

# Misura del modulo dell'accelerazione di gravità $g$ tramite pendolo

**Il valore di  $g$  dipende da:**

- 1) Latitudine terrestre**
- 2) Altezza rispetto al livello del mare**

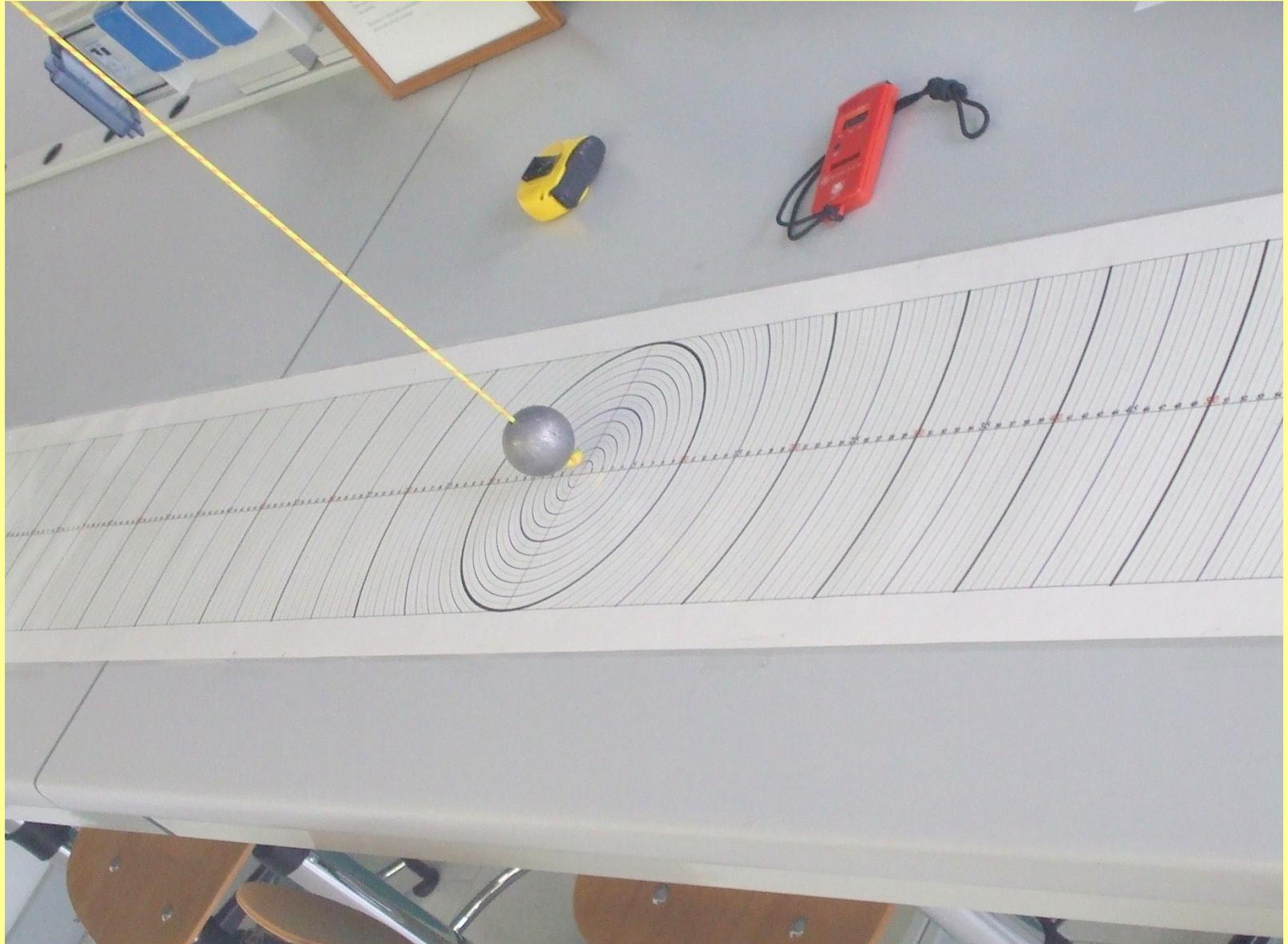
**Ma localmente è una costante!**

**Fino a tempi relativamente recenti, la misura precisa del modulo dell'accelerazione di gravità locale è stata realizzata tramite esperimenti basati sul moto oscillatorio del pendolo.**

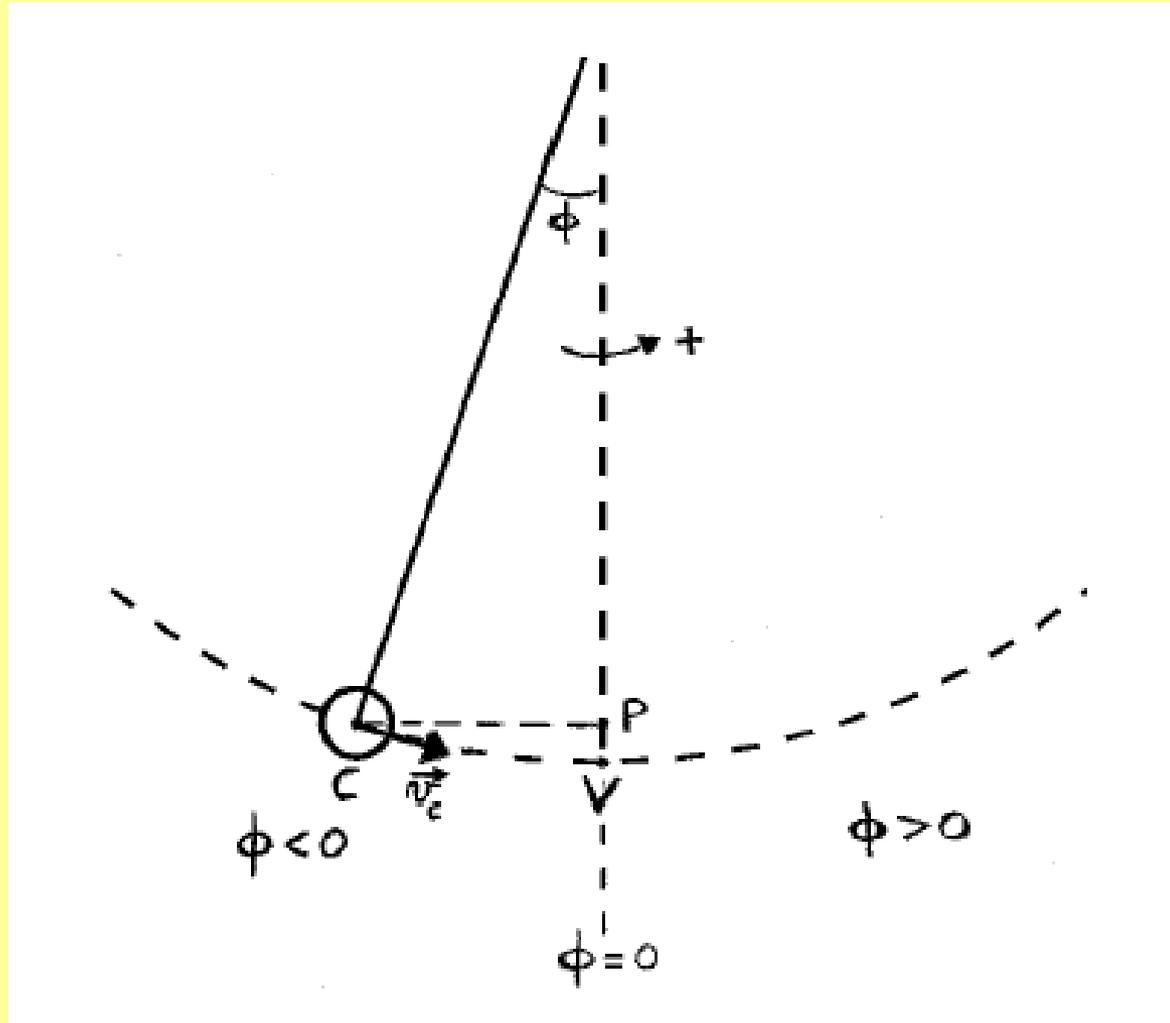


# Apparato Sperimentale

# Apparato Sperimentale



# Schematizzazione del pendolo



# Schematizzazione del pendolo

**Ipotesi semplificative:**

- 1) Filo inestendibile**
- 2) Massa del filo trascurabile rispetto a .....**
- 3) Vincolo ideale nel punto di aggancio**
- 4) Resistenza dell'aria assente**

**In tali ipotesi semplificative la conservazione dell'energia meccanica può essere espressa nella forma:**

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2(t) - \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2(\phi = 0) = mgl(\cos\phi - 1)$$



**Energia cinetica**



**Energia potenziale**

# Schematizzazione del pendolo

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2(t) - \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2(\phi = 0) = mgl(\cos \phi - 1)$$

Derivando la conservazione dell'energia rispetto al tempo si ha:

$$\ddot{\phi} + \left(\frac{g}{l}\right) \sin \phi = 0$$

Equazione differenziale caratteristica di un moto periodico con periodo di oscillazione

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\phi_0}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\phi_0}{2} + o(\sin^4 \frac{\phi_0}{2}) \right) = T_0(l, g)\mathcal{F}(\phi_0)$$

# Schematizzazione del pendolo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\phi_0}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\phi_0}{2} + o(\sin^4 \frac{\phi_0}{2}) \right) = T_0(l, g) \mathcal{F}(\phi_0)$$

Il valore di  $g$  è quindi misurabile indirettamente dalla relazione:

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2} \left( 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\phi_0}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\phi_0}{2} + o(\sin^4 \frac{\phi_0}{2}) \right)^2$$

**Ma .....**

$\phi_0(^{\circ})$	$\phi_0(\text{rad})$	$\sin \phi_0$	$\Delta\%$	$\sin^2(\phi_0/2)/4$	$(9/64) \sin^4(\phi_0/2)$
5	0.0873	0.0872	0.1	$4.76 \times 10^{-4}$	$5.1 \times 10^{-7}$
10	0.1745	0.1736	0.5	$1.90 \times 10^{-3}$	$8.1 \times 10^{-6}$
15	0.2618	0.2588	1.2	$4.26 \times 10^{-3}$	$4.1 \times 10^{-5}$
20	0.3491	0.3420	2.1	$7.54 \times 10^{-3}$	$1.3 \times 10^{-4}$
25	0.4363	0.4226	3.2	$1.17 \times 10^{-2}$	$3.1 \times 10^{-4}$

# Misure

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2} \left( 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\phi_0}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\phi_0}{2} + o(\sin^4 \frac{\phi_0}{2}) \right)^2$$

**Grandezze da misurare:**

- lunghezza del filo  $l \rightarrow$  metro metallico a nastro
- posizione iniziale rilascio  $x_0 \rightarrow$  angolo iniziale  $\phi_0$
- Periodo di oscillazione  $T$

**Le incertezze sulle misure di  $l$  e  $x_0$  sono legate agli errori di lettura delle scale graduate degli strumenti**

**L'incertezza sulla misura di  $T$  dipende principalmente dai tempi di reazione dell'operatore (circa 0.1 s). Ma per questa misura è possibile ridurre drasticamente l'incertezza con un semplice artificio. Quale?**

## Misura precisa di g con il pendolo semplice

Per le notazioni e i simboli si faccia riferimento alle dispense

Indicare sempre le unità di misura nelle caselle con i valori numerici

Gruppo:  Data e ora  Temperatura iniziale e finale

Sperimentatori:

Scopo dell'esperienza, Relazioni funzionali, Ipotesi di validità, Propagazione degli errori (max. 10 righe)

### Misure dirette

Simb.	Significato e strumento utilizzato	Errore di sensibilità
H		
d		
nT		
X <sub>0</sub>		

### Misure indirette

Simb.	Significato	Espressione	Errore assoluto o errore relativo
l			
r			
φ <sub>0</sub>			
T <sub>0</sub>			
g			

Misura di l		H <sub>1</sub>	H <sub>2</sub>	H <sub>3</sub>	H <sub>4</sub>	H <sub>5</sub>	H <sub>6</sub>	H <sub>7</sub>
H <sub>0</sub> ±ΔH <sub>0</sub>		H±ΔH						
		d <sub>1</sub>	d <sub>2</sub>	d <sub>3</sub>	d <sub>4</sub>	d <sub>5</sub>	d <sub>6</sub>	d <sub>7</sub>
		d±Δd						
					Risultato	l±Δl		

# TABULATO

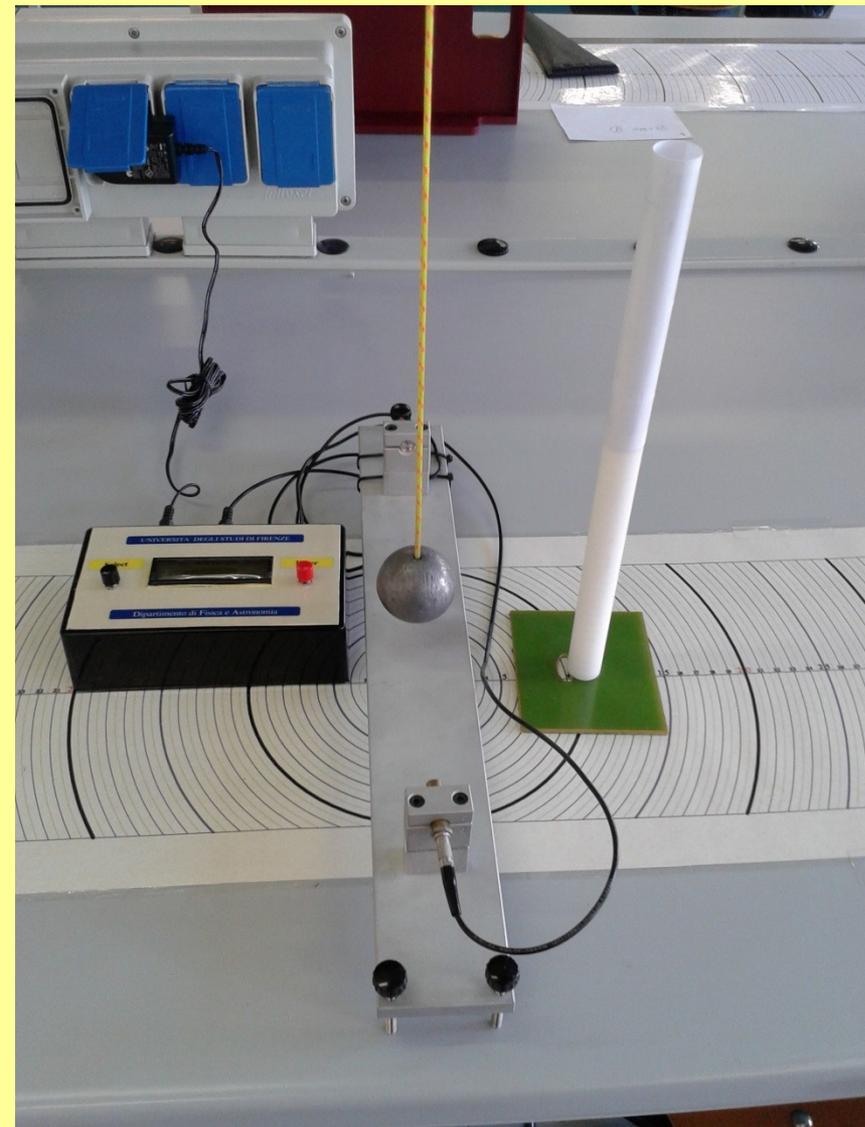
# 1



# ANALISI STATISTICA DEI DATI SPERIMENTALI

Coppia di fotocellule, da posizionare in corrispondenza della verticale di riposo del pendolo, collegate ad un cronometro con errore di sensibilità selezionabile tra

$1 \cdot 10^{-6}$  e  $1 \cdot 10^{-1}$  s.





# ANALISI STATISTICA DEI DATI SPERIMENTALI

- molte sorgenti di errore accidentale
- errori sistematici trascurabili rispetto a accidentali



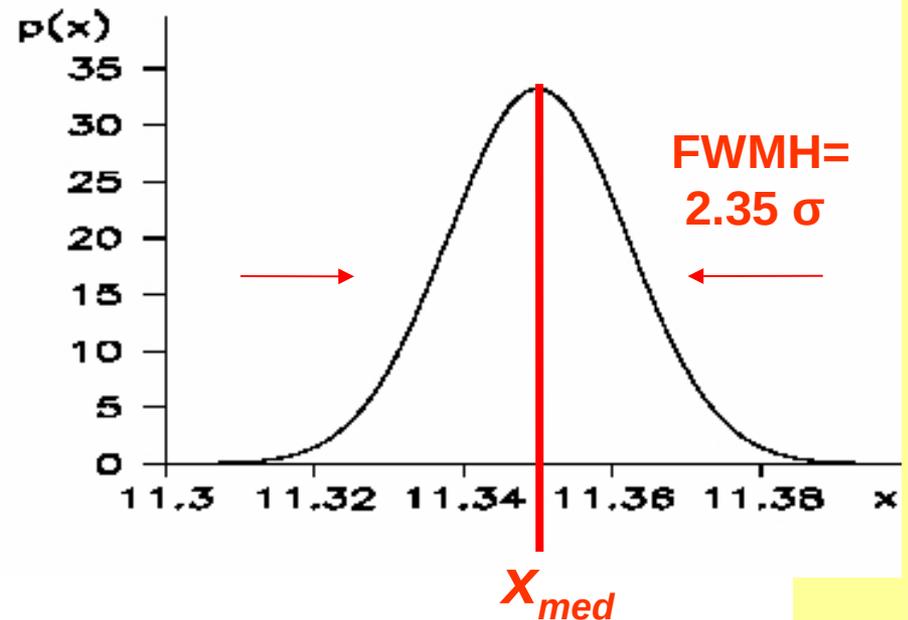
$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}}$$

Detta “distribuzione normale” o “funzione di Gauss”,  
con  $\sigma$  “parametro di larghezza”

# ANALISI STATISTICA DEI DATI SPERIMENTALI

## Funzione di Gauss

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}}$$



Avendo a disposizione un numero finito  $N$  (100) di misure si dimostra che (vedi dispense):

- la miglior stima di  $X$  è la media  $x_{med}$
- la miglior stima di  $\sigma$  è data dalla deviazione standard  $\sigma_x$
- l'istogramma a intervalli sperimentale deve essere confrontato con l'espressione  $N \cdot p(x_i) \cdot \Delta x_i$  con  $x_i$  valore medio e  $\Delta x_i$  larghezza dell'intervallo  $i$ -esimo

# PENDOLO DI TORSIONE

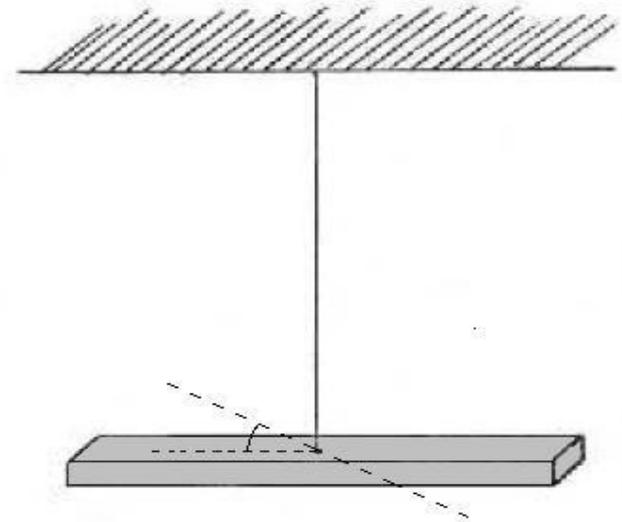
Costituito da un filo che presenta elasticità di torsione ed è sospeso per un estremo ad un sostegno rigido; all'altro estremo è attaccato un **equipaggio mobile (em)**, in modo che il filo coincida con un suo asse permanente di rotazione

Se l'em viene ruotato di un angolo  $\theta$  rispetto alla posizione di equilibrio statico tramite l'applicazione di un momento torcente  $M_t$ , il filo reagisce con un momento di forze diretto lungo l'asse e di modulo

$$\theta = \frac{1}{G} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{L}{r^4} \cdot M_t$$

con **G modulo di scorrimento**, L lunghezza e r raggio del filo. Tale relazione (Legge di Hooke) è valida purché

$$\theta_{in} \leq \frac{L}{r} \cdot \alpha_{max} = \frac{L}{r} \cdot \frac{\sigma_G}{G}$$



# PENDOLO DI TORSIONE

In tabella sono riportati I valori tipici di  $G$  e  $\sigma_G$  per alcuni materiali

Materiale	$G$ (kg <sub>p</sub> /mm <sup>2</sup> )	$\sigma_G$ (kg <sub>p</sub> /mm <sup>2</sup> )
Acciaio	$8 \cdot 10^3$	10
Alluminio	$2.4 \cdot 10^3$	5
Ferro	$8 \cdot 10^3$	8
Ottone	$3.5 \cdot 10^3$	15
Piombo	$0.6 \cdot 10^3$	0.4
Tungsteno	$15 \cdot 10^3$	30

$$\theta_{in} \leq \frac{L}{r} \cdot \alpha_{max} = \frac{L}{r} \cdot \frac{\sigma_G}{G}$$

Lasciato libero il pendolo, questo si muoverà sotto l'effetto della reazione elastica del filo e il moto successivo sarà dato dalla seconda eq. cardinale della dinamica

$$I_{em} \ddot{\theta} = M_e = -c_t \theta$$

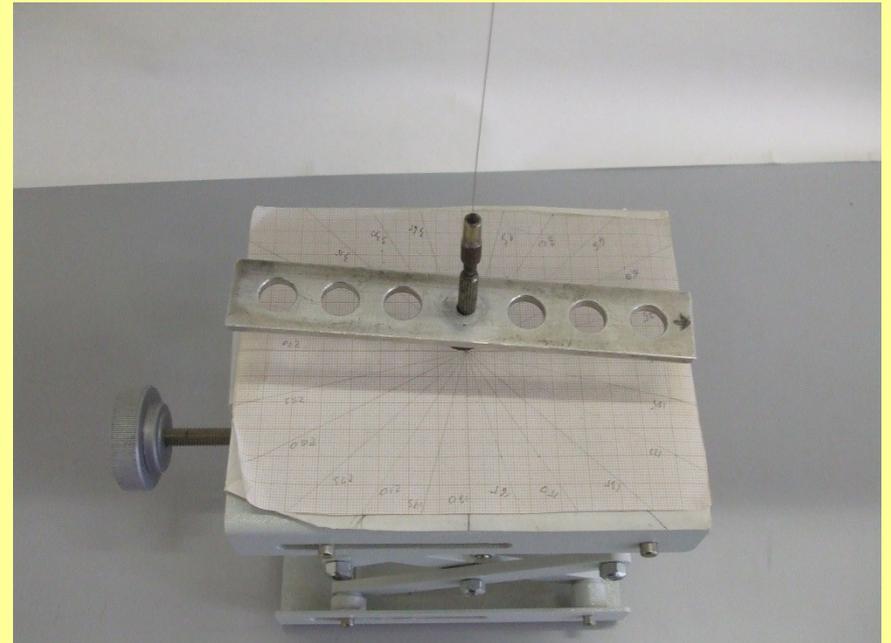
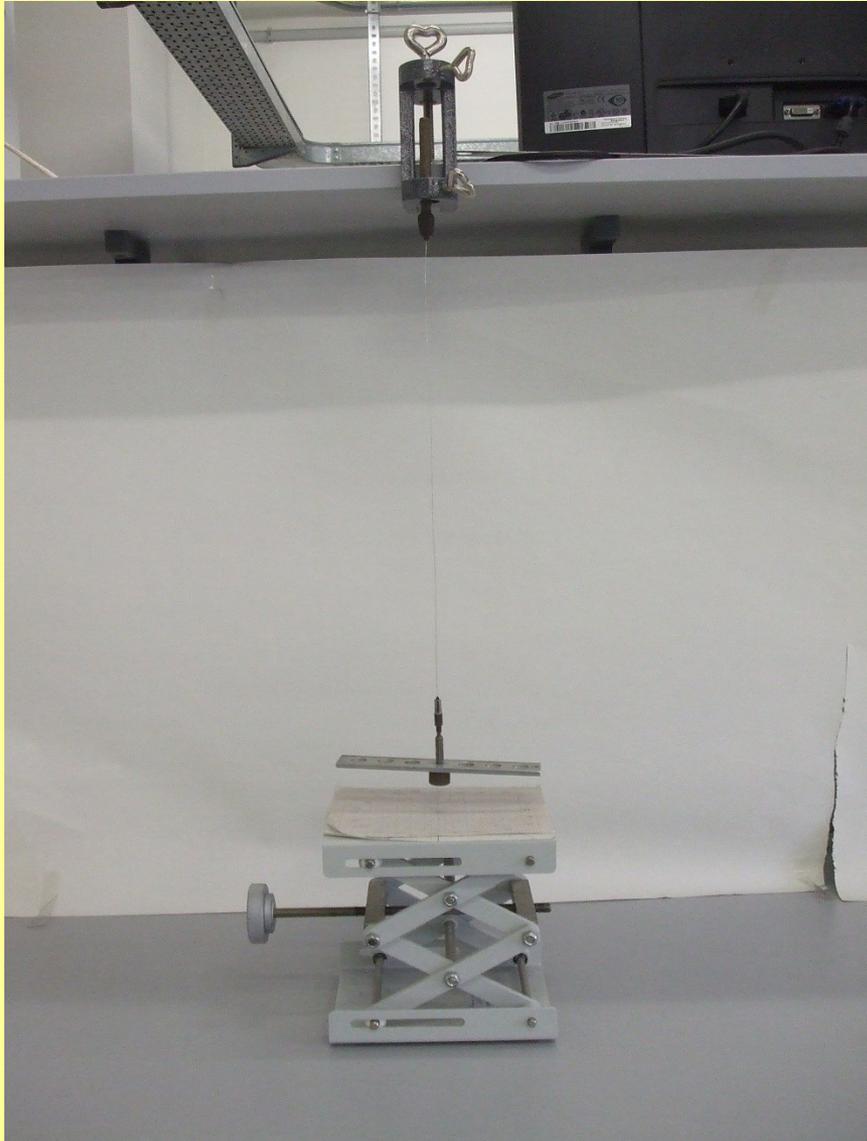
con  $c_t = \frac{\pi}{2} G \frac{r^4}{L}$  costante di torsione del filo.

L'equazione oraria risultante è  $\theta(t) = A \cdot \cos(\omega t + \beta)$

con  $A$  e  $\beta$  dipendenti dalle condizioni iniziali e

$$\omega = \sqrt{c_t / I_{em}} \longrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I_{em}}{c_t}}$$

# Apparato Sperimentale



# PENDOLO DI TORSIONE

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I_{em}}{c_t}}$$

Conoscendo  $I_{em}$ , la misura di  $T$  permetterebbe di ricavare  $c_t$ . Ma  $I_{em}$  non è noto (o è misurabile con molta incertezza). Si possono misurare indirettamente  $I_{em}$  e  $c_t$  realizzando una seconda misura nella quale si aggiunge all'equipaggio un corpo di  $I$  misurabile con precisione (anello) per cui vale

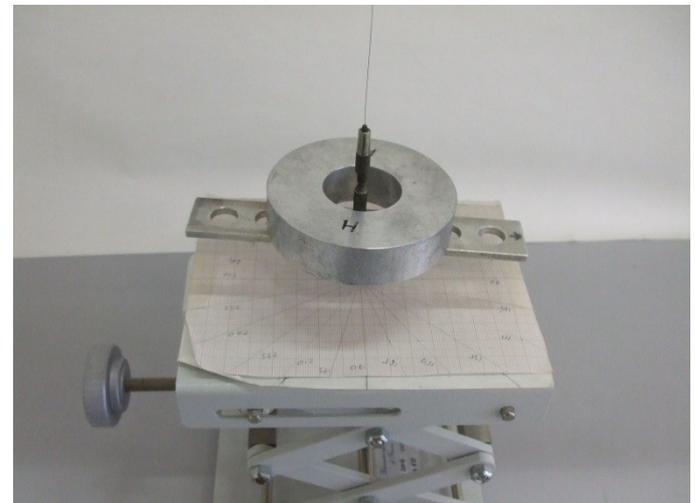
$$I_{an} = \frac{1}{2} \cdot m_{an} \cdot (r_i^2 + r_e^2)$$

Misurato indirettamente  $I_{an}$  e il periodo

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{I_{em} + I_{an}}{c_t}}$$

si ricavano infine

$$c_t = 4\pi^2 \frac{I_{an}}{T_2^2 - T^2} \quad I_{em} = \frac{I_{an} \cdot T^2}{T_2^2 - T^2}$$



# PENDOLO DI TORSIONE

## Misure Dirette

Anello: massa  $m$     diametro interno  $D_i$     diametro esterno  $D_e$

Filo: diametro  $d$     lunghezza  $L$

Periodo di oscillazione:  $T$     solo em  
 $T_2$     em + anello

## Attenzione a:

- 1) non superare  $\theta_{\max}$
- 2) iniziare e concludere le misure degli intervalli di tempo in condizioni di massima velocità angolare dell'equipaggio mobile
- 3) posizionare l'anello sull'equipaggio mobile in modo che il filo coincida con un asse permanente di rotazione del sistema complessivo

## Misure con pendolo di torsione

Per le notazioni e i simboli si faccia riferimento alle dispense

Indicare sempre le unità di misura nelle caselle con i valori numerici

Gruppo:

Data e ora

Sperimentatori:

Scopo dell'esperienza, Relazioni funzionali, Ipotesi di validità, Propagazione degli errori (max. 10 righe)


### Misure dirette

Simb.	Significato e strumento utilizzato	Errore di sensibilità
$d_f$		
$L_f$		
$T$		
$T_2$		
$m_A$		
$D_i$		
$D_e$		

### Misure indirette

Simb.	Significato	Espressione	Errore assoluto o errore relativo
$I_{an}$			
$I_{em}$			
$c_t$			
$G$			

### Misure geometriche

						Valore Finale	Incertezza	u.d.m.
$d_f$								
$L_f$								
$D_i$								
$D_e$								

# TABULATO

# 1

**Rotazione iniziale dell'equipaggio mobile**

$\phi_{MAE}$			
$\phi_0$		$\Delta\phi_0$	

**Misure degli intervalli di tempo**

n. 

--

**Presi dati**

$nT_1$								
$nT_2$								

**Analisi dati**

	$(nT \pm \Delta nT)$	$(T \pm \Delta T)$
$T_1$		
$T_2$		

**Misure indirette**

	Valore finale	Incertezza	Unità di misura
$I_{an}$			
$I_{em}$			
$c_t$			
$G$			

**Commenti finali all'esperienza**

--

**Parte opzionale: Studio dello smorzamento del moto**

$\phi_0(n=0)$	$\phi_0(n=5)$	$\phi_0(n=10)$	$\phi_0(n=15)$	$\phi_0(n=20)$	$\phi_0(n=25)$

Riportare in grafico su carta millimetrata  $\phi_0(n)$  in funzione di n e commentare i risultati sul grafico

# TABULATO 2