Esempi di forze (campi) conservative

4) **Forza centrifuga**

► in un SdR non inerziale rotante con velocità angolare $\underline{\omega} = \omega\, \underline{u}_z$ rispetto ad un SdR inerziale, una massa m posta a distanza ρ dall'asse di rotazione subisce una forza fittizia centrifuga

$$\underline{f} = m\,\omega^2 \rho\, \underline{u}_\rho = f(\rho)\, \underline{u}_\rho$$

con $\underline{u}_\rho$ versore radiale in coordinate cilindriche.

La posizione del punto P in tale SdR è data da
$\underline{r} = \rho\, \underline{u}_\rho + z\, \underline{u}_z$ --> $d\underline{r} = d\rho\, \underline{u}_\rho + \rho\, d\underline{u}_\rho + dz\, \underline{u}_z$ e quindi

► $\delta L = \underline{f} \bullet d\underline{r} = f(\rho)\, \underline{u}_\rho \bullet (d\rho\, \underline{u}_\rho + \rho\, d\underline{u}_\rho + dz\, \underline{u}_z) = f(\rho)\, d\rho$

► $L_{AB} = {}_{\alpha}\int_A^B \delta L = -(m\omega^2/2)(\rho_A^{\,2} - \rho_B^{\,2}) = -\Delta V$

► $\mathbf{V(\rho) = -(½)\, m\omega^2\rho^2}$ avendo scelto V(ρ) = 0 per ρ = 0

Esempi di forze (campi) conservative

5) **Considerazioni finali**

Nei campi di forze conservativi è spesso utile individuare il luogo geometrico dei punti in cui l'energia potenziale assume lo stesso valore. Tale luogo è generalmente una superficie (detta “equipotenziale”)

Superficie equipotenziale --> V = costante

--> $\delta L = 0$ per spostamenti sulla superficie

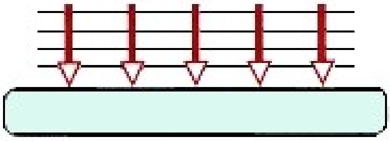
--> $\underline{f}$ è $\perp$ alla superficie in ogni suo punto

Si usa spesso rappresentare un campo di forze disegnando le superfici equipotenziali per valori di V equispaziati da un certo ΔV. In tale rappresentazione avremo per $\underline{f}$ (P):

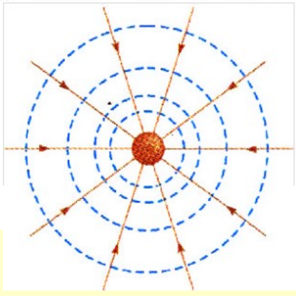
--> verso puntante alla superficie contigua di energia potenziale inferiore (segno – nella relazione tra δL e ΔV)

--> modulo tanto maggiore quanto più vicine sono in P le superfici equipotenziali corrispondenti ad un dato ΔV

forza peso →



forza gravitazionale →



Esempi di forze (campi) non conservative

1) **Attrito radente dinamico**

► $\underline{R}_t = -\mu_d\ R_n\ \underline{u}_v$ con $\underline{u}_v$ versore della velocità

► $L_{AB} = {}_\alpha\int_A^B \delta L = {}_\alpha\int_A^B \underline{R}_t \cdot d\underline{r} = {}_\alpha\int_A^B -\mu_d R_n \underline{u}_v \cdot d\underline{r}$

$= -\mu_d\ R_n\ {}_\alpha\int_A^B \underline{u}_v \cdot d\underline{r}$

ma $d\underline{r} = \underline{v}\, dt = v\, \underline{u}_v\, dt$ --> $\underline{u}_v \cdot d\underline{r} = \underline{u}_v \cdot v\, \underline{u}_v\, dt = v\, dt$

e quindi

$$L_{AB} = -\mu_d R_n\ {}_\alpha\int_A^B v\, dt = -\mu_d\ R_n\ S_{AB}^{(\alpha)}$$

dove $S_{AB}^{(\alpha)}$ è la lunghezza del percorso da A a B lungo α

► forza di attrito è **non conservativa** (dipendenza dal percorso, lavoro sempre negativo anche per percorso chiuso)

2) **Resistenza viscosa di un mezzo**

► $\underline{f}_R = -\ \beta\, v\, \underline{u}_v$

► $L_{AB} = {}_\alpha\int_A^B \delta L = {}_\alpha\int_A^B \underline{f}_R \cdot d\underline{r} = {}_\alpha\int_A^B -\beta\, v\, \underline{u}_v \cdot d\underline{r}$

$= {}_\alpha\int_A^B -\beta\, v^2\, dt = -\beta\ {}_\alpha\int_A^B v^2\, dt$

► $\underline{f}_R$ **non conservativa** in quanto ${}_\alpha\int_A^B v^2\, dt > 0$ sempre, anche per un percorso chiuso

3) **Caso generale**

Sono non conservative le forze dipendenti dalla velocità oppure esplicitamente dal tempo

Energia cinetica

Sia $\underline{f}$ il risultante delle forze agenti su un punto materiale di massa m costante. Il lavoro elementare corrispondente ad uno spostamento infinitesimo d$\underline{r}$ del punto materiale è dato da

$$\delta L = \underline{f} \bullet d\underline{r} = m\underline{a} \bullet d\underline{r} = m\underline{a} \bullet \underline{v}\, dt$$

Utilizzando le espressioni intrinseche di velocità e accelera-zione si ha

$$\delta L = m\, [a_s\, \underline{u}_t + (v_s^2/\rho)\underline{u}_n] \bullet (v_s\, \underline{u}_t)\, dt = m\, a_s\, v_s\, dt = m\, s''s'\, dt$$

Definendo **l'energia cinetica K** del punto materiale tramite la relazione

$$K = (½)\, m\, v_s^2 = (½)\, m\, s'^2$$

avremo

$$dK / dt = m\, s'\, s'' \;\text{-->}\; dK = m\, s'\, s''\, dt \;\text{-->}\; \delta L = dK \qquad (*)$$

il lavoro elementare rappresenta anche la variazione elemen-tare dell'energia cinetica nel tratto infinitesimo della traiettoria . Integrando sul percorso α da A a B si ottiene

$$L_{AB} = {}_{\alpha}\int_A^B \delta L = {}_{\alpha}\int_A^B dK = K_B - K_A$$

che è la formulazione integrale del “**Teorema delle forze vive**”.

Questo Teorema non dà maggiori informazioni del secondo Principio della Dinamica ma è utile in alcuni casi particolari (traiettoria nota a priori in quanto condizionata da vincoli, lavoro dipendente da posizione iniziale e finale). Il Teorema è valido anche in SdR non inerziali purché si consideri anche il lavoro delle forze fittizie.

(*) Se la massa del punto materiale non rimane costante tale formula si modifica in

$$\delta L = dK + (½)\, s'^2\, dm$$

Conservazione dell'energia meccanica

Teorema delle forze vive --> $\delta L = dK$

In presenza di forze conservative, si ha $\delta L = - dV$

e quindi $dK = -dV$ --> $d(K+V) = 0$ ed integrando

$$\mathbf{K + V = costante = E_m \quad \text{-->} \quad dE_m = 0}$$

con E_m "energia meccanica". Tale relazione, valida se tutte le forze agenti sono conservative, esprime la **conservazione dell'energia meccanica.**

In presenza di forze conservative e non conservative avremo $\delta L = \delta L^{(c)} + \delta L^{(nc)} = -dV + \delta L^{(nc)}$

e quindi $dK = \delta L = -dV + \delta L^{(nc)}$ ed anche

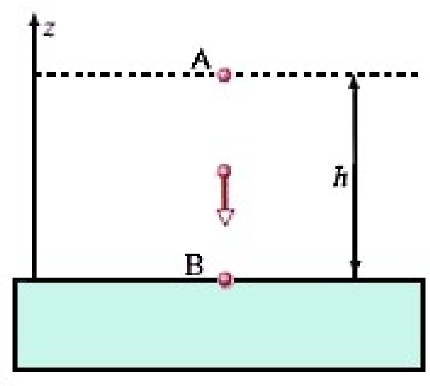
$$d(K+V) = \delta L^{(nc)} \quad \text{-->} \quad \mathbf{dE_m = \delta L^{(nc)}}$$

e quindi la variazione dell'energia meccanica di un punto materiale è dovuta soltanto al lavoro delle forze non conservative (connesso ad altre forme di energia).

Conservazione dell'energia meccanica

Applicazione della conservazione dell'energia meccanica
Caduta libera sotto l'effetto della forza peso

Indicate con A e B due posizioni successive del punto materiale si ha



$$\mathbf{E_m = K_A + V_A = K_B + V_B}$$

Se ad esempio

A -->quota h, punto fermo $K_A = 0$
B -->quota 0, punto in moto $K_B = (½)mv_B^2$

si ricava subito $E_m = mgh = (½)mv_B^2$ --> $\mathbf{v_B = \sqrt{2gh}}$

stesso risultato ottenuto dal Secondo Principio della Dinamica (Conservazione dell'energia è quindi un metodo alternativo per la soluzione dei problemi)

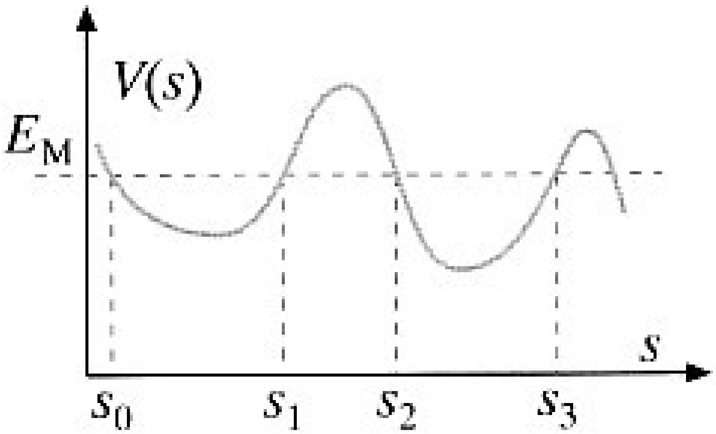
Caduta libera --> energia potenziale iniziale si trasforma in energia cinetica finale

Pendolo --> continua trasformazione tra energia potenziale e cinetica

Conservazione dell'energia meccanica

Caso generale --> può essere trasformata in energia cinetica la differenza tra l'energia potenziale della configurazione iniziale e quella di equilibrio stabile (minimo di energia potenziale)

Nel caso unidimensionale: energia potenziale funzione dell'ascissa curvilinea s (profilo altimetrico di una tappa del Giro d'Italia)



Dalla conservazione dell'energia meccanica

$$E_m = K + V(s) \quad \text{-->} \quad K = E_m - V(s)$$

Il moto può sussistere solo se

$$\mathbf{K > 0 \quad \text{-->} \quad E_m > V(s)}$$

In tali regioni $\mathbf{f_s = - dV / ds}$ e quindi

--> posizioni di equilibrio ($f_s = 0$) corrispondono a massimi e minimi di V(s)

--> lo spostamento di un punto materiale da tali posizioni di equilibrio comporta il manifestarsi di una forza che tende a portare il punto materiale verso una posizione di minimo di V(s): oscillazione intorno al minimo

--> posizione di massimo di V(s): equilibrio instabile
posizione di minimo di V(s): equilibrio stabile

Conservazione dell'energia meccanica

RIFLESSIONE

Energia potenziale --> diretta conseguenza dell'interazione tra il punto materiale in esame ed altri punti materiali
Se l'interazione è dovuta solo ad un altro punto materiale (interazione punto materiale – Terra, eventualmente tramite una molla ideale) la conservazione della energia meccanica dovrebbe essere scritta

$$dK_1 + dK_2 + dV = 0$$

con K_1 e K_2 energie cinetiche dei due corpi interagenti. Se l'altro punto è la Terra ($M_{Terra} >> m_{corpo}$), si può trascurarne l'energia cinetica acquisita ottenendo

$$dK_2 \approx 0 \quad \text{-->} \quad dK_1 + dV = 0$$

Ma chi è che fornisce al punto materiale l'energia potenziale successivamente spendibile come energia cinetica?

Macchine , la cui capacità di fornire un lavoro ΔL nell'intervallo di tempo Δt è data dalla "potenza media", definita dal rapporto $W_m = \Delta L/\Delta t$, o dalla "potenza istantanea" W (limite di W_m per Δt -> 0). Se il lavoro fatto dalla macchina viene prodotto tramite una forza $\underline{f}$ agente sul punto materiale, potremo scrivere

$$W = \delta L/dt = (\underline{f} \cdot d\underline{r}) / dt = \underline{f} \cdot \underline{v}$$

(Esempio di macchina: ascensore che solleva il punto materiale)

Conservazione dell'energia

$$d(K+V) = \delta L^{(nc)} \quad \text{-->} \quad dE_m = \delta L^{(nc)}$$

L'esperienza quotidiana insegna che nell'interazione del punto materiale con l'ambiente (pendolo che smorza le sue oscillazioni, corpo in moto che rallenta, ...) entrano in gioco forze non conservative, che fanno lavoro negativo (dissipative)

In tali casi la variazione dell'energia meccanica corrisponderà alla variazione di altre forme di energia (deformazione delle superfici a contatto, aumento della temperatura del corpo,..)

Se un sistema è "isolato" (ovvero su di esso non agiscono forze dovute ad interazioni con corpi esterni ad esso) non può cambiare la propria energia totale (può cambiare forma ma la somma globale è costante nel tempo).

Principio di Conservazione dell'Energia
" In un sistema isolato la somma di tutte le energie, in qualunque forma esse compaiano, è costante"