

Probabilità in esperimenti casuali

Esperimento casuale: dà un risultato diverso, non prevedibile, ad ogni misura

Variabile casuale: risultato dell'esperimento casuale

Probabilità $P(\varepsilon)$ di un evento casuale ε :

N misure, n_ε volte si verifica l'evento $\varepsilon \rightarrow P(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} (n_\varepsilon / N)$

Alcune proprietà della probabilità:

1) $P(S) = 1$ se S è l'insieme di tutti gli eventi possibili

2) Se A e B sono due sottinsiemi di S definiamo $P(AB)$ la probabilità che si verifichino contemporaneamente A e B , ovvero che l'evento ε appartenga sia ad A che a B .
Definiamo A e B mutuamente disgiunti se $P(AB) = 0$ [ex: diversi risultati lancio dado]

3) Se A e B sono mutuamente disgiunti, la probabilità che il risultato dell'esperimento appartenga ad A o a B $P(A+B) = P(A)+P(B)$ [ex: Probabilità di avere 1 o 2 nel lancio del dado]

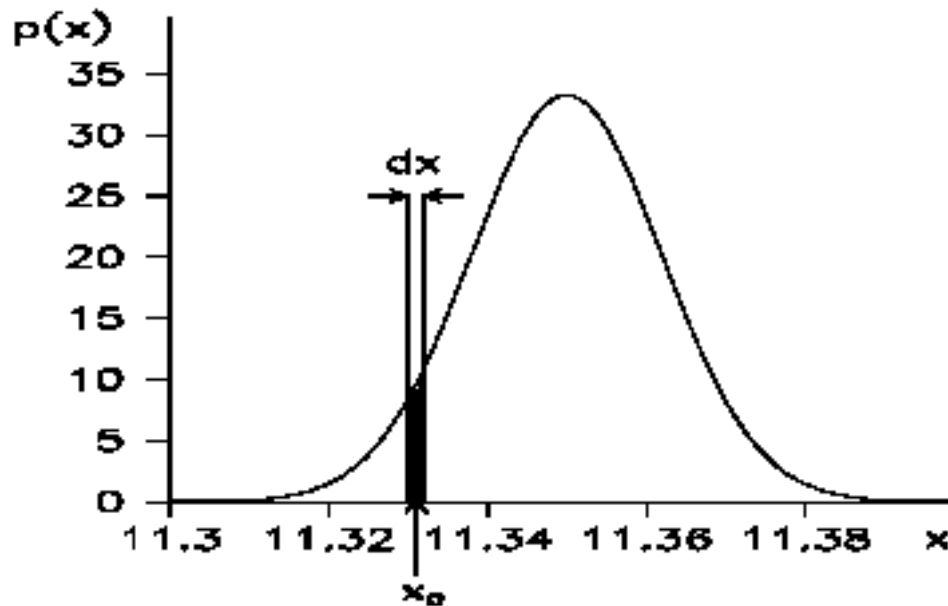
4) Probabilità condizionale $P(A|B) = P(AB)/P(B)$ ovvero la probabilità che si verifichi A negli eventi per cui si conosce già che è verificato B [ex.: in un lancio del dado, B risultato pari, A risultato minore di 4 $\rightarrow P(A|B) = (1/6)/(1/2) = (1/3)$]

5) Definizione di indipendenza: gli eventi A e B sono mutuamente indipendenti se e solo se $P(A|B)=P(A)$, da cui segue che $P(AB)=P(A)*P(B)$

Trattazione statistica dei dati

Dalla statistica matematica → **“funzione limite”** $p(x)$ = rappresentazione nel caso di un numero infinito di eventi

$p(x)$ = **“densità di probabilità”** → $p(x_i) \cdot dx$ = probabilità che una singola misura dia un risultato tra x_i e $x_i + dx$



Nel caso siano presenti molte sorgenti di errore accidentale (ognuna delle quali dà un piccolo contributo) la funzione limite prende il nome di **“distribuzione normale”** o **“funzione di Gauss”** e assume la forma:

$$p(x) = K e^{-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}}$$

K è il fattore di normalizzazione

σ parametro di larghezza

Trattazione statistica dei dati

Distribuzione normale o funzione di Gauss

$$p(x) = K e^{-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} K e^{-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}} dx = 1 \quad \rightarrow \quad K = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma}$$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}}$$

$$p_{X,\sigma}(x)$$

$p_{X,\sigma}(x) \geq 0$ per ogni x

$$\begin{array}{lll} p'_{X,\sigma}(x) = 0 & \Rightarrow & x = X \\ & \Rightarrow & x \rightarrow \pm\infty \\ & \Rightarrow & p_{X,\sigma}(x) \rightarrow 0 \\ & \Rightarrow & p_{X,\sigma}(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \\ & \Rightarrow & p''_{X,\sigma}(X) < 0 \end{array}$$

$$p_{X,\sigma}(x_{1/2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x_{1/2}-X)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \quad \rightarrow \quad (x_{1/2} - X) = \pm 1.18 \sigma$$

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_{X,\sigma}(x) dx = X$$

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - X)^2 p_{X,\sigma}(x) dx = \sigma^2$$

Valori di aspettazione

Trattazione statistica dei dati

Distribuzione normale o funzione di Gauss

probabilità $P(X, \sigma)$ che una singola misura dia un risultato tra $X - \sigma$ e $X + \sigma$

$$P(X, \sigma) = \int_{X-\sigma}^{X+\sigma} p_{X,\sigma}(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_{X-\sigma}^{X+\sigma} e^{-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$P(X, t\sigma) = \int_{X-t\sigma}^{X+t\sigma} p_{X,\sigma}(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_{X-t\sigma}^{X+t\sigma} e^{-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^{+t} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

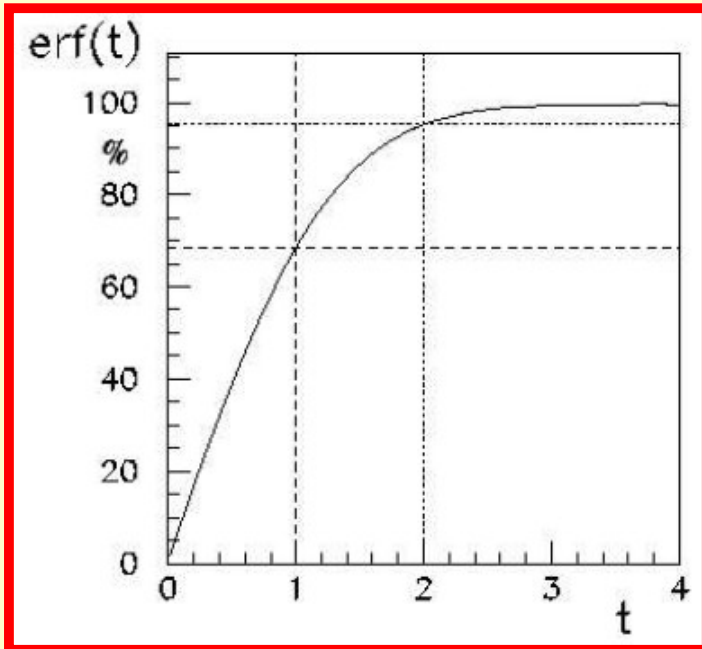
$$z = (x - X)/\sigma$$

funzione degli errori

$\text{erf}(t)$

Trattazione statistica dei dati

Funzione degli errori



t	0.00	0.02	0.04	0.06	0.08
0.0	0.00	1.60	3.19	4.78	6.38
0.1	7.97	9.55	11.13	12.71	14.28
0.2	15.85	17.41	18.97	20.51	22.05
0.3	23.58	25.10	26.61	28.12	29.61
0.4	31.08	32.55	34.01	35.45	36.88
0.5	38.29	39.69	41.08	42.25	43.81
0.6	45.15	46.47	47.78	49.07	50.35
0.7	51.61	52.85	54.07	55.27	56.46
0.8	57.63	58.78	59.91	61.02	62.11
0.9	63.19	64.24	65.28	66.29	67.29
1.0	68.27	69.23	70.17	71.09	71.99
1.1	72.87	73.73	74.57	75.40	76.20
1.2	76.99	77.75	78.50	79.23	79.95
1.3	80.64	81.32	81.98	82.62	83.24
1.4	83.85	84.44	85.01	85.57	86.11
1.5	86.64	87.15	87.64	88.12	88.59
1.6	89.04	89.48	89.90	90.31	90.70
1.7	91.09	91.46	91.81	92.16	92.49
1.8	92.81	93.12	93.42	93.71	93.99
1.9	94.26	94.51	94.76	95.00	95.23
2.0	95.45	95.66	95.86	96.06	96.25
2.1	96.43	96.60	96.76	96.92	97.07
2.2	97.22	97.36	97.49	97.62	97.74
2.3	97.86	97.97	98.07	98.17	98.27
2.4	98.36	98.45	98.53	98.61	98.69
2.5	98.76	98.83	98.89	98.95	99.01
2.6	99.07	99.12	99.17	99.22	99.26
2.7	99.31	99.35	99.39	99.42	99.46
2.8	99.49	99.52	99.55	99.58	99.60
2.9	99.63	99.65	99.67	99.69	99.71

Trattazione statistica dei dati

Miglior stima del valore “vero” e del parametro di larghezza della funzione di Gauss

Lo sperimentatore non avrà mai la conoscenza esatta della densità di probabilità delle variabili su cui opera (il che richiederebbe un numero infinito di misure).

Lo sperimentatore ha a disposizione solo un campione di ampiezza N di dati misurati x_1, x_2, \dots, x_N



Potrà quindi dare solo una stima approssimata dei parametri della distribuzione

Per stimare dal campione di dati un parametro della distribuzione si dovrà applicare al campione una funzione, che chiameremo **stimatore del parametro**. Tale stimatore, essendo una funzione di variabile casuale, sarà a sua volta una variabile casuale con una sua distribuzione.

Perché una funzione del campione $s(x_1, x_2, \dots, x_N)$ possa essere considerata uno stimatore valido deve soddisfare alle seguenti proprietà:

- 1) **assenza di polarizzazione**: uno stimatore di un parametro z si dice non polarizzato se il suo valore di aspettazione coincide con z per qualsiasi valore di N (asintoticamente non polarizzato se tale coincidenza vale solo per $N \rightarrow \infty$)
- 2) **consistenza**: si chiede che lo stimatore individui, al crescere di N , il parametro cercato con sempre maggiore precisione (distribuzione dello stimatore sempre più stretta all'aumentare di N)

Trattazione statistica dei dati

Miglior stima del valore “vero” e del parametro di larghezza della funzione di Gauss

Qual'è la miglior stima di X e σ ottenibile con N dati misurati x_1, x_2, \dots, x_N ????

Probabilità di ottenere una misura tra x_1 e x_1+dx

$$P(x_1, x_1 + dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x_1-X)^2}{2\sigma^2}} dx \propto \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{(x_1-X)^2}{2\sigma^2}}$$

Probabilità di ottenere una misura tra x_2 e x_2+dx

$$P(x_2, x_2 + dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x_2-X)^2}{2\sigma^2}} dx \propto \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{(x_2-X)^2}{2\sigma^2}}$$

Probabilità di ottenere la serie di valori x_1, x_2, \dots, x_N

$$P(x_1, \dots, x_N) = P(x_1, x_1 + dx) P(x_2, x_2 + dx) \dots P(x_N, x_N + dx) \propto \frac{1}{\sigma^N} e^{-\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - X)^2}{2\sigma^2}}$$

principio di massima verosimiglianza

Avendo realizzato una serie di N misure della grandezza ed avendo ottenuto i valori x_1, x_2, \dots, x_N , la probabilità di ottenere tale serie di valori deve essere massima (e quindi le migliori stime di X e σ sono quelle che la rendono massima)

$$\text{Miglior stima di } X \rightarrow (\partial P / \partial X) = 0 \rightarrow \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - X)^2}{2\sigma^2} = \text{minimo} \Rightarrow \frac{\partial \sum_{i=1}^N (x_i - X)^2}{\partial X} = 0 \Rightarrow X = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} = \bar{x}$$

$$\text{Miglior stima di } \sigma \rightarrow (\partial P / \partial \sigma) = 0 \rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - X)^2}{N}} \rightarrow \dots \rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1}} = \sigma_x$$