cui viene determinato (con un opportuno sensore) il valore della velocità (valori presi ad istanti diversi si riferiscono a particelle diverse)

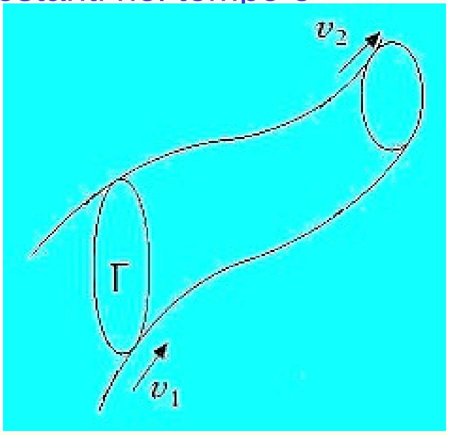
Noto il campo vettoriale di velocità ad un certo istante t_m si possono definire **linee di flusso** quelle linee geometriche per le quali in ogni punto la velocità è tangente alla linea (le linee di flusso non possono quindi intersecarsi).

Se le grandezze che caratterizzano il fluido non dipendono dal tempo, il moto viene detto **stazionario**, in caso contrario **non stazionario**.

Se il moto è stazionario, le linee di flusso restano costanti nel tempo e coincidono con le traiettorie delle particelle

In tali condizioni è utile definire un **tubo di flusso** come la superficie che si ottiene partendo da una linea chiusa Γ, costruendo tutte le linee di flusso che passano per i punti di essa.

Il tubo di flusso divide il fluido in due parti (interna ed esterna) e le particelle interne al tubo non ne escono, quelle esterne non vi entrano.



DINAMICA DEI FLUIDI

Classificazione dinamica dei fluidi

* **viscosi** (attrito interno al fluido): sono caratterizzati da un coefficiente di viscosità η (proporzionale alla forza di attrito) che può variare di diversi ordini di grandezza

Ex.:

η (aria)	=	$1.8 \cdot 10^{-5}$	$N\ m^{-2}\ s$
η (acqua)	=	$1.0 \cdot 10^{-3}$	$N\ m^{-2}\ s$
η (olio di oliva)	=	$8.4 \cdot 10^{-2}$	$N\ m^{-2}\ s$
η (olio lubrificante)	=	1	$N\ m^{-2}\ s$
η (lava fusa)	=	$1 \cdot 10^{3}$	$N\ m^{-2}\ s$
η (vetro)	=	$1 \cdot 10^{12}$	$N\ m^{-2}\ s$

* **non viscosi** (assenza di attrito interno al fluido)

Classificazione del moto

* **moto rotazionale** (vorticoso, rot $\underline{v} \neq 0$, presenza di vortici)

* **moto non rotazionale** (laminare, rot $\underline{v} = 0$, assenza di vortici)

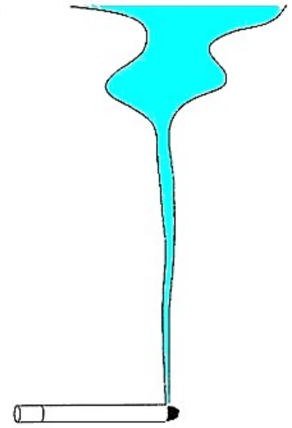
Si passa da un regime all'altro a seconda del valore del **numero di Reynolds**

$$Re = \rho\, v\, l / \eta \quad > \quad (Re)_{crit} \approx 10^{3}$$

dove l è la dimensione della sezione del fluido, trasversale al moto.

Ex.: fumo della sigaretta accesa, che si muove verso l'alto inizialmente con moto non rotazionale (laminare) che diventa rotazionale (vorticoso) quando la sua velocità è tale che

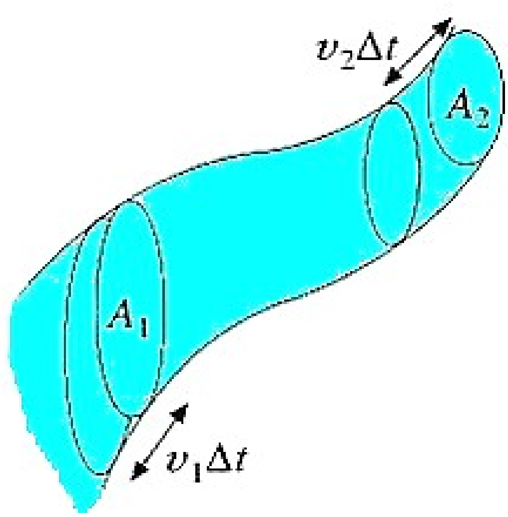
$$Re > (Re)_{crit}$$



Nel seguito tratteremo il caso più semplice, ovvero quello di un **fluido non viscoso in moto stazionario non rotazionale (fluido ideale).**

EQUAZIONE DI CONTINUITA'

Consideriamo un fluido ideale ed individuiamo un tubo di flusso contenente una porzione del fluido, delimitata dal tubo e dalle due basi A_1 e A_2, in moto da sinistra verso destra.
Siano ρ_1 e ρ_2 le densità del fluido in A_1 e A_2 e v_1 e v_2 i moduli delle corrispondenti velocità (costanti purché A_1 e A_2 siano sufficientemente piccole).



In un intervallo di tempo Δt:

fluido in ingresso

$\Delta V_1 = A_1 v_1 \Delta t$ --> $\Delta m_1 = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t$

fluido in uscita

$\Delta V_2 = A_2 v_2 \Delta t$ --> $\Delta m_2 = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t$

Per la conservazione della massa del fluido contenuto nella porzione del tubo si ha

$\Delta m_1 = \Delta m_2$ --> $\boldsymbol{\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2}$ **= costante**

Per un fluido incompressibile ($\rho_1 = \rho_2$, liquido)

$A_1 v_1 = A_2 v_2$ = "portata volumetrica" costante

Applicazioni:

***** restringendo la sezione di uscita di un tubo di gomma si ha un aumento della velocità di uscita del fluido

* riduzione della sezione dell'acqua che esce dal rubinetto man mano che si allontana da esso, aumentando la sua velocità durante la caduta

TEOREMA DI BERNOULLI

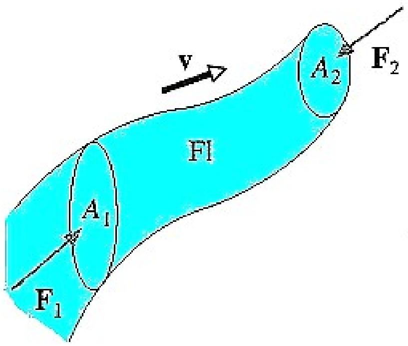
Consideriamo una porzione di un **tubo di flusso di un fluido ideale** e supponiamo che le due basi A_1 e A_2 siano sufficientemente piccole da poter considerare costanti i moduli delle velocità del fluido in ciascun punto di esse

Forze agenti sulla porzione di fluido

- forze di pressione da parte del fluido circostante, perpendicolari alla superficie del tubo in ogni punto (fluido non viscoso)
- forza di gravità

Lavoro

Il lavoro eseguito dalle forze di pressione in un intervallo di tempo Δt è dato da



Lp $= p_1 A_1 v_1 \Delta t - p_2 A_2 v_2 \Delta t =$

$= p_1 \Delta m / \rho - p_2 \Delta m / \rho =$

$\mathbf{= (p_1 - p_2) \Delta m / \rho}$

con $\Delta m = \rho A_1 v_1 \Delta t = \rho A_2 v_2 \Delta t$ massa contenuta nei due volumi $A_1 v_1 \Delta t$ e $A_2 v_2 \Delta t$ (uguali per la conservazione della massa)

Il lavoro eseguito dal campo gravitazionale nell'intervallo di tempo Δt è dato dalla differenza dell'energia potenziale gravitazionale della massa Δm nelle posizioni 1 e 2 e quindi

Lg $\mathbf{= - (h_2 - h_1) \Delta m \, g}$

Dal teorema delle forze vive si ricava infine

$$Lp+Lg = (p_1 - p_2) \Delta m / \rho - (h_2 - h_1) \Delta m \, g = (½) \Delta m \, v_2^2 - (½) \Delta m \, v_1^2$$

Dividendo per Δm si ottiene

$$p_1 / \rho + h_1 {*} g + v_1^2 / 2 = p_2 / \rho + h_2 {*} g + v_2^2 / 2 = \text{costante}$$

Teorema di Bernoulli --> lungo una linea di flusso

$$\mathbf{p / \rho + h {*} g + v^2 / 2 = costante}$$

TEOREMA DI BERNOULLI

Dividendo per g l'espressione del Teorema di Bernoulli si ottiene

$$p / (g\rho) + h + v^2 / (2g) = \text{costante}$$

dove

$p / (g\rho)$ = **altezza piezometrica** (altezza di una colonna di fluido che esercita una pressione p sulla base)

$v^2 / (2g)$ = **altezza cinetica** (altezza di caduta del fluido per avere velocità v all'arrivo)

h = **altezza effettiva**

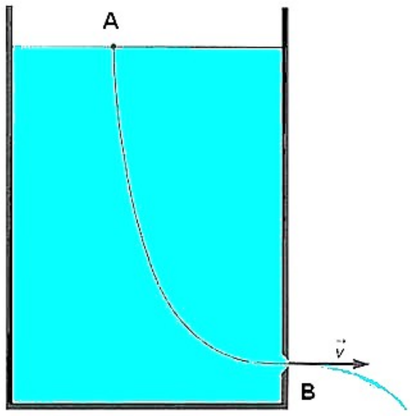
e quindi il Teorema di Bernoulli può essere enunciato come

$$h_{piez} + h_{cin} + h_{eff} = \text{costante}$$

ovvero la somma delle altezze piezometrica, cinetica e effettiva si mantiene costante lungo una linea di flusso

APPLICAZIONI

Recipiente forato



In A (superficie fluido)

$p = p_0 \quad v = 0 \quad h = h_A$

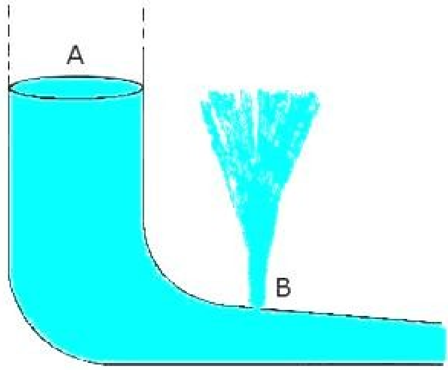
In B (dopo foro uscita)

$p = p_0 \quad v = v_{out} \quad h = 0$

Dal Teorema si ha

$p_0 /(g\rho) + h_A = p_0 /(g\rho) + v^2_{out} /(2g) \quad \text{-->} \quad v_{out} = \sqrt{2gh_A}$

Tubo forato

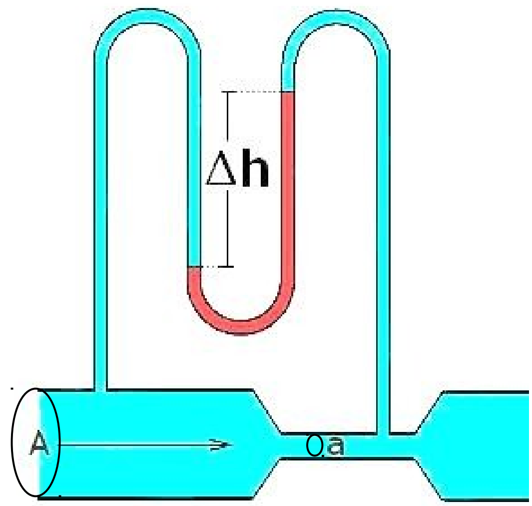


Nei punti A e B si hanno le stesse relazioni dell'esempio precedente ma questa volta la velocità di uscita è verticale e quindi il fluido, dopo essere fuoruscito dal tubo, raggiunge nuovamente l'altezza h_A

TEOREMA DI BERNOULLI

ALTRE APPLICAZIONI

Tubo di Venturi (misura della velocità di un fluido)



Tubo a sezione variabile: **ingresso A**, **uscita a** (< A).
Essendo le due sezioni centrate alla stessa quota, dall'equazione di continuità e dal Teorema di Bernoulli si ricava

$$\begin{cases} A\, v_A = a\, v_a \quad \text{--->} \quad v_a = (A/a)\, v_A \\ p_A/(g\,\rho) + v_A^2/(2\,g) = p_a/(g\,\rho) + v_a^2/(2\,g) \end{cases}$$

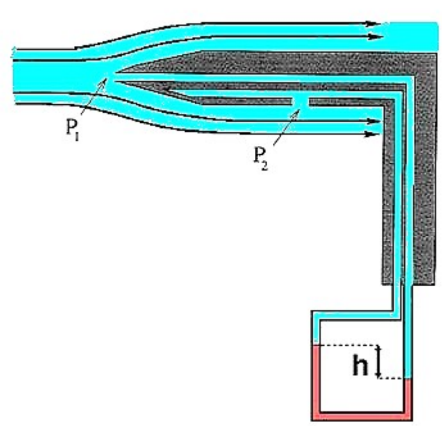
Ma $p_A/(g\,\rho) - p_a/(g\,\rho) = \mathbf{h_a - h_A = \Delta h}$ (differenza di quota del fluido barometrico nei tubi verticali in corrispondenza delle sezioni A e a) e quindi

$$v_A^2 = 2\,g\,a^2\,(h_a - h_A)/(A^2 - a^2) \qquad \text{--->} \qquad \mathbf{v_A = k \sqrt{\Delta h}}$$

Tubo di Pitot (misura della velocità del fluido)

Si basa sulla misura della pressione necessaria per arrestare il moto di un fluido. E' costituito da un tubo a L, il cui tratto orizzontale è immerso nel fluido in moto e l'altro verticale ne emerge. Il fluido che entra nel tubo di Pitot si arresta, mentre il resto del fluido continua il proprio moto. Per il teorema di Bernoulli

$$p_{est}/(g\rho) + v_{est}^2/(2g) = p_{int}/(g\rho)$$



Indicando con h l'altezza del fluido barometrico nel tratto verticale avremo che

$$h = p_{int}/(g\rho) - p_{est}/(g\rho) \quad \text{--->} \quad \mathbf{v_{est} = \sqrt{2gh}}$$

Sul principio di funzionamento del tubo di Pitot si basano gli strumenti di misura della velocità degli aerei rispetto all'aria