

Dinamica dei sistemi rigidi con asse fisso

Nel caso di corpi rigidi vincolati a ruotare intorno ad un asse fisso i 6 gradi di libertà si riducono ad uno solo: l'angolo φ che un piano passante per l'asse e solidale con il corpo forma con un piano di riferimento fisso.

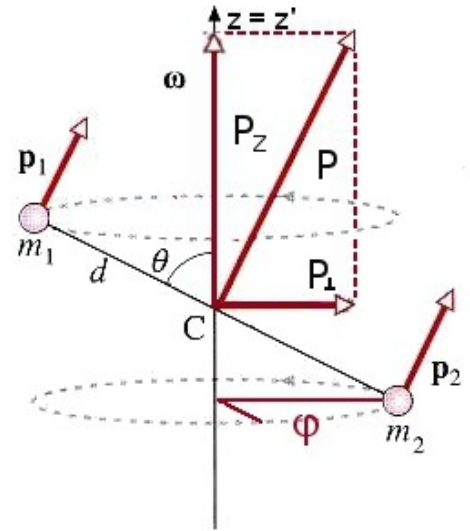
Scegliendo l'asse z del SdR lungo l'asse di rotazione, potremo determinare il momento angolare assiale

$$\underline{P}_z = \underline{P} \cdot \underline{u}_z = (\underline{I} \underline{\omega} + \underline{P}_\perp) \cdot \underline{u}_z = \underline{I} \omega$$

L'equazione assiale del moto diventa

$$M_z^{(e)} = (d\underline{P}/dt) \cdot \underline{u}_z = d(\underline{P} \cdot \underline{u}_z)/dt = d(\underline{I} \omega)/dt = \underline{I} d^2 \varphi / dt^2$$

con $M_z^{(e)}$ momento assiale delle forze esterne.



Tale equazione permette di ricavare l'equazione oraria $\varphi = \varphi(t)$ del corpo.

Si noti che $M_z^{(e)}$ è nullo se

--> $M^{(e)}$ è \perp all'asse di rotazione

(forze esterne // all'asse, ex. forze peso se l'asse è verticale)

--> $M^{(e)}$ è nullo

(forze esterne con direzione puntante all'asse)

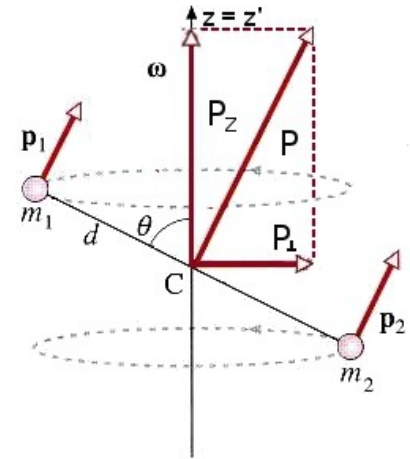
Il CM del corpo si muoverà di moto circolare intorno all'asse e la relazione $\underline{F}^{(e)} = \underline{M} \underline{a}_{CM}$ permetterà di ricavare l'opportuna forza centripeta (fornita dai vincoli).

Dinamica dei sistemi rigidi con asse fisso

Per lo studio dei momenti di forza non assiali avremo che

$$\begin{aligned} \underline{M}^{(e)} &= (d\underline{P}/dt) = d(\underline{I} \underline{\omega} + \underline{P}_{\perp})/dt = \\ &= \underline{I} d(\underline{\omega})/dt + d\underline{P}_{\perp}/dt = \\ &= \underline{I} d(\underline{\omega})/dt + d\underline{P}_{\perp}/dt = \\ &= \underline{M}_z^{(e)} + \underline{M}_{\perp}^{(e)} \end{aligned}$$

$\underline{I} d(\underline{\omega})/dt = \underline{M}_z^{(e)}$ -> variazione modulo $\underline{\omega}$
 $d\underline{P}_{\perp}/dt = \underline{M}_{\perp}^{(e)}$ -> \perp asse di rotazione



$$\begin{aligned} d\underline{P}_{\perp}/dt &= d(-\sum_i m_i z_i \omega \underline{\rho}_i)/dt = \\ &= -(d\omega/dt) \sum_i m_i z_i \underline{\rho}_i - \omega d(\sum_i m_i z_i \underline{\rho}_i)/dt = \\ &= (d\omega/dt) \underline{P}_{\perp}/\omega + \omega (-\sum_i m_i z_i \underline{\omega} \times \underline{\rho}_i) = \\ &= (d\omega/dt) \underline{P}_{\perp}/\omega + \underline{\omega} \times \underline{P}_{\perp} \end{aligned}$$

Per mantenere l'asse fisso i vincoli devono quindi esercitare un opportuno momento di forze, anche nel caso in cui $\underline{\omega}$ rimanga costante nel tempo.

Se asse di rotazione = asse di simmetria:

$$\underline{P}_{\perp} = 0 \text{ --> } \underline{M}_{\perp}^{(e)} = 0$$

e quindi il corpo rimane in rotazione intorno all'asse senza bisogno di un momento di forze applicato dall'esterno

assi di simmetria = assi liberi (o permanenti) di rotazione

[applicazione

- equilibratura pneumatici auto e moto: aggiunta di masse sul cerchione al fine di rendere $\underline{M}^{(e)}$ parallelo all'asse di rotazione
- decelerazione di un sistema rotante, dischi dei freni, tramite un $\underline{M}^{(e)}$ parallelo all'asse di rotazione (ganasce) per non sollecitare i vincoli]

Dinamica dei sistemi rigidi con asse fisso

Esempi

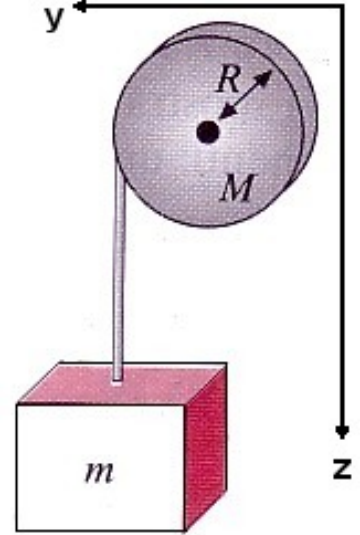
- Carrucola di massa M e raggio R con asse fisso
- filo inestendibile avvolto su essa
- corpo di massa m appeso al filo

Il corpo si muove lungo la verticale tramite spostamenti (dz) strettamente legati alla rotazione ($d\varphi$) della carrucola

$$dz = R d\varphi$$

$$v = dz/dt = R d\varphi/dt = R\omega$$

$$a = dv/dt = R d\omega/dt = R d^2\varphi/dt^2 = R\alpha$$



Dalla prima equazione della dinamica applicata al corpo si ha

$$mg - T = ma \quad \text{con } T \text{ tensione del filo}$$

Per il moto della carrucola dalla seconda eq. della dinamica

$$M_x^{(e)} = TR = \mathbf{I}\alpha = \left(\frac{1}{2}\right) M R^2 \alpha$$

Eliminando T dalle ultime 2 relazioni si ottiene

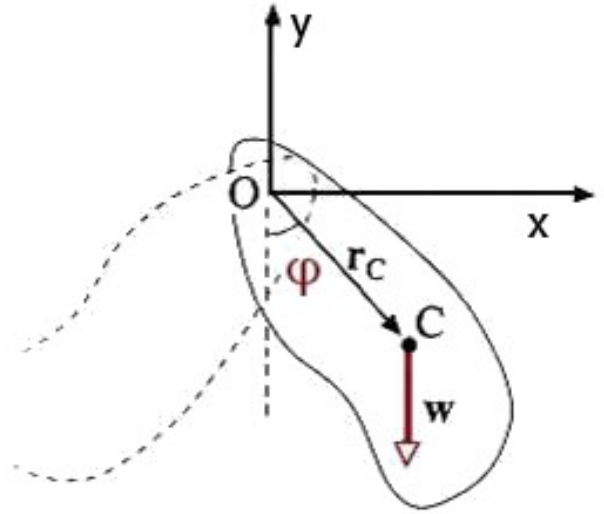
$$\alpha = (g/R) (1 + M/2m)^{-1} \quad \rightarrow \quad T = mg/(1 + 2m/M)$$

Per la massa m si ha quindi accelerazione $a=R\alpha$ costante ma ridotta rispetto al caso di caduta libera e tanto minore quanto maggiore è la massa M della carrucola

Dinamica dei sistemi rigidi con asse fisso

Esempi – Pendolo fisico
(o pendolo composto)

Sistema rigido vincolato a
ruotare senza attrito attorno
ad asse orizzontale non
passante per il CM



Proiettando la seconda equazione cardinale lungo l'asse di
rotazione (z) si ha

$$M_z^{(e)} = \sum_i (\underline{r}_i \times m_i \underline{g}) \cdot \underline{u}_z = (\underline{r}_{CM} \times M \underline{g}) \cdot \underline{u}_z = I d^2\varphi/dt^2$$

dalla quale, indicando con $d = r_{CM}$ la distanza del CM dall'asse,
segue

$$- M g d \sin \varphi = I d^2\varphi/dt^2 \rightarrow d^2\varphi/dt^2 + (M g d / I) \sin \varphi = 0$$

con soluzione tipica, nel caso delle **piccole oscillazioni** per le
quali $\sin \varphi \approx \varphi$, del moto armonico

$$\varphi(t) = \varphi_{\max} \cos(\omega_0 t + \beta_0) \quad \text{con } \omega_0 = \sqrt{M g d / I}$$

Nel caso del pendolo semplice

$$I = M d^2$$

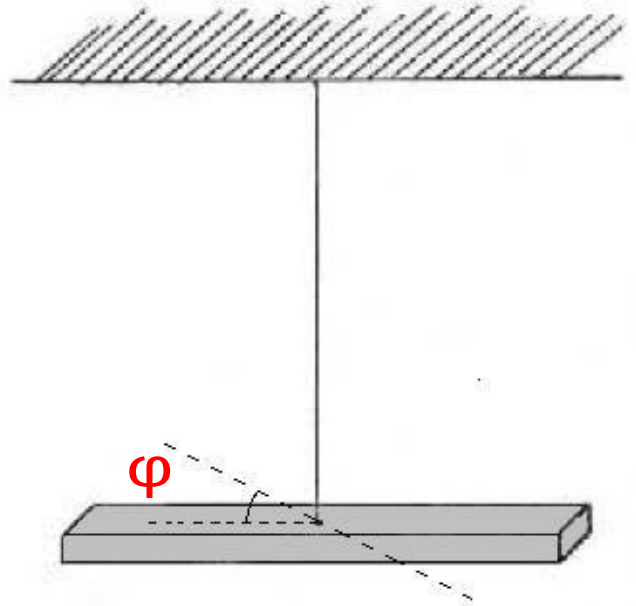
$$\omega_0 = \sqrt{g / d}$$

Dinamica dei sistemi rigidi con asse fisso

Esempi – Pendolo di torsione

-Costituito da un equipaggio mobile disposto orizzontalmente e appeso al centro ad un filo verticale con l'altro estremo appeso ad un supporto fisso.

Quando l'equipaggio viene fatto ruotare di un angolo φ in un piano orizzontale il filo, sottoposto a torsione, reagisce cercando di riportarsi alla condizione iniziale.



Se φ è piccolo il momento di torsione esercitato dal filo sull'equipaggio risulta proporzionale a φ (Legge di Hooke). Tale momento è parallelo al filo e quindi avremo

$$M_z = -k\varphi = I d^2\varphi/dt^2 \quad \rightarrow \quad I d^2\varphi/dt^2 + k\varphi = 0$$

equazione differenziale che ha soluzione

$$\varphi(t) = \varphi_{\max} \cos(\omega_0 t + \beta_0)$$

con pulsazione $\omega_0 = \sqrt{k/I}$

Energia cinetica di un sistema rigido

Per un sistema di punti materiali $\mathbf{K} = \mathbf{K}' + \frac{1}{2} m \mathbf{v}_{\text{CM}}^2$
con \mathbf{K}' = energia cinetica rispetto SdR S' con origine in CM
e assi che traslano paralleli a sé stessi.

Per un sistema rigido $\underline{\mathbf{v}}_i = \underline{\mathbf{v}}_{\text{CM}} + \underline{\boldsymbol{\omega}}(t) \times (\underline{\mathbf{r}}_i - \underline{\mathbf{r}}_{\text{CM}})$
e quindi avremo

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \sum_i \left(\frac{1}{2}\right) m_i |\underline{\mathbf{v}}_i|^2 = \left(\frac{1}{2}\right) \sum_i m_i |\underline{\mathbf{v}}_{\text{CM}} + \underline{\boldsymbol{\omega}}(t) \times (\underline{\mathbf{r}}_i - \underline{\mathbf{r}}_{\text{CM}})|^2 = \\ &= \left(\frac{1}{2}\right) \sum_i m_i \{ \mathbf{v}_{\text{CM}}^2 + 2 [\underline{\mathbf{v}}_{\text{CM}} \cdot \underline{\boldsymbol{\omega}}(t) \times (\underline{\mathbf{r}}_i - \underline{\mathbf{r}}_{\text{CM}})] + |\underline{\boldsymbol{\omega}}(t) \times (\underline{\mathbf{r}}_i - \underline{\mathbf{r}}_{\text{CM}})|^2 \} \end{aligned}$$

Ma $\underline{\mathbf{v}}_{\text{CM}} \cdot \underline{\boldsymbol{\omega}}(t) \times \sum_i m_i (\underline{\mathbf{r}}_i - \underline{\mathbf{r}}_{\text{CM}}) = 0$ in quanto $\sum_i m_i (\underline{\mathbf{r}}_i - \underline{\mathbf{r}}_{\text{CM}}) = 0$
Potremo inoltre scrivere $|\underline{\boldsymbol{\omega}}(t) \times (\underline{\mathbf{r}}_i - \underline{\mathbf{r}}_{\text{CM}})|^2 = [\boldsymbol{\omega}(t) \rho_i]^2$ con ρ_i
distanza dall'asse di rotazione

Infine
$$\mathbf{K} = \left(\frac{1}{2}\right) M \mathbf{v}_{\text{CM}}^2 + \left(\frac{1}{2}\right) \mathbf{I}_{\text{CM}} \boldsymbol{\omega}^2$$

con $\mathbf{I}_{\text{CM}} = \sum_i m_i \rho_i^2$ momento d'inerzia rispetto all'asse
passante per il CM e parallelo a $\boldsymbol{\omega}$

Nel caso particolare in cui il corpo rigido stia SOLO ruotando
intorno ad un asse (anche non passante per il CM) risulta
più conveniente calcolare l'energia cinetica facendo riferimento
a tale asse. Scelta l'origine del SdR su di esso, la velocità di
ogni punto è data da $\underline{\mathbf{v}}_i = \underline{\boldsymbol{\omega}}(t) \times \underline{\mathbf{r}}_i$ e per l'energia cinetica si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \sum_i \left(\frac{1}{2}\right) m_i |\underline{\mathbf{v}}_i|^2 = \sum_i \left(\frac{1}{2}\right) m_i |\underline{\boldsymbol{\omega}} \times \underline{\mathbf{r}}_i|^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right) \sum_i m_i \rho_i^2 \boldsymbol{\omega}^2 = \left(\frac{1}{2}\right) \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}^2 \end{aligned}$$

con ρ_i distanze di ciascun punto dall'asse di rotazione e \mathbf{I} il
corrispondente momento di inerzia.

Lavoro su un sistema rigido

Lavoro su sistema rigido -> dovuto solo a forze esterne
(forze interne danno contributo nullo)

Per quanto abbiamo visto per un sistema rigido in rotazione,
dalla relazione $M_z^{(e)} = I d^2\varphi/dt^2$ --> elemento motore è $M_z^{(e)}$
ovvero il momento assiale delle forze esterne

Per evidenziare questo fatto, cerchiamo
di esprimere il lavoro in funzione del
momento delle forze esterne e della
rotazione angolare.

Scelto SdR con origine O sull'asse
(assunto come asse z)

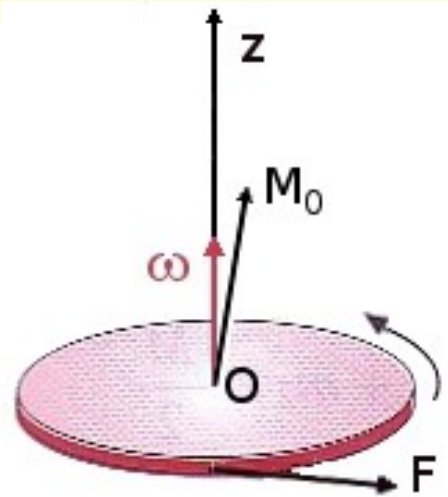
avremo $d\mathbf{r}_i = \mathbf{v}_i dt = (\omega \mathbf{u}_z \times \mathbf{r}_i) dt$
e quindi

$$\begin{aligned}\delta L &= \sum_i \mathbf{f}_i^{(e)} \cdot d\mathbf{r}_i = \sum_i \mathbf{f}_i^{(e)} \cdot (\omega \mathbf{u}_z \times \mathbf{r}_i) dt = \mathbf{u}_z \cdot (\sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i^{(e)}) \omega dt \\ &= (\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{M}_O^{(e)}) \omega dt = M_z^{(e)} d\varphi\end{aligned}$$

dove $\mathbf{M}_O^{(e)}$ è il momento totale delle forze esterne rispetto al
polo O e $M_z^{(e)}$ la sua componente assiale.

Si deduce che

- > l'unico componente che compie lavoro è quello // all'asse
(anche responsabile dell'accelerazione angolare del sistema)
- > il componente del momento diretto \perp all'asse di rotazione non
esegue lavoro (manca rotazione intorno alla sua direzione a
causa delle reazioni vincolari)



Lavoro su un sistema rigido

Per l'espressione generale del lavoro elementare avremo quindi

$$\begin{aligned}\delta L &= \sum_i \underline{f}_i^{(e)} \cdot \underline{v}_i dt = \sum_i \underline{f}_i^{(e)} \cdot [\underline{v}_{CM} + \underline{\omega} \times (\underline{r}_i - \underline{r}_{CM})] dt = \\ &= \sum_i \underline{f}_i^{(e)} \cdot [\underline{v}_{CM} dt + \underline{\omega} \times (\underline{r}_i - \underline{r}_{CM}) dt] = \\ &= \underline{F}^{(e)} \cdot d\underline{r}_{CM} + [\sum_i (\underline{r}_i - \underline{r}_{CM}) \times \underline{f}_i^{(e)}] \cdot \underline{\omega} dt = \\ &= \underline{F}^{(e)} \cdot d\underline{r}_{CM} + \underline{M}_{CM}^{(e)} \cdot \underline{\omega} dt\end{aligned}$$

Primo termine -> variazione dell'energia cinetica K_{CM} del moto di traslazione del centro di massa

Secondo termine -> variazione di energia cinetica di rotazione del moto rispetto al CM

Se le forze esterne che fanno lavoro sul sistema rigido sono conservative, l'energia meccanica del sistema si conserva. Nei problemi in cui il moto del sistema, sotto l'effetto dei vincoli o di altre condizioni, è funzione di una sola variabile (ad es. \mathbf{x}) la conservazione dell'energia meccanica può essere nella forma

$$dE_m(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) / dt = 0$$

che fornisce un'equazione differenziale per $\mathbf{x}(t)$ la cui soluzione, in corrispondenza di determinate condizioni iniziali, descrive il moto del sistema.

Tale metodo, detto "metodo dell'energia", è spesso un'utile alternativa all'utilizzo delle equazioni cardinali della dinamica.