

Moto rispetto al centro di massa

Scegliamo un SdR S' con origine nel CM. Avremo che

$$\sum_i m_i (\underline{r}_i - \underline{r}_{CM}) = \sum_i m_i \underline{r}_i' = 0 \quad (1)$$

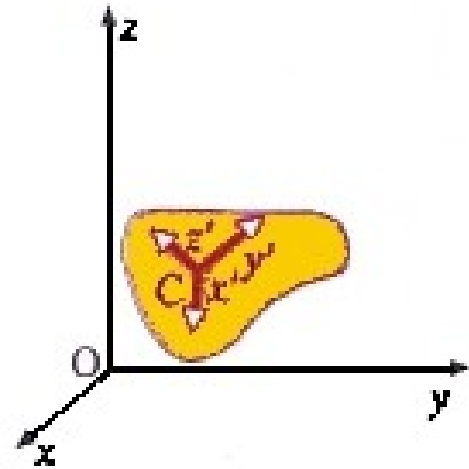
e derivando rispetto al tempo

$$\sum_i m_i \underline{v}_i' = \underline{Q}' = 0$$

ovvero la quantità di moto totale del sistema materiale è sempre nulla.

Derivando nuovamente rispetto al tempo si ha anche

$$\sum_i m_i \underline{a}_i' = 0$$



Supponiamo che il SdR S' abbia una terna di assi con orientamento costante rispetto a S : avremo allora

$$\underline{v}_i = \underline{v}_i' + \underline{v}_{CM}$$

Per il momento angolare del sistema di punti nel sistema S' potremo scrivere

$$\begin{aligned} \underline{P}_{CM}' &= \sum_i \underline{r}_i' \times m_i \underline{v}_i' = \sum_i \underline{r}_i' \times m_i (\underline{v}_i - \underline{v}_{CM}) = \\ &= \sum_i (\underline{r}_i - \underline{r}_{CM}) \times m_i (\underline{v}_i - \underline{v}_{CM}) = \\ &= \sum_i (\underline{r}_i - \underline{r}_{CM}) \times m_i \underline{v}_i - \sum_i m_i (\underline{r}_i - \underline{r}_{CM}) \times \underline{v}_{CM} = \\ &= \sum_i (\underline{r}_i - \underline{r}_{CM}) \times m_i \underline{v}_i = \underline{P}_{CM} \quad \rightarrow 0 \text{ per (1)} \end{aligned}$$

quindi

$$\underline{P}_{CM}' \rightarrow \text{grandezza intrinseca del sistema (momento angolare intrinseco)}$$

Concludendo
$$\underline{P}_\Omega = \underline{P}_{CM} + \underline{r}_{CM} \times M \underline{v}_{CM} = \underline{P}_{CM}' + \underline{r}_{CM} \times M \underline{v}_{CM}$$

Tale espressione (**Teorema di König per il momento angolare**) evidenzia la separazione tra momento angolare intrinseco e moto del CM

(ex. - Terra: rotazione diurna e rivoluzione intorno al Sole
- particelle elementari: spin e moto orbitale)

Dinamica dei sistemi di punti materiali

Punto materiale	Sistema di punti materiali
$\underline{q} = m \underline{v}$	$\underline{Q} = M \underline{v}_{CM}$
Prima Eqi	
$d\underline{q}/dt = \underline{F}$	$d\underline{Q}/dt = \underline{F}^{(e)} = M \underline{a}_{CM}$
Seconda Eqi	
$d\underline{p}_{\Omega}/dt = \underline{M}_{\Omega}$	$d\underline{P}_{\Omega}/dt = \underline{M}_{\Omega}^{(e)} - M \underline{v}_{\Omega} \times \underline{v}_{CM}$
	se $\Omega = CM \rightarrow d\underline{P}_{CM}/dt = \underline{M}_{CM}^{(e)}$
	se $\underline{v}_{\Omega} = 0 \rightarrow d\underline{P}_{\Omega}/dt = \underline{M}_{\Omega}^{(e)}$
	$\underline{P}_{\Omega} = \underline{P}_{CM} + \underline{r}_{CM} \times M \underline{v}_{CM}$

E inoltre

$$\underline{P}_{\Omega} = \underline{P}_{CM} + \underline{r}_{CM} \times M \underline{v}_{CM} = \underline{P}_{CM}' + \underline{r}_{CM} \times M \underline{v}_{CM}$$

Teorema di König per il momento angolare

Moto rispetto al centro di massa

Dalla relazione

$$\underline{P}_{CM}' = \underline{P}_{CM}$$

segue immediatamente che

$$\underline{M}_{CM}^{(e)} = d\underline{P}_{CM}/dt = d\underline{P}_{CM}'/dt$$

ma il momento di ciascuna forza dipende dal polo ma non dal SdR e quindi

$$\underline{M}_{CM}'^{(e)} = \underline{M}_{CM}^{(e)} \quad \rightarrow \quad \underline{M}_{CM}'^{(e)} = d\underline{P}_{CM}'/dt$$

Concludendo, in S' possiamo utilizzare la seconda equazione cardinale considerando il momento risultante delle sole forze esterne "vere", senza preoccuparci di quelle fittizie.

Per quanto riguarda l'energia cinetica K si ha

$$\begin{aligned} K &= \sum_i (1/2) m_i v_i^2 = \sum_i (1/2) m_i (\underline{v}_i' + \underline{v}_{CM}) \cdot (\underline{v}_i' + \underline{v}_{CM}) = \\ &= \sum_i (1/2) m_i v_i'^2 + (1/2) M v_{CM}^2 + \sum_i m_i \underline{v}_i' \cdot \underline{v}_{CM} = \\ &= K' + (1/2) M v_{CM}^2 \end{aligned}$$

Tale relazione (**Teorema di König per l'energia cinetica**) esprime l'energia cinetica come somma dell'energia cinetica nel sistema del CM e dell'energia cinetica di un punto materiale di massa uguale alla massa totale e coincidente con il CM.

Lavoro ed Energia nei Sistemi

Per ogni punto materiale del sistema potremo scrivere il Teorema delle forze vive $\delta L_i = dK_i$ e sommando su tutte le particelle del sistema avremo

$$\delta L = \sum_i \delta L_i = \sum_i \delta L_i^{(e)} + \sum_i \delta L_i^{(i)} = \delta L^{(e)} + \delta L^{(i)} = dK$$

In generale $\delta L^{(i)} \neq 0$; ad esempio per un sistema di due punti materiali avremo $\delta L^{(i)} = \underline{f}_1 \cdot d\underline{r}_1 + \underline{f}_2 \cdot d\underline{r}_2 = \underline{f}_2 \cdot (d\underline{r}_2 - d\underline{r}_1) = \underline{f}_2 \cdot d(\underline{r}_2 - \underline{r}_1)$ ma $\underline{f}_2 \parallel \underline{r}_2 - \underline{r}_1$ e quindi $\delta L^{(i)} = f_2 d|\underline{r}_2 - \underline{r}_1|$ legato alla variazione di distanza tra i due punti materiali

Potremo riscrivere il Teorema delle forze vive nella forma

$$dK = \delta L^{(e,c)} + \delta L^{(e,nc)} + \delta L^{(i,c)} + \delta L^{(i,nc)} = -dV^{(e)} - dV^{(i)} + \delta L^{(e,nc)} + \delta L^{(i,nc)}$$

separando il contributo delle forze non conservative da quello delle forze conservative. In particolare $V^{(i)}$ rappresenta l'energia potenziale interna del sistema di punti materiali.

Essa è dovuta a forze conservative di origine elettromagnetica, dipendenti dalle distanze relative tra i punti materiali costituenti, e quindi $\delta L^{(i,nc)} = 0$. Avremo allora

$$d(K + V^{(i)}) = \delta L^{(e)}$$

La grandezza $E^{(0)} = K + V^{(i)}$ viene detta "energia propria del sistema" e rimane costante in assenza di lavoro di forze esterne

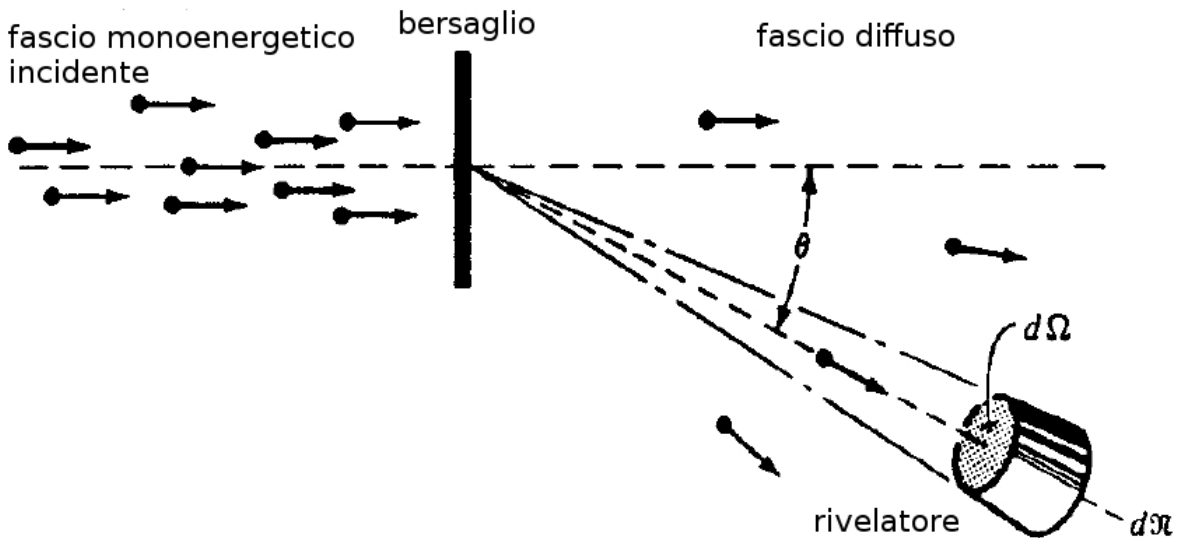
Dal Teorema di König avremo poi

$$E^{(0)} = K' + (1/2)Mv_c^2 + V^{(i)} = U + K_c \rightarrow dE^{(0)} = dU + dK_c = \delta L^{(e)}$$

con $U = K' + V^{(i)}$ detta "energia interna" del sistema (energia propria nel SdR del CM). Il lavoro delle forze esterne può quindi produrre una variazione sia dell'energia cinetica del CM che dell'energia interna.

Fenomeni d'urto

Esaminiamo il problema delle collisioni tra un fascio di particelle di energia nota con quelle di un bersaglio.



Si hanno due possibilità di “urto”:

Diffusione --> stato finale con stesse particelle dello stato iniziale

Reazione --> stato finale con particelle diverse da stato iniziale

Caratteristica comune ai due casi:

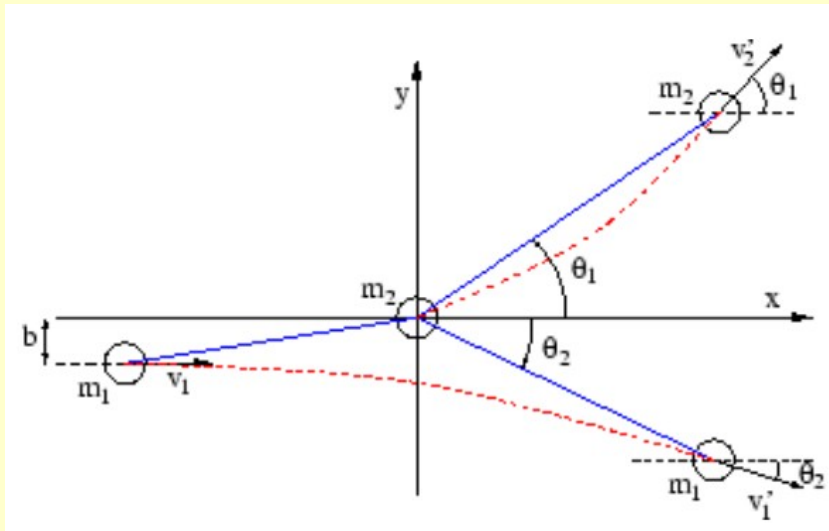
forze agenti fra i due corpi interagenti hanno intensità elevata per un tempo breve (interazione con altre particelle trascurabile) -->

sistema isolato --> conservazione quantità di moto

--> conservazione momento angolare

--> conservazione energia propria

Fenomeni d'urto



sistema isolato

Durata interazione $\rightarrow \Delta t = t_f - t_i$

Per gli impulsi delle due particelle avremo

$$\underline{J}_1 = \Delta \underline{q}_1 = \Delta \underline{q}_1^{(i)} + \Delta \underline{q}_1^{(e)} = \int_{t_i}^{t_f} \underline{f}_{1(2)} dt + \int_{t_i}^{t_f} \underline{f}_1^{(e)} dt$$

$$\underline{J}_2 = \Delta \underline{q}_2 = \Delta \underline{q}_2^{(i)} + \Delta \underline{q}_2^{(e)} = \int_{t_i}^{t_f} \underline{f}_{2(1)} dt + \int_{t_i}^{t_f} \underline{f}_2^{(e)} dt$$

Se le forze esterne rimangono invariate durante urto e l'urto ha durata breve allora $\int_{t_i}^{t_f} \underline{f}_1^{(e)} dt = \int_{t_i}^{t_f} \underline{f}_2^{(e)} dt = 0$ e si ha

$$\Delta \underline{q}_1 = -\Delta \underline{q}_2 \quad \rightarrow \quad \Delta \underline{Q} = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{Q}(t_i) = \underline{Q}(t_f)$$

[ex. urto tra palle biliardo: forze esterne \rightarrow gravità, vincoli
forze interne \rightarrow forze a contatto]

Analogamente per il momento angolare

$$\Delta \underline{p}_{1\Omega} = \int_{t_i}^{t_f} \underline{M}_1 dt = \int_{t_i}^{t_f} \underline{M}_1^{(i)} dt + \int_{t_i}^{t_f} \underline{M}_1^{(e)} dt \quad \text{ed analoga per } \Delta \underline{p}_{2\Omega}$$

Anche in questo caso $\Delta \underline{p}_{1\Omega} = -\Delta \underline{p}_{2\Omega} \quad \rightarrow \quad \underline{P}(t_i) = \underline{P}(t_f)$

E infine per l'energia

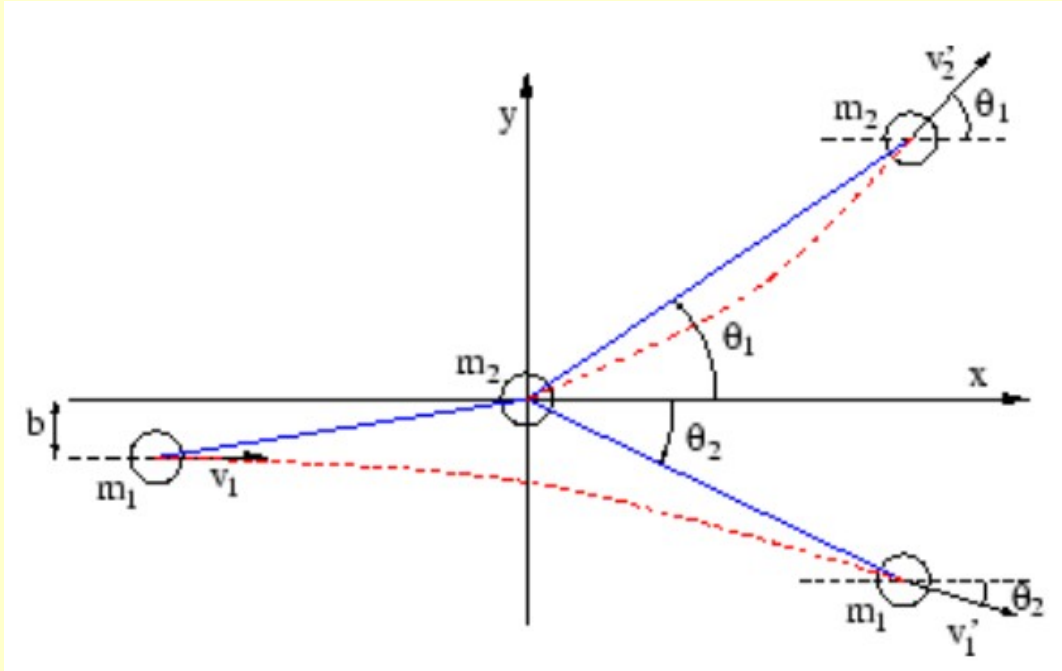
lavoro forze esterne \rightarrow trascurabile rispetto a energia interna a causa della brevità dell'urto

\rightarrow conservazione energia

energia cinetica costante \rightarrow urto elastico

energia cinetica diminuisce \rightarrow urto anelastico

Fenomeni d'urto



Se le forze esterne rimangono invariate durante urto

Conservazione \underline{Q}

$\left. \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\} \rightarrow \underline{v}_{CM} \text{ costante}$

$(\underline{Q} = M \underline{v}_{CM})$

$\left. \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\} \rightarrow K_{CM} = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 \text{ costante}$

e quindi, essendo $K = K' + K_{CM}$ si ha

urto elastico $\rightarrow K \text{ costante} \rightarrow K' \text{ costante}$

urto anelastico $\rightarrow K \text{ diminuisce} \rightarrow K' \text{ diminuisce}$

Studio del moto nel **caso elastico**:

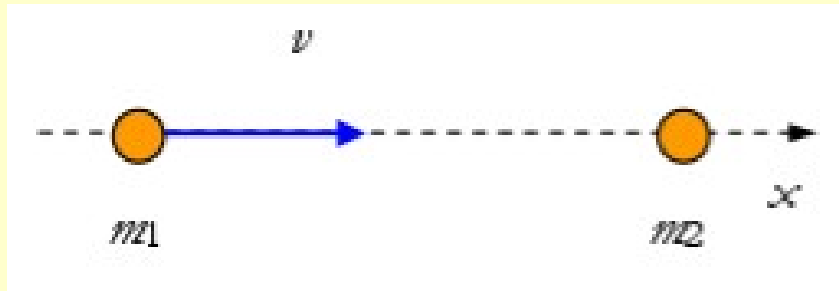
1) conservazione \underline{Q} \rightarrow 3 equazioni scalari

2) conservazione K \rightarrow 1 equazione scalare

con 6 gradi di libertà \rightarrow problema non risolvibile

Il problema è risolvibile se è noto lo stato iniziale ed è stata determinata la direzione orientata finale di una particella.

Fenomeni d'urto



Caso elastico semplice --> **urto centrale (unidimensionale)**

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 &= \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \\ m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} &= m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \end{aligned}$$

Note v_{1i} e v_{2i} abbiamo quindi due equazioni in due incognite con soluzioni

$$\begin{aligned} v_{1f} &= [(m_1 - m_2) v_{1i} + 2 m_2 v_{2i}] / (m_1 + m_2) \\ v_{2f} &= [(m_2 - m_1) v_{2i} + 2 m_1 v_{1i}] / (m_1 + m_2) \end{aligned}$$

Se $m_1 = m_2$ --> $v_{1f} = v_{2i}$ --> scambio di velocità

Se $v_{2i} = 0$

$$\begin{aligned} &--> v_{1f} = [(m_1 - m_2) v_{1i}] / (m_1 + m_2) \\ &v_{2f} = [2 m_1 v_{1i}] / (m_1 + m_2) \\ &--> m_1 > m_2 \quad --> v_{1f} > 0 \\ &--> m_1 = m_2 \quad --> v_{1f} = 0 \\ &--> m_1 < m_2 \quad --> v_{1f} < 0 \\ &--> m_1 \ll m_2 \quad --> v_{2f} \approx 0 \quad v_{1f} = -v_{1i} \\ & \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \text{rimbalzo} \end{aligned}$$

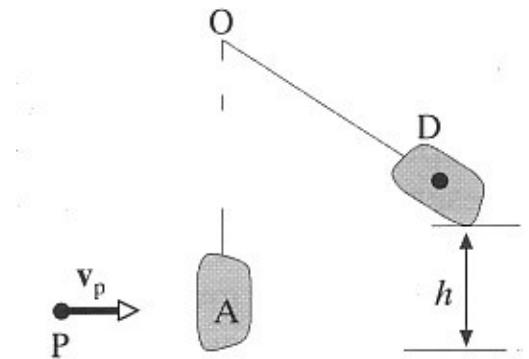
Fenomeni d'urto

Studio del moto nel caso **completamente anelastico**:

Pendolo balistico (misura velocità di un proiettile)

↳ corpo A di massa M attaccato a supporto fisso O tramite corda inestendibile

Proiettile P colpisce corpo A in direzione passante per il CM di A e il sistema P+A entra in rotazione e raggiunge quota h



Subito dopo urto --> P e A sono in quiete relativa ed hanno stessa velocità v_D .

In questo caso le forze esterne (ex. reazione vincolare in O) variano durante l'urto ma non danno momento di forze rispetto ad O. Vale quindi la conservazione del momento angolare rispetto ad O

$$\underline{r} \times m \underline{v}_p = \underline{r} \times (m+M) \underline{v}_D \quad \text{-->} \quad \underline{v}_D = m \underline{v}_p / (m+M)$$

Successivamente, dalla conservazione dell'energia si ha

$$\left(\frac{1}{2}\right) (m+M) v_D^2 = (m+M) gh$$

e quindi

$$v_p = (1 + M/m) \sqrt{2gh}$$