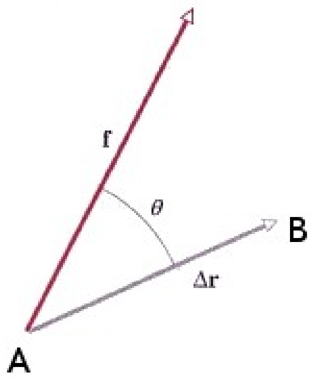
Lavoro ed Energia

Lavoro di una forza

1) forza f indipendente dal punto di applicazione e dal tempo.
Se il suo punto di applicazione effettua uno spostamento $\underline{AB}$,
si definisce “**lavoro della forza $\underline{f}$** ”



$$L_{AB} = \underline{f} \bullet \underline{AB} = \underline{f} \bullet (\underline{r}_B - \underline{r}_A) =$$
$$= \underline{f} \bullet \Delta\underline{r} = f\,\Delta r \cos\theta$$

Se $\theta < \pi/2$ --> $L_{AB} > 0$ --> “**lavoro motore**”
Se $\theta > \pi/2$ --> $L_{AB} < 0$ --> “**lavoro resistente**”

2) forza f dipendente dal punto di applicazione
Si suddivide lo spostamento del punto di applicazione $\Delta\underline{r}$ nella somma di spostamenti $\Delta\underline{r}_i$ sufficientemente piccoli da considerare $\underline{f}$ costante e si ha $L \approx \Sigma_i\, \underline{f}(\underline{r}_i) \bullet \Delta\underline{r}_i$
Il valore del lavoro è ottenuto calcolando il limite di tale espressione per $\Delta\underline{r}_i$ (finiti) -> $d\underline{r}$ (infinitesimi), definendo il **lavoro elementare** $\delta L = \underline{f} \bullet d\underline{r} = f_x dx + f_y dy + f_z dz$
e ottenendo, lungo la traiettoria α

$$L_{AB} = {}_\alpha\int_A^B \delta L = {}_\alpha\int_A^B \underline{f} \bullet d\underline{r} = {}_\alpha\int_{X_A}^{X_B} f_x dx + {}_\alpha\int_{Y_A}^{Y_B} f_y dy + {}_\alpha\int_{Z_A}^{Z_B} f_z dz$$

L_{AB} dipende in genere, oltre che da A e B, dalla particolare traiettoria *α* seguita. Se L_{AB} è indipendente da *α* la forza $\underline{f}$ viene detta “**conservativa**”

Principio di indipendenza delle azioni simultanee

Se più forze $\underline{f}_i$ agiscono su un punto materiale, il lavoro della forza risultante $\underline{f}$ è uguale alla somma dei lavori $L_{AB\,i}$ delle singole forze

$$L_{AB} = {}_\alpha\int_A^B \underline{f} \bullet d\underline{r} = {}_\alpha\int_A^B \Sigma_i\, \underline{f}_i \bullet d\underline{r} = \Sigma_i\, {}_\alpha\int_A^B \underline{f}_i \bullet d\underline{r} = \Sigma_i\, L_{AB\,i}$$

Forze conservative

Se il lavoro delle forze agenti sul punto materiale lungo un percorso dipende solo dagli estremi del percorso le forze vengono dette “**conservative**”. Perché ciò accada è necessario e sufficiente che esista **una funzione scalare della sola posizione V($\underline{r}$)** tale che sia verificata la relazione

$$\delta L = -\,dV \quad \text{-->} \quad L_{AB} = {}_{\alpha}\!\int_A^B \delta L = -\,{}_{\alpha}\!\int_A^B dV = V_A - V_B = -\,\Delta V$$

In tal caso il lavoro elementare è un “differenziale esatto”. La grandezza V($\underline{r}$) prende il nome di “**energia potenziale**” ed è definita a meno di una costante additiva arbitraria.

Se esiste l'energia potenziale V($\underline{r}$), potremo scrivere

$$\boldsymbol{\delta L} = f_x dx + f_y dy + f_z dz = \mathbf{-dV} = -\,(\partial V/\partial x)dx - (\partial V/\partial y)dy - (\partial V/\partial z)dz$$

$$\rightarrow\ \underline{f} = -\,\mathrm{grad}\ V(x,y,z) = -\,\underline{\nabla} V(x,y,z)$$

con l'operatore vettoriale $\underline{\nabla}$ (**nabla**) definito da

$$\underline{\nabla} = (\partial/\partial x,\ \partial/\partial y,\ \partial/\partial z)$$

Potremo inoltre definire il vettore “**rotore di $\underline{f}$** ” tramite

$$\mathrm{rot}\ \underline{f} = \underline{\nabla} \times \underline{f} = \begin{vmatrix} \underline{u}_x & \underline{u}_y & \underline{u}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} =$$

$$= (\partial f_z/\partial y - \partial f_y/\partial z)\underline{u}_x + (\partial f_x/\partial z - \partial f_z/\partial x)\underline{u}_y + (\partial f_y/\partial x - \partial f_x/\partial y)\underline{u}_z$$

Se l’insieme di definizione di f è semplicemente connesso (ovvero senza buchi o composto di pezzi non separati) e $\underline{f}$ è una forza conservativa --> **rot $\underline{f}$ = $\underline{\nabla}$ x $\underline{f}$ = $\underline{\nabla}$ x (- $\underline{\nabla}$V) = 0**

[poiché $\partial f_z/\partial y = \partial f_y/\partial z$, $\partial f_x/\partial z = \partial f_z/\partial x$, $\partial f_y/\partial x = \partial f_x/\partial y$ ovvero $\partial^2 V/\partial y\partial z = \partial^2 V/\partial z\partial y$, $\partial^2 V/\partial z\partial x = \partial^2 V/\partial x\partial z$, $\partial^2 V/\partial x\partial y = \partial^2 V/\partial y\partial x$ è condizione sempre verificata]

Esempi di forze (campi) conservative

1) **Forza peso**

► campo uniforme ($\underline{f}$ indipendente da $\underline{r}$)
-> **conservativo** in quanto derivate del rotore tutte nulle

► scelto un SdR cartesiano con asse z verso l'alto si ha
-> $\mathbf{\underline{f} = (0, 0, -mg)}$

► $\delta L = \underline{f} \bullet d\underline{r} = - mg\, dz$ -> $L_{AB} = {}_{\alpha}\int_A^B \delta L = mg(z_A - z_B) = -\Delta V$
-> $\mathbf{V = mgz}$ (avendo scelto V=0 per z=0)

2) **Forza elastica (molla ideale)**

► campo dipendente linearmente da una coordinata
-> **conservativo** in quanto derivate del rotore tutte nulle

► scelto un SdR cartesiano con asse x lungo la molla e origine nella posizione della molla non deformata
-> $\mathbf{\underline{f} = (-kx , 0, 0)}$

► $\delta L = \underline{f} \bullet d\underline{r} = -kx\, dx$ -> $L_{AB} = {}_{\alpha}\int_A^B \delta L = (k/2)(x_A^2 - x_B^2) = -\Delta V$
-> $\mathbf{V = (½)\, kx^2}$ (avendo scelto V=0 per x=0)

3) **Forza centrale a simmetria sferica**

► forza f agente su punto materiale P e diretta sempre verso un punto O (che sceglieremo come origine del SdR)
$\mathbf{\underline{f} = f(r)\, \underline{u}_r}$

► $\delta L = \underline{f} \bullet d\underline{r} = f(r)\, \underline{u}_r \bullet (dr\, \underline{u}_r + r\, d\underline{u}_r) = f(r)\, dr = - dV(r)$
-> $\mathbf{f(r) = - dV(r) / dr}$
campo conservativo purché f(r) ammetta una primitiva V(r) (condizione normalmente soddisfatta)

► attrazione gravitazionale:
-> forza agente tra due punti materiali di massa m_1 e m_2 posti a distanza r
$\mathbf{\underline{f} = - (G\, m_1\, m_2 / r^2)\, \underline{u}_r = f(r)\, \underline{u}_r}$
-> $\mathbf{V(r) = - G\, m_1\, m_2 / r}$ avendo scelto V(r) = 0 per r = ∞
con $G = 6.67\ 10^{-11}\ Nm^2 / kg^2$