

Nello Taccetti

**LABORATORIO**

**NUCLEARE - SUBNUCLEARE**

# Indice

<b>1</b>	<b>Perdita di energia delle particelle cariche pesanti nella materia</b>	<b>5</b>
1.1	Interazione coulombiana elastica fra due particelle. Calcolo classico di Bohr	5
1.2	Perdite di energia collisionali. Calcolo classico di Bohr	7
1.3	Perdita di energia collisionale. Calcolo relativistico approssimato	8
1.4	Il limite $b_{min}$	11
1.5	Il limite $b_{max}$	12
1.6	La formula del $(dE/dx)_{coll}$ per particelle pesanti. Confronto con la formula di Bethe-Bloch	14
1.7	Discussione del limite di validità della formula di Bethe-Bloch a bassa velocità dello ione incidente: a) carica efficace dello ione, b) non efficacia degli elettroni $K, L, \dots$	15
1.8	Carattere medio del $(dE/dx)$ . Concetto di sparpagliamento (straggling) in energia	17
1.9	Limitazioni e correzioni della formula di Bethe-Bloch per $T_1 > m_1c^2$ ( $t_1 > 1$ )	18
1.10	Range	19
1.11	Composti e miscele. Perdita di energia e range	23
1.12	Range di particelle differenti in uno stesso materiale	29
1.13	Straggling in energia. Straggling in range. Angolo quadratico medio di scattering.	30
1.14	I processi di ionizzazione e la curva di Bragg	32
1.15	Tempi di frenamento	33
<b>2</b>	<b>Perdita di energia degli elettroni nella materia</b>	<b>34</b>
2.1	Perdita di energia collisionale	34
2.2	Perdita di energia radiativa	34
2.3	Perdita di energia totale. Contributi relativi	42
2.4	Range	42
2.5	Ulteriori caratteristiche dell'interazione elettrone-materia	43
<b>3</b>	<b>Interazione della radiazione e.m. con la materia</b>	<b>45</b>
3.1	Scattering Compton. Leggi di conservazione	46
3.2	Distribuzione di energia degli elettroni Compton	50
3.3	Sezione d'urto totale e coefficienti di attenuazione lineare e di massa	52
3.4	Interazione fotoelettrica (effetto fotoelettrico)	65
3.5	Produzione di coppie	68
<b>A</b>	<b>Elementi di cinematica relativistica</b>	<b>72</b>
A.1	Velocità di una particella in differenti riferimenti inerziali	72
A.2	Definizione della massa e dell'impulso relativistico di una particella	74
A.3	Forza	74
A.4	Energia totale ed energia cinetica	74
A.5	Relazioni fra impulso, energia totale ed energia cinetica	75

<b>B</b>	<b>Cinematica relativistica delle collisioni elastiche</b>	<b>76</b>
B.1	Trasformazione della massa di una particella . . . . .	76
B.2	Trasformazione dell'impulso e dell'energia . . . . .	76
B.3	Estensione delle leggi di conservazione alle collisioni elastiche "puntiformi"	77
B.4	Collisioni elastiche relativistiche e sistema di riferimento di impulso nullo .	79
<b>C</b>	<b>Il campo elettromagnetico di una carica in moto rettilineo uniforme</b>	<b>84</b>
<b>D</b>	<b>Cinematica relativistica: relazioni fra impulso ed energia cinetica e variabili cinematiche <math>\beta, \gamma</math></b>	<b>87</b>

## Introduzione

Il funzionamento dei rivelatori di radiazione si basa sull'interazione dei diversi tipi di radiazione con la materia della quale sono costituiti i rivelatori medesimi. Per interpretare la risposta di un particolare rivelatore ad una particolare radiazione è importante ricostruire il meccanismo con il quale la radiazione perde energia nella materia del rivelatore. È utile, per la discussione successiva, classificare i differenti tipi di radiazione secondo la successiva tabella.

Radiazioni ionizzanti cariche	Radiazioni ionizzanti neutre
particelle cariche pesanti	neutroni
elettroni e positroni	raggi X e $\gamma$

Nella colonna di sinistra sono riportate quelle particelle che, a causa della loro carica elettrica, una volta penetrate nel rivelatore interagiscono tramite la forza coulombiana in maniera continua con gli elettroni e i nuclei della materia del rivelatore. Le particelle riportate nella colonna di destra devono viceversa provocare una (o più) interazioni locali, in ciascuna delle quali possono cedere tutta o parte della loro energia ad alcuni nuclei (scattering di neutroni) o ad alcuni elettroni (vari tipi di interazione di X e  $\gamma$  che discuteremo nel seguito), che cedono successivamente l'energia cinetica della quale sono venuti in possesso con processi uguali a quelli delle particelle cariche della colonna di sinistra. Inizieremo con lo studio della perdita di energia delle particelle pesanti cariche nell'attraversare la materia per studiare poi la perdita di energia degli elettroni. Successivamente analizzeremo i meccanismi tramite i quali la radiazione elettromagnetica X e  $\gamma$  cede la sua energia ad "elettroni primari". Non discuteremo l'interazione dei neutroni con la materia. Precisiamo, inoltre, che quando si parla di "particelle veloci" si intende riferirsi a particelle la cui energia cinetica è molto superiore a  $25 \text{ meV}$  per grado di libertà.

I testi ai quali faremo riferimento sono i seguenti:

R.D.Evans	The Atomic Nucleus - McGraw-Hill 1955
E.Fermi	Nuclear Physics - Revised edition, The University of Chicago Press 1951
J.D.Jackson	Classical Electrodynamics - 2 <sup>nd</sup> ed. John Wiley & Sons 1978
K.S.Krane	Introductory Nuclear Physics - John Wiley & Sons 1988
G.F.Knoll	Radiation Detector and Measurement - 2 <sup>nd</sup> ed. John Wiley & Sons 1989
H.B.Dwight	Tables of integrals - 4 <sup>th</sup> ed. McMillan Publishing Co., Inc, 1961
Particle Data Group	Review of Particle Physics - Journal of Physics G vol. 33 July 2006

# 1 Perdita di energia delle particelle cariche pesanti nella materia

Per quanto lo scattering coulombiano (Rutherford scattering) delle particelle pesanti cariche sia un processo importante (e molto utilizzato in fisica nucleare applicata) esso ha tuttavia un'influenza trascurabile nel determinare la perdita di energia delle particelle nell'attraversare la materia, e questo per un motivo principale: siccome i nuclei occupano un volume che è circa  $10^{15}$  volte più piccolo di quello dei loro atomi, per conseguenza, l'interazione con gli elettroni di una particella che passa attraverso un atomo è, molto rozzamente, circa  $10^{15}$  volte più probabile di quella con il nucleo.

Classicamente, a seguito di un urto elastico frontale, un corpo di massa  $m_1$  e di energia cinetica  $T_1$ , urtando un corpo in quiete di massa  $m_2$ , perde un'energia cinetica  $\Delta T = 4T_1m_2/(m_1 + m_2)$ .

Se  $m_1$  è un protone di energia cinetica di  $5 \text{ MeV}$  e  $m_2$  è un elettrone inizialmente "fermo", il protone perde un'energia di  $\simeq 11 \text{ keV}$ . Nell'esempio fatto occorrono quindi circa 500 urti centrali prima che il protone si fermi; in realtà occorrono molte decine di migliaia di urti non centrali.

Un'altra caratteristica, dovuta alla piccola massa degli elettroni, è che la particella pesante procede praticamente non deflessa nel sistema del laboratorio mentre l'elettrone subisce complessivamente una forza che gli conferisce un notevole impulso in direzione ortogonale alla traiettoria della particella pesante.

## 1.1 Interazione coulombiana elastica fra due particelle. Calcolo classico di Bohr

Per i dettagli dei calcoli si rimanda a Evans (Appendix B, pag. 828) e Krane (pagg. 396 ÷ 405).

Il sistema di coordinate del laboratorio (L) è mostrato in fig.1.1.1. Si intende che l'interazione sia elastica e che quindi oltre che alla quantità di moto (qdm) si conservi anche l'energia cinetica. Nel sistema L la situazione iniziale vede una particella di massa  $m_1$  e velocità  $u_1$  che, se non deflessa, passerebbe ad una distanza minima  $b$  (parametro d'urto) da una particella  $m_2$  inizialmente ferma nel sistema L.

Le notazioni, le leggi usate e i risultati di base sono i seguenti:

$$\text{massa ridotta} \quad m_0 = m_1m_2/(m_1 + m_2) \quad (1.1.1)$$

$$\text{conservazione} \quad m_1u_1 = m_1u_3 \cos \theta + m_2u_4 \cos \varphi \quad (1.1.2)$$

$$\text{della qdm} \quad 0 = m_1u_3 \sin \theta - m_2u_4 \sin \varphi \quad (1.1.3)$$

$$\text{conservazione} \quad \frac{1}{2}m_1u_1^2 = \frac{1}{2}m_1u_3^2 + \frac{1}{2}m_2u_4^2 \quad (1.1.4)$$

dell'energia cinetica

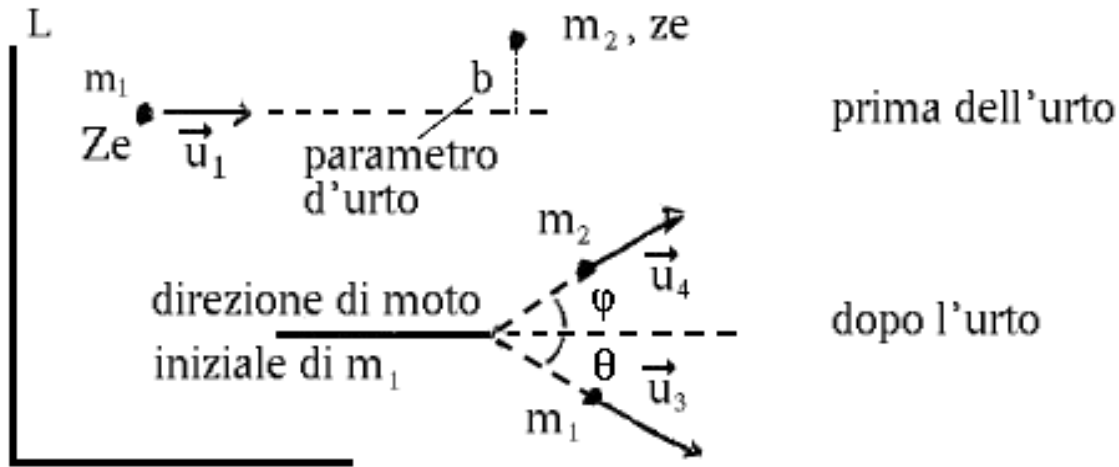


Figura 1.1.1:

$$\text{velocita' } m_2 \text{ dopo urto} \quad u_4 = 2u_1 \frac{m_0}{m_2} \cos \varphi \quad (1.1.5)$$

Nello scattering elastico coulombiano, in una collisione con parametro d'urto nullo fra particelle della stessa carica, si trova che la distanza  $d$  di massimo avvicinamento vale

$$d = 2Zze^2/m_0u_1^2 \quad (1.1.6)$$

Nello scattering elastico coulombiano con parametro d'urto  $b$  vale inoltre la relazione:

$$b = \frac{d}{2} \tan \varphi \quad (1.1.7)$$

*Nota: nel sistema del centro di massa (C) l'angolo di deflessione  $\vartheta$  è unico ed è misurato per la particella incidente  $m_1$  rispetto alla sua direzione di moto iniziale. Nel sistema C vale per lo scattering elastico coulombiano con parametro d'urto  $b$ :*

$$b = \frac{d}{2} \cot \frac{\vartheta}{2}$$

che mostra che per  $b = d/2$  si ha  $\vartheta = 90^\circ$ .

$d$  prende anche il nome di "diametro di collisione". Quando  $b$  è uguale al raggio di collisione ( $= d/2$ ) l'angolo di deflessione nel sistema C è  $90^\circ$  per forze coulombiane sia attrattive che repulsive.

I precedenti risultati consentono di arrivare alle conclusioni che seguono. Nel sistema L, dopo l'urto, la particella incidente ha perso l'energia:

$$Q = \frac{1}{2}m_2u_4^2 = \frac{1}{2}m_2 4u_1^2 \frac{m_0^2}{m_2^2} \cos^2 \varphi = 2 \frac{u_1^2 m_0^2}{m_2} \cos^2 \varphi \quad (1.1.8)$$

Dalla relazione (1.1.7) segue: ‘

$$4b^2/d^2 = \tan^2 \varphi = \sin^2 \varphi / \cos^2 \varphi = (1 - \cos^2 \varphi) / \cos^2 \varphi = 1 / \cos^2 \varphi - 1$$

$$1 / \cos^2 \varphi = 1 + 4b^2/d^2 \quad ; \quad \cos^2 \varphi = \left( \frac{d^2}{4} \right) / \left[ b^2 + \left( \frac{d}{2} \right)^2 \right]$$

Quindi la (1.1.8) può essere riscritta come:

$$Q = \frac{d^2}{2} u_1^2 \frac{m_0^2}{m_2} \frac{1}{b^2 + \left( \frac{d}{2} \right)^2} \quad (1.1.9)$$

e anche

$$b^2 + \left( \frac{d}{2} \right)^2 = \frac{d^2}{2} \frac{u_1^2 m_0^2}{m_2} \frac{1}{Q} \quad (1.1.10)$$

e differenziando e moltiplicando per  $\pi$ :

$$2 \pi b db = \pi d(b^2) = \frac{\pi}{2} d^2 u_1^2 \frac{m_0^2}{m_2} \left( -\frac{dQ}{Q^2} \right) \quad (1.1.11)$$

Le espressioni (1.1.9) e (1.1.11) sono due espressioni classiche esatte. Ambedue possono essere utilizzate, se si suppone che rappresentino adeguatamente il fatto fisico, per determinare la perdita di energia della particella  $m_1$  nell’attraversare la materia.

Per concretezza facciamo l’esempio di un protone di alcuni  $MeV$  di energia che penetri in una sottile lastra di Fe (il cui spessore indicheremo con  $dx$ ). Nel suo cammino interagisce con gli elettroni più o meno legati negli atomi e con i nuclei medesimi. I calcoli precedenti, tenuto conto che la massa del protone è circa 1800 volte più grande di quella dell’elettrone e circa 100 volte minore di quella di un nucleo medio, mostrano che negli urti a piccolo angolo di deflessione (tipicamente inferiore a  $0.1^\circ$ ) il protone perde quantità significative di energia con gli elettroni e quantità molto piccole di energia per gli urti con i nuclei (vedere le deflessioni angolari e le corrispondenti perdite di energia al paragrafo 1.13, dove è riportato un esempio numerico).

## 1.2 Perdite di energia collisionali. Calcolo classico di Bohr

Seguendo Bohr, si utilizza la (1.1.9) per determinare la perdita di energia per unità di percorso della particella incidente. Detti  $N$  la densità numerica degli atomi del materiale frenante (supposto per semplicità monoatomico) e  $Z$  il numero di elettroni per atomo, si evince che attraversando uno strato di materia omogeneo di spessore  $dx$  si incontrano, con parametro d’urto fra  $b$  e  $b + db$ , un numero di elettroni pari a  $N Z 2 \pi b db dx$  e che pertanto la perdita di energia corrispondente è:

$$d^2 \varepsilon = Q N Z 2 \pi b db dx$$

e quindi:

$$\frac{d\varepsilon}{dx} = 2\pi NZ \int_0^\infty Q b db = \pi d^2 u_1^2 \frac{m_0^2}{m_2} NZ \int_0^\infty \frac{b}{b^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} db \quad (1.2.1)$$

e posto  $m_2 = m_e$ , massa di riposo dell'elettrone, e  $d^2 = \frac{4z^2 e^4}{m_0^2 u_1^4}$  (dalla (1.1.6)), segue:

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dx} &= \frac{4z^2 e^4}{m_0^2 u_1^4} \pi u_1^2 \frac{m_0^2}{m_e} NZ \int_0^\infty \frac{b}{b^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} db = \frac{4\pi z^2 e^4}{m_e u_1^2} NZ \int_0^\infty \frac{b}{b^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} db \\ \frac{d\varepsilon}{dx} &= \frac{4\pi z^2 e^4 NZ}{m_e u_1^2} \int_0^\infty \frac{b}{b^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} db \quad \text{erg cm}^{-1} \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

Utilizzando la (1.1.11) si trova che è anche possibile scrivere:

$$d\left(\frac{d\varepsilon}{dx}\right) = QNZd^2 \frac{\pi u_1^2 m_0^2}{2 m_e} \left(-\frac{dQ}{Q^2}\right)$$

e quindi

$$\frac{d\varepsilon}{dx} = \frac{2\pi z^2 e^4 NZ}{m_e u_1^2} \int_0^\infty -\frac{dQ}{Q} \quad (1.2.3)$$

Le due espressioni (1.2.2) e (1.2.3) sono equivalenti e tuttavia Bohr, per determinare le limitazioni sull'integrale, preferì la forma (1.2.2) che conduce naturalmente a problemi sia di natura quantistica che relativistica.

Il risultato dell'integrazione fra parametro d'urto zero e parametro d'urto  $b_{max}$  della (1.2.2) è (Dwight item 121.1):

$$\frac{d\varepsilon}{dx} = \frac{1}{2} d^2 \pi u_1^2 \frac{m_0^2}{m_e} NZ \left\{ \ln \left[ b^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \right] \right\}_0^{b_{max}} \quad (1.2.4)$$

La (1.2.4) mostra che non si può estendere l'integrazione fino all'infinito perché altrimenti si otterrebbe una perdita di energia infinita. Supposto  $b_{max}$  molto maggiore di  $d/2$ , ma finito, si ottiene il risultato:

$$\frac{d\varepsilon}{dx} = \frac{\pi}{2} d^2 u_1^2 \frac{m_0^2}{m_e} NZ \ln \frac{b_{max}}{b_{min}} \quad (1.2.5)$$

che al numeratore del termine logaritmico tiene conto della precedente considerazione e al denominatore stabilisce che il valore di  $b_{min}$  è  $d/2$ .

### 1.3 Perdita di energia collisionale. Calcolo relativistico approssimato

Seguiremo ora un ragionamento approssimato che ha come pregio maggiore quello di indicare come necessaria una discussione generale dei limiti  $b_{min}$  e  $b_{max}$  da utilizzare come



estremi di integrazione per il parametro d'urto.

Per questo si ridiscute la collisione elastica in maniera semplificata tenendo però conto, in modo relativisticamente corretto, della struttura del campo elettromagnetico generato da una carica in moto rettilineo uniforme (formule (C.3) e (C.4) di Appendice).

Seguendo le notazioni della fig.1.3.1, indichiamo con  $ze$  e  $m_1$  la carica e la massa dello ione proiettile di velocità  $u$  nel sistema L e con  $-e$ ,  $m_e$  un elettrone libero, a riposo in L. Sia  $b$  il parametro d'urto. Supponiamo che l'impulso  $\Delta p$  trasferito dallo ione all'elettrone sia così piccolo che la particella incidente prosegua sostanzialmente non deflessa e che l'elettrone non si muova apprezzabilmente durante il tempo di collisione. In queste ipotesi, per trovare l'energia trasferita all'elettrone durante la collisione, basta calcolare l'impulso impartito dal campo elettromagnetico all'elettrone nella posizione  $O$  mantenuta dall'elettrone. Per prima cosa, se l'elettrone rimane fermo, si può ignorare l'azione del campo magnetico  $B_z$ . La particella incidente ha velocità  $u$  ed energia totale  $E = \gamma_u m_1 c^2$  (formula (A.4.1) di Appendice) ed è  $m_1 \gg m_e$ . Data la struttura temporale dei campi  $E_x$  e  $E_y$  da essa generati nel punto  $O$ , dove si trova l'elettrone, è ragionevole ammettere che solo il campo  $E_y$  sia in grado di trasferire impulso. Tale impulso trasversale  $\Delta p$  trasferito

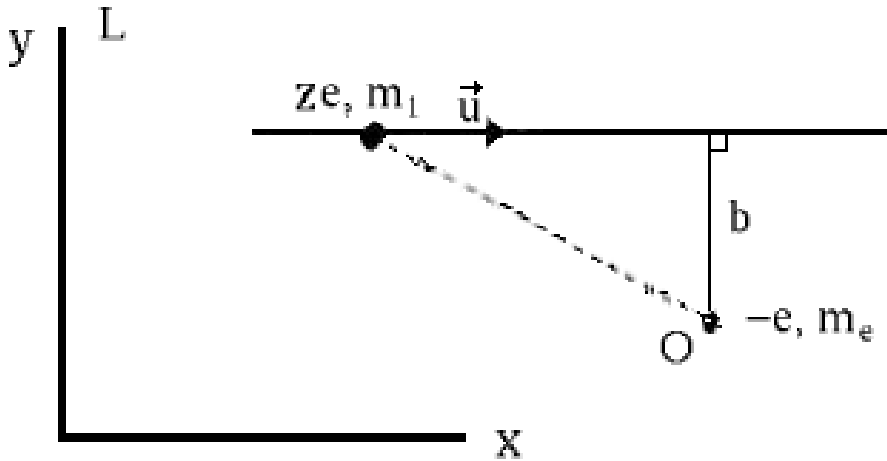


Figura 1.3.1:

all'elettrone è :

$$\begin{aligned} \Delta p &= \int_{-\infty}^{\infty} F dt = \int_{-\infty}^{\infty} eE_y dt = \int_{-\infty}^{\infty} e \frac{ze\gamma_u b}{(b^2 + \gamma_u^2 u^2 t^2)^{3/2}} dt = \\ &= ze^2 \frac{b}{u} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{b^3} \left[ 1 + \frac{\gamma_u^2 u^2 t^2}{b^2} \right]^{-3/2} d(\gamma_u ut) = \frac{ze^2}{bu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Ricordando che l'integrale dell'ultima espressione vale 2 (Dwight item 120.9) si ricava

$$\Delta p = \frac{2ze^2}{bu} \quad (1.3.1)$$

e l'energia trasferita all'elettrone è (si può calcolare classicamente perché  $\Delta p$  e  $\Delta E$  sono piccolissimi):

$$\Delta E(b) = \frac{(\Delta p)^2}{2m_e} = \frac{2z^2 e^4}{m_e u^2} \frac{1}{b^2} \quad (1.3.2)$$

Siccome si suppone  $\Delta p \ll p$  si inferisce per lo ione un angolo di scattering:

$$\theta(b) = \frac{\Delta p}{p} = \frac{2ze^2}{pub} = \frac{2ze^2}{bu} \cdot \frac{1}{\gamma_u m_1 u} = \frac{2ze^2}{m_1 c^2 b} \cdot \frac{1}{\gamma_u \beta^2} \quad rad \quad (1.3.3)$$

NOTA: angolo di scattering espresso in funzione dell'energia cinetica ridotta  $t_1$  della particella incidente:

$$\theta(b) = \frac{2ze^2}{m_1 c^2 b} \frac{1}{\frac{T_1}{m_1 c^2} \left( \frac{T_1}{m_1 c^2} + 2 \right)} = \frac{2ze^2}{m_1 c^2 b} \frac{1}{t_1 (t_1 + 2)}$$

che per lo scattering protone-elettrone diventa

$$\theta(b) = \frac{2e^2}{m_p c^2 b} \frac{1}{\frac{T}{m_p c^2} \left( \frac{T}{m_p c^2} + 2 \right)}$$

Numericamente si ricava

$$\theta(b) = \frac{2 \cdot (4.8)^2 \cdot 10^{-20}}{1.67 \cdot 10^{-24} \cdot 9 \cdot 10^{20}} \frac{1}{b} [ \quad ] = \frac{3 \cdot 10^{-16}}{b} [ \quad ]$$

che per  $t = 10^{-3}$ ,  $t = 1$ ,  $t = 10^2$  assume rispettivamente i valori  $\theta(b) = 1.5 \cdot 10^{-13}/b$ ,  $\theta(b) = 2.0 \cdot 10^{-16}/b$ ,  $\theta(b) = 3.0 \cdot 10^{-18}/b$ .

Utilizzando i risultati (1.4.2) e (1.4.3) ottenuti nel paragrafo seguente per  $b_{min}^{(c)}$  e  $b_{min}^{(q)}$ , si può verificare che per protoni di energia 1 MeV ÷ 100 GeV si ha  $\theta(b_{min}) \sim 10^{-5} \div 10^{-6} \text{ rad} [= 5.7 \cdot (10^{-4} \div 10^{-5}) \text{ gradi}]$ .

Ritornando a valutare la perdita di energia di uno ione nell'attraversare uno strato  $dx$  di materia con  $N$  atomi per  $cm^3$  e  $Z$  elettroni per atomo, si ha:

$$\frac{d\varepsilon}{dx} = 2\pi NZ \int_{b_{min}}^{b_{max}} \Delta E(b) b db$$

e quindi

$$\frac{d\varepsilon}{dx} = 4\pi NZ \frac{z^2 e^4}{m_1 u^2} \ln \frac{b_{max}}{b_{min}} \quad (1.3.4)$$

La (1.3.4) mostra divergenza sia per  $b_{min} \rightarrow 0$  che per  $b_{max} \rightarrow \infty$ .

## 1.4 Il limite $b_{min}$

Discutiamo altri possibili criteri di valutazione di  $b_{min}$  diversi da quello naturalmente introdotto come  $d/2$  nella teoria classica di Bohr.

- a) Utilizziamo l'energia massima trasferibile in un urto centrale ione pesante - elettrone riportata nella formula (B.4.19) dell'Appendice:

$$\Delta E(b_{min}) = \Delta E_{max} = 2m_e c^2 \gamma_u^2 \beta_u^2 \quad (1.4.1)$$

essendo  $u$  la velocità dello ione. Sostituendo nella (1.3.2) si ottiene un valore "classico" per  $b_{min}$ :

$$b_{min}^{(c)} = \frac{ze^2}{m_e \gamma_u \beta_u^2 c^2} = \frac{ze^2}{m_e c^2} \cdot \frac{1}{\gamma_u \beta_u^2} \quad (1.4.2)$$

La (1.4.2) riproduce il risultato di Bohr a bassa velocità ed indica che alle alte velocità c'è la possibilità di avere  $b_{min}$  comunque piccolo.

- b) Un altro argomento atto a determinare  $b_{min}$  è fornito dall'ipotesi che l'elettrone si sposti poco durante la collisione. Si valuta lo spostamento  $\delta$  dell'elettrone come prodotto di una velocità media  $\Delta p/2m_e$  per il tempo  $\Delta t$  della durata dell'impulso campo e.m. creato dallo ione e data dalla formula (C.5) dell'Appendice. Preso  $b_{min} = \delta$  il risultato coincide con (1.4.2).
- c) Un diverso approccio è quello di considerare che non ha senso "avvicinarsi" all'elettrone all'interno della sua indeterminazione in posizione imposta dal principio di Heisenberg. Per questo, basta mettersi nel sistema di riferimento dello ione incidente e osservare che, essendo  $u$  il modulo della velocità dell'elettrone, il suo impulso è  $p' = \gamma_u m_e u$ , formula (A.2.1), e che quindi un limite quantistico "naturale" per  $b_{min}$  è:

$$b_{min}^{(q)} = \frac{\hbar}{m_e \gamma_u u} = \frac{\hbar}{m_e c} \cdot \frac{1}{\gamma_u \beta_u}$$

Essendo  $m_1 c^2$  l'energia di riposo dello ione e utilizzando l'energia cinetica ridotta  $t_1 = T_1/m_1 c^2$  si riscrive anche:

$$b_{min}^{(q)} = \frac{\hbar}{m_e c} \cdot [t_1(t_1 + 2)]^{-1/2} \quad (1.4.3)$$

NOTA: valutazione di  $b_{min}^{(q)}$  in funzione dell'energia cinetica ridotta dello ione:

$$\begin{aligned} b_{min}^{(q)} &= 4 \cdot 10^{-11} [t_1(t_1 + 2)]^{-1/2} & \text{se } t_1 = 10^{-2} & \rightarrow b_{min}^{(q)} \sim 2.5 \cdot 10^{-10} \text{ cm} = 2500 \text{ fm} \\ & & \text{se } t_1 = 1 & \rightarrow b_{min}^{(q)} \sim 2.2 \cdot 10^{-11} \text{ cm} = 220 \text{ fm} \\ & & \text{se } t_1 = 10^2 & \rightarrow b_{min}^{(q)} \sim 4 \cdot 10^{-13} \text{ cm} = 4 \text{ fm} \end{aligned}$$

Per fare un confronto fra i risultati (1.4.2) e (1.4.3) introduciamo il rapporto  $\eta$  fra i due:

$$\eta = \frac{b_{min}^{(c)}}{b_{min}^{(a)}} = \frac{ze^2}{m_e c^2} \cdot \frac{1}{\gamma_u \beta_u^2} \cdot \frac{m_e c \gamma_u \beta_u}{\hbar} = \frac{ze^2}{\hbar c} \cdot \frac{1}{\beta_u} \quad (1.4.4)$$

La regola pratica è quella di utilizzare il valore  $b_{min}^{(c)}$  per  $\eta > 1$  e  $b_{min}^{(a)}$  per  $\eta < 1$ . Il valore rilevante è  $\eta = 1$  che si ottiene per:

$$\beta_u = \frac{ze^2}{\hbar c} = z \frac{4.8^2 \cdot 10^{-20}}{10^{-27} \cdot 3 \cdot 10^{10}} \sim 7 \cdot 10^{-3} z = N \quad (1.4.5)$$

esprimendo  $\beta_u$  in funzione di  $t_1$ , si ha:

$$\beta_u = [t_1(t_1 + 2)]^{1/2} / (t_1 + 1) \quad (1.4.6)$$

sostituendo la (1.4.6) nella (1.4.5) e risolvendo per  $t_1$ , si ottiene:

$$t_1 = -1 + (1 - N^2)^{-1/2} \quad (1.4.7)$$

Per ioni, si hanno i casi limite:

a) per  $z = 1$ :  $t_1 \simeq N^2/2 \simeq 25 \cdot 10^{-6}$  che, nel caso di protoni, è un'energia di circa  $25 \text{ keV}$ .  
b) per uno ione di massa 100 e  $z_{eff} \simeq 10$ , si ha  $N = 7 \cdot 10^{-2}$  e  $N^2 \simeq 50 \cdot 10^{-4}$ ; vale ancora  $t_1 \simeq N^2/2 \simeq 25 \cdot 10^{-4}$  ossia  $T \sim 25 \cdot 10^{-4} \cdot 100 \cdot 1000 \text{ MeV} = 250 \text{ MeV}$ , cioè  $\sim 2.5 \text{ MeV/nucleone}$ ; per energie cinetiche superiori a  $\sim 2.5 \text{ MeV/n}$  si usa la formula quantistica.

c) per uno ione ipotetico con  $A = 120$  e  $z = 50$ , si ha  $N = 50 \cdot 7 \cdot 10^{-3} = 0.35$  e dalla (1.4.7) si ricava  $t_1 = 0.067$  ossia  $T = 0.067 \cdot 931 \text{ (MeV/n)} \cdot 120 \simeq 7.5 \text{ GeV}$ .

d) per uno ione ipotetico con  $A = 250$  e  $z = 100$ , si ha  $N = 100 \cdot 7 \cdot 10^{-3} = 0.7$  e dalla (1.4.7) si ricava  $t_1 = 0.4$  ossia  $T = 0.4 \cdot 931 \text{ (MeV/n)} \cdot 250 \simeq 93 \text{ GeV}$ .

Il corrispondente  $b_{min}$  è  $\sim 220 \text{ fm}$  (da confrontare con un raggio dello ione di circa  $8 \text{ fm}$ ) ovviamente dovuto all'indeterminazione in posizione dello ione.

## 1.5 Il limite $b_{max}$

Per collisioni a grande distanza il risultato (1.3.2) per  $\Delta E(b)$  è sicuramente da rivedere perché non tiene conto dell'energia di legame atomica degli elettroni. L'ipotesi fatta per il calcolo della (1.3.2) è che gli elettroni siano liberi invece che legati negli atomi. Finché il tempo di collisione dato dalla formula (C.5) di Appendice:  $\Delta t \simeq 1.5b/\gamma_u \beta_u c$  è breve rispetto al periodo "orbitale" degli elettroni si può supporre che la collisione sia così rapida da poter trattare l'elettrone come libero. Se, viceversa, il tempo di collisione è molto lungo rispetto al periodo orbitale, l'elettrone descrive molte orbite mentre la particella passa "lentamente" e l'elettrone è influenzato "adiabaticamente" dal campo e.m. senza cioè un importante trasferimento di energia [v. Fermi, problema a pag.29: "principio di invarianza adiabatica"; giustificazione classica: l'elettrone descrive molte orbite nel campo quasi statico dello ione, per "metà" tempo acquistando energia e per "metà" tempo perdendone altrettanta]. Si può quindi pensare che  $b_{max}$  sia stabilito dalla

relazione che il tempo di collisione  $\Delta t$  sia al più dell'ordine del periodo orbitale  $\sim 1/\omega$  e cioè:

$$\Delta t(b_{max}) \sim 1/\omega \quad (1.5.1)$$

e dalla formula (C.5) di Appendice segue:

$$\frac{1.5 \cdot b_{max}}{\gamma_u \beta_u c} \sim 1/\omega \quad ; \quad b_{max} = \frac{\gamma_u \beta_u c}{1.5 \cdot \omega} \quad (1.5.2)$$

NOTA: il valore di  $b_{max}$  espresso dalla (1.5.2) si può ritrovare calcolando il trasferimento di energia dal campo e.m. generato dalla particella in moto, all'elettrone supposto legato armonicamente ad un centro fisso di richiamo (il nucleo) come in Jackson par. 13.2 pag. 623.

Riportiamo la soluzione per  $\Delta E(b)$  che fa intervenire le funzioni modificate di Bessel ( $K_\nu$ ) di ordine zero e di ordine uno (per la definizione delle funzioni  $K_\nu$  vedere Jackson (3.101) pag. 107 e per le forme limite per argomenti  $\gg 1$  e  $\ll 1$  vedere (3.103) e (3.104) pag. 108):

$$\Delta E(b) = \frac{2z^2 e^4}{m_e c^2 \beta^2} \cdot \frac{1}{b^2} \cdot \left[ \xi^2 K_1^2(\xi) + \frac{1}{\gamma^2} \xi^2 K_0^2(\xi) \right] \quad (1.5.3)$$

con

$$\xi = \frac{\omega b}{\gamma \beta c} \quad (1.5.4)$$

La perdita di energia nell'attraversare uno strato  $dx$  di materiale che contiene  $N$  atomi per  $cm^3$  di carica atomica  $Z$ , per effetto dell'interazione con elettroni caratterizzati da una "frequenza di legame"  $\omega_j$ , si scrive (considerando per il momento per ogni atomo solo un elettrone con tale legame):

$$\left( \frac{dE}{dx} \right)_j = 2\pi N \int_{b_{min}}^{\infty} \Delta E_j(b) b db \quad (1.5.5)$$

e il risultato dell'integrazione è:

$$\left( \frac{dE}{dx} \right)_j = \frac{4\pi N z^2 e^4}{m_e c^2 \beta^2} \left\{ \xi_{jmin} K_1(\xi_{jmin}) K_0(\xi_{jmin}) - \frac{\beta^2}{2} \xi_{jmin}^2 [K_1^2(\xi_{jmin}) - K_0^2(\xi_{jmin})] \right\} \quad (1.5.6)$$

con  $\xi_{jmin} = \omega_j b_{min} / \gamma \beta c \ll 1$ , si possono utilizzare per  $K_0$  e  $K_1$  le forme limite date dalle (3.103) di Jackson e ottenere (trascurando termini che hanno a fattore  $\xi_{jmin}$ ):

$$\frac{dE}{dx} = \sum_{j=1}^Z \left( \frac{dE}{dx} \right)_j = 4\pi N Z \frac{z^2 e^4}{m_e c^2 \beta^2} \sum_{j=1}^Z \frac{1}{Z} \left[ \ln \frac{1.123}{\xi_{jmin}} - \frac{\beta^2}{2} \right]$$

In particolare:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^Z \frac{1}{Z} \left[ \ln \frac{1.123\gamma\beta c}{b_{min}} - \ln \omega_j - \frac{\beta^2}{2} \right] &= \sum_{j=1}^Z \left[ \frac{1}{Z} \ln \frac{1.123\gamma\beta c}{b_{min}} - \ln \omega_j^{\frac{1}{Z}} - \frac{1}{Z} \cdot \frac{\beta^2}{2} \right] = \\
&= \ln \frac{1.123\gamma\beta c}{b_{min}} - \sum_{j=1}^Z \ln \omega_j^{\frac{1}{Z}} - \frac{\beta^2}{2} = \ln \frac{1.123\gamma\beta c}{b_{min}} - \ln \prod_{j=1}^Z \omega_j^{\frac{1}{Z}} - \frac{\beta^2}{2} = \\
&= \left\{ \prod_{j=1}^Z \omega_j^{\frac{1}{Z}} = \text{media geometrica } \langle \omega \rangle \right\} = \ln \frac{1.123\gamma\beta c}{\langle \omega \rangle b_{min}} - \frac{\beta^2}{2}
\end{aligned}$$

Si ha pertanto:

$$\frac{dE}{dx} = 4\pi N Z \frac{z^2 e^4}{m_e c^2 \beta^2} \left[ \ln \frac{1.123\gamma\beta c}{\langle \omega \rangle b_{min}} - \frac{\beta^2}{2} \right] \quad (1.5.7)$$

## 1.6 La formula del $(dE/dx)_{coll}$ per particelle pesanti. Confronto con la formula di Bethe-Bloch

Vista la procedura seguita, è naturale attribuire alla presenza del legame atomico dell'elettrone il fatto che esista un limite superiore per il parametro d'urto  $b$  e che sia:

$$b_{max} = \frac{1.123\gamma\beta c}{\langle \omega \rangle} \quad (1.6.1)$$

che, come si vede, è strutturalmente molto simile all'espressione (1.5.2) ottenuta con ragionamento semplificato.

Se poi, secondo il principio di indeterminazione, si introduce  $b_{min}^{(q)} = \hbar/\gamma m_e \beta c$  si ottiene:

$$\frac{b_{max}}{b_{min}} = \frac{1.123\gamma\beta c}{\langle \omega \rangle} \cdot \frac{\gamma m_e \beta c}{\hbar} = \frac{1.123 m_e c^2 \gamma^2 \beta^2}{\hbar \langle \omega \rangle} \quad (1.6.2)$$

Interpretando  $\hbar \langle \omega \rangle$  come l'energia media  $I$  di ionizzazione degli elettroni atomici, si ottiene:

$$\frac{dE}{dx} = 4\pi N Z \frac{z^2 e^4}{m_e c^2 \beta^2} \left[ \ln \frac{1.123 m_e c^2 \gamma^2 \beta^2}{I} - \frac{\beta^2}{2} \right] \quad (1.6.3)$$

Questo risultato, ricavato con ragionamenti classici supplementati con argomentazioni di tipo quantistico, è in sostanziale accordo con il calcolo quanto-relativistico di Bethe-Bloch che prevede il seguente risultato (universalmente utilizzato):

$$\frac{dE}{dx} = 4\pi N Z \frac{z^2 e^4}{m_e c^2 \beta^2} \left[ \ln \frac{2 m_e c^2 \gamma^2 \beta^2}{I} - \beta^2 \right] \quad (1.6.4)$$

Calcoli dovuti a Bloch e una notevole serie di risultati sperimentali suggeriscono che una ragionevole determinazione per l'energia media di ionizzazione  $I$  sia la seguente [per maggiori dettagli v. Particle Data Group fig.27.5 e per una tabulazione v. NIST: X-ray mass

attenuation coefficients (<http://physics.nist.gov/PhysRefData/XrayMassCoef/tab1.html>) dove sono riportati anche, per tutti gli elementi,  $Z/A$  e densità]:

$$I = 12 Z \quad eV \quad (1.6.5)$$

È utile esprimere la (1.6.4) in termini dell'energia cinetica della particella incidente misurata in unità della sua massa di riposo. Chiamando con  $t$  l'energia cinetica  $T_1$  della particella incidente divisa per la sua massa di riposo  $m_1c^2$  si scrive:

$$\frac{dE}{dx} = 4\pi NZ \frac{z^2 e^4}{m_e c^2} \left\{ \frac{t(t+2)+1}{t(t+2)} \ln \left[ \frac{2m_e c^2}{I} t(t+2) \right] - 1 \right\} \quad (1.6.6)$$

Esprimendo la densità numerica atomica  $N$  tramite la densità di massa  $\rho$  della sostanza, la sua massa molare  $M_m$  e il numero di Avogadro  $N_A$ , si misura la perdita di energia nelle unità "naturali"  $MeV/mg \text{ cm}^2$ . La (1.6.6) diventa:

$$\frac{dE}{d(\rho x)} = \frac{4\pi N_A e^4}{m_e c^2} \left( \frac{Z}{M_m} \right) z^2 \{ \quad \} = 4.91 \cdot 10^{-7} \left( \frac{Z}{M_m} \right) z^2 \{ \quad \} \quad (1.6.7)$$

Salvo che per l'idrogeno vale inoltre  $(Z/M_m) = 0.45 \pm 0.05 \text{ g}^{-1} \text{ mole}$ , per cui, per tutti gli altri atomi, in prima approssimazione si ha:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{d(\rho x)} \sim 2.45 \cdot 10^{-7} z^2 \{ \} \frac{erg}{g \text{ cm}^{-2}} &= 1.53 \cdot 10^{-4} z^2 \{ \} \frac{MeV}{mg \text{ cm}^{-2}} = \\ &0.153 z^2 \{ \} \frac{keV}{mg \text{ cm}^{-2}} \end{aligned} \quad (1.6.8)$$

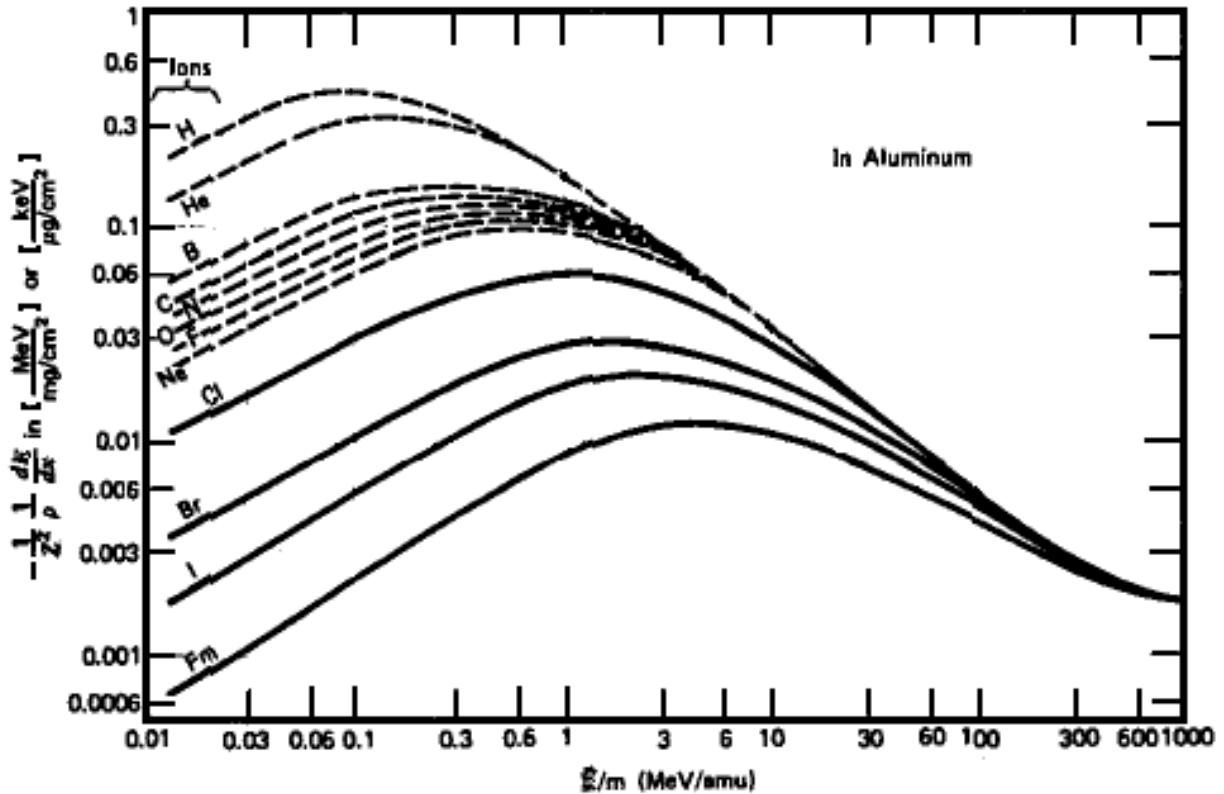
## 1.7 Discussione del limite di validità della formula di Bethe-Bloch a bassa velocità dello ione incidente: a) carica efficace dello ione, b) non efficacia degli elettroni $K, L, \dots$

La formula (1.6.6) è in ottimo accordo con i risultati sperimentali per  $t < 1$ . Inoltre, misurando gli spessori in unità  $\rho x$  è sostanzialmente indipendente dallo stato di aggregazione e quasi indipendente dalla particolare sostanza.

Un differente esempio di tabulazione universale è riportato in forma grafica nella fig.2.11 di Knoll per differenti tipi di ioni in Alluminio. Questa tabulazione mette in evidenza una ovvia limitazione nell'applicazione della formula di Bethe-Bloch per piccole energie cinetiche, dovuta al fatto che gli ioni iniziano a neutralizzarsi e conseguentemente diminuiscono la loro perdita di energia. Si trova sperimentalmente (non esistono previsioni teoriche attendibili) che il rapporto delle sezioni d'urto di acquisto e cessione di elettroni da parte dello ione è sostanzialmente indipendente dal materiale assorbente e che dipende solo dalla velocità dello ione. La fig.1.1 di Evans (pag.636) riporta la carica media per particelle alfa e per protoni in funzione della velocità.

Risulta che il protone è per il 50% neutro quando la sua energia cinetica è  $\sim 50 \text{ keV}$  e praticamente ionizzato a  $\sim 200 \text{ keV}$ . Per le alfa i valori corrispondenti sono  $\sim 350 \text{ keV}$  e  $\sim 1.5 \text{ MeV}$ . Per energie via via decrescenti lo stopping-power diminuisce e il meccanismo

principale di perdita d'energia è tramite gli urti ione-atomo e atomo-atomo. Questa teoria, sulla quale non ci soffermiamo, è stata sviluppata da Lindhard et al. (v. Particle Data Group) ed è importante nel caso di ioni pesanti.



**Figure 2-11** Plots showing the specific energy loss of various heavy ions in aluminum. The abscissa is the ion energy divided by its mass, and the ordinate is  $-dE/dx$  divided by the density of aluminum and the square of the ion atomic number. Typical fission fragments (e.g., iodine) show a continuously decreasing  $-dE/dx$  while slowing from their initial energy ( $\sim 1$  MeV/amu). (From Northcliffe and Schilling.<sup>7</sup>)

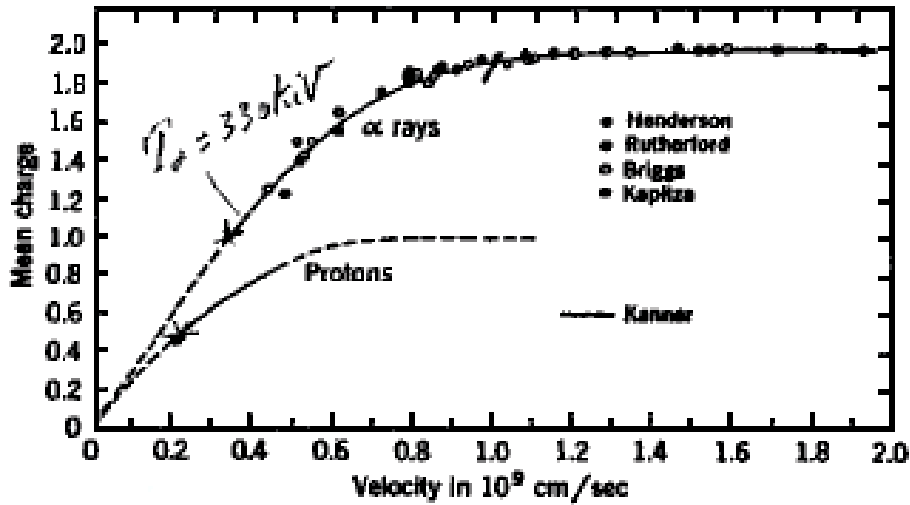
Figura 1.7.1: Knoll fig.2.11

Un'altro tipo di correzione, sempre a bassa energia, è talvolta introdotto per tenere conto che quando lo ione ha bassa velocità non riesce ad eccitare gli elettroni  $K$ , e poi gli  $L$  e così via, e che, pertanto, l'energia di ionizzazione  $I$  diventa funzione della velocità.

NOTA: In Evans (pag.638 e 639) è riportato un fattore correttivo  $C_K$  per tenere conto della non partecipazione degli elettroni  $K$  del materiale a determinare il numero atomico  $Z$  che figura nella formula del  $dE/dx$  di Bethe-Bloch. Nel limite non relativistico, la correzione è del tipo  $[\ln(2m_e u_1^2/I) - C_K/Z]$ . Per fare un esempio, nel caso dell'Alluminio, la previsione è che il problema possa diventare rilevante per protoni di energia inferiore a  $\sim 4$  MeV.

A pag.639-640 di Evans è riportato il seguente risultato:





**Fig. 1.1 Mean charge  $z_{av}$  for  $\alpha$  rays and protons, due to capture and loss of electrons.**

Figura 1.7.2: Evans fig.1.1

valore sperimentale della perdita di energia di protoni di 1 MeV in Al;  $\sim 177 \text{ keV}/(\text{mg cm}^{-2})$ ; con  $Z_{Al} = 13$ ,  $M_m Al = 27 \text{ g mole}^{-1}$ ,  $\rho_{Al} = 2.7 \text{ g cm}^{-3}$ . Per fare un confronto usiamo la formula di Bethe-Bloch senza correzione  $C_K$ , per  $I$  prendiamo un valore circa medio ( $I = 150 \text{ eV}$ ) fra quello riportato da Krane ( $I \sim 10Z = 130 \text{ eV}$ ) e quello riportato da Bloch nel lavoro originale ( $I \sim 13.5Z = 175 \text{ eV}$ ).

Il risultato sperimentale, sopra citato, espresso in  $\text{erg cm}^{-1}$ , è:

$$177 \text{ keV}/(\text{mg cm}^{-2}) \rightarrow 177 \text{ MeV}/(\text{g cm}^{-2}) \cdot 2.7 \text{ g cm}^{-3} = 478 \text{ MeV cm}^{-1} = 7.65 \cdot 10^{-4} \text{ erg cm}^{-1}.$$

Il risultato di Bethe-Bloch è il seguente:

$$\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi e^4 m_p}{2m_e \left(\frac{1}{2}\right) m_p u_p^2} \left(\frac{N_A}{M_m Al}\right) \rho_{Al} Z_{Al} \ln \left[ \left(\frac{4m_e}{m_p}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \frac{m_p u_p^2}{I} \right] = 7.89 \cdot 10^{-4} \text{ erg cm}^{-1}$$

I due risultati differiscono di circa il 3%, mostrando così che in casi simili la correzione è piccola e rapidamente oscurata dalla variazione della carica efficace.

## 1.8 Carattere medio del $(dE/dx)$ . Concetto di sparpagliamento (straggling) in energia

Questa parte è trattata in maniera esauriente in Knoll fig. 2.4 di pag.34.

## 1.9 Limitazioni e correzioni della formula di Bethe-Bloch per $T_1 > m_1 c^2$ ( $t_1 > 1$ )

La formula (1.6.4) prevede un aumento di perdita di energia per energie cinetiche della particella incidente maggiori della sua energia di riposo, ma tale aumento è circa doppio di quello osservato sperimentalmente. Nel 1940 Fermi spiegò questa discrepanza osservando che, in particolare ad alta velocità, il campo e.m. diventa sempre più trasversale ed influenza atomi sempre più lontani dalla traiettoria dello ione. La formula di Bethe-Bloch non tiene conto della costante dielettrica del mezzo e pertanto, in specie per mezzi allo stato condensato, prevede una perdita di energia più elevata di quella reale (questo perchè sovrastima  $b_{max}$ ).

Un trattamento teorico, relativamente completo, si può trovare in Jackson par.13.4 (Density effect in collision energy loss). Per  $T_1 > (3 \div 4) m_1 c^2$  è praticamente  $\beta = 1$ . In questo limite, la perdita di energia trovata da Fermi (che si dovrebbe applicare per parametri d'impatto  $b$  almeno superiori alla dimensione atomica "a" degli atomi bersaglio), ipotizzando una suscettività dielettrica costituita di Lorentziane (corrispondenti alle frequenze di risonanza nell'atomo: si ammette che si tratti solo di polarizzazione per deformazione), è la seguente:

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{b>a} (\beta \rightarrow 1) = \frac{(ze)^2 \omega_p^2}{c^2} \ln \frac{1.123c}{a\omega_p} \quad (1.9.1)$$

con  $\omega_p$  (frequenza di plasma elettronico):

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi N Z e^2}{m_e} \quad (1.9.2)$$

L'espressione di Bethe-Bloch (scritta alla maniera di Bohr) diventa:

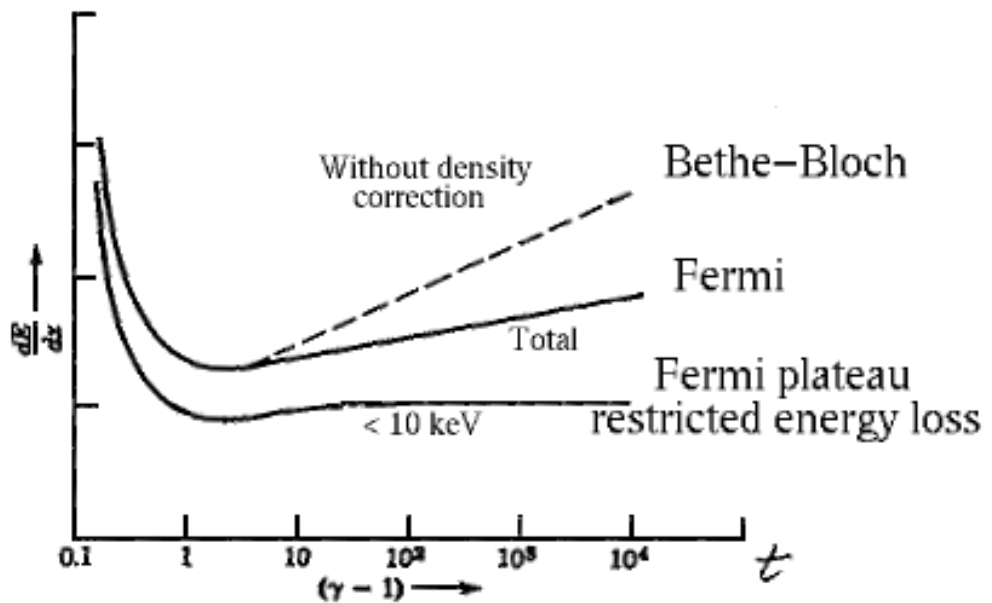
$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{b>a} (\beta \rightarrow 1) = \frac{(ze)^2 \omega_p^2}{c^2} \left[ \ln \frac{1.123\gamma c}{a <\omega>} - \frac{1}{2} \right] \quad (1.9.3)$$

Poiché la maggior parte delle valutazioni di perdita di energia si basano sulla formula di Bethe-Bloch è conveniente determinare la differenza in alta energia fra la (1.9.3) e la (1.9.1), ottenendo così l'eccesso di perdita di energia previsto dalla formula di Bethe-Bloch (dato dalla differenza della (1.9.3) e della (1.9.1)):

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} \Delta \left(\frac{dE}{dx}\right) = \frac{(ze)^2 \omega_p^2}{c^2} \left[ \ln \frac{\gamma \omega_p}{<\omega>} - \frac{1}{2} \right] = \frac{(ze)^2 \omega_p^2}{c^2} \ln \frac{\gamma \omega_p}{1.65 <\omega>} \quad (1.9.4)$$

La fig. 13.5 di Jackson (pag.637) riassume visivamente la situazione.

Si suggerisce di studiare con attenzione i seguenti grafici: Fermi fig.II.4 pag.33; Knoll fig.2.3 pag.34, fig.2.9 pag.39, fig.2.10 pag.40.



**Fig. 13.5** Energy loss, including the density effect. The dotted curve is the total energy loss without density correction. The solid curves have the density effect incorporated, the upper one being the total energy loss and the lower one the energy loss due to individual energy transfers of less than 10 keV.

Figura 1.9.1: Jackson fig.13.5

Basati sulla formula di Bethe-Bloch sono i programmi di calcolo numerico che permettono di determinare la curva di Bragg, il range medio e lo straggling, come per esempio ASTAR e ESTAR

## 1.10 Range

La formula di Bethe-Bloch trova un'applicazione diretta, ed anche la possibilità di una verifica sperimentale diretta, tutte le volte che lo spessore di materiale attraversato è sufficientemente piccolo perché si possa utilizzare il valore del  $dE/dx$  relativo all'energia d'ingresso per tutto lo spessore.

In via di principio la formula può anche essere utilizzata per determinare il percorso medio di una particella di assegnata energia iniziale in un assegnato materiale. Tuttavia, il fatto di non riuscire a fornire una corretta risposta alle basse energie (vedi par. 1.7 e fig.1.1 di Evans p.636) impedisce un calcolo soddisfacente del range, che, viceversa, può essere determinato sperimentalmente in più casi con discreta accuratezza.

Particolarmente importanti sono i seguenti materiali:

- a) l'aria secca in condizioni standard, utilizzata nelle camere di ionizzazione
- b) differenti tipi di miscele gassose, fra le quali le più diffuse, per contatori proporzionali,

## Ch. II Ionization of a Gas

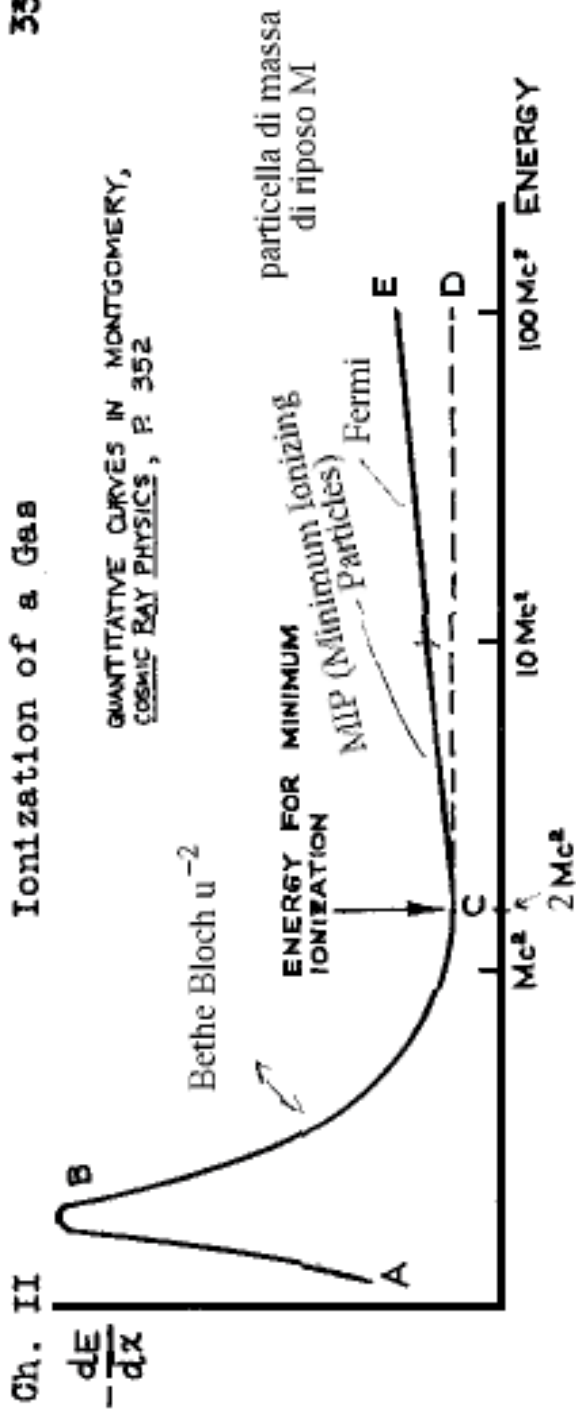
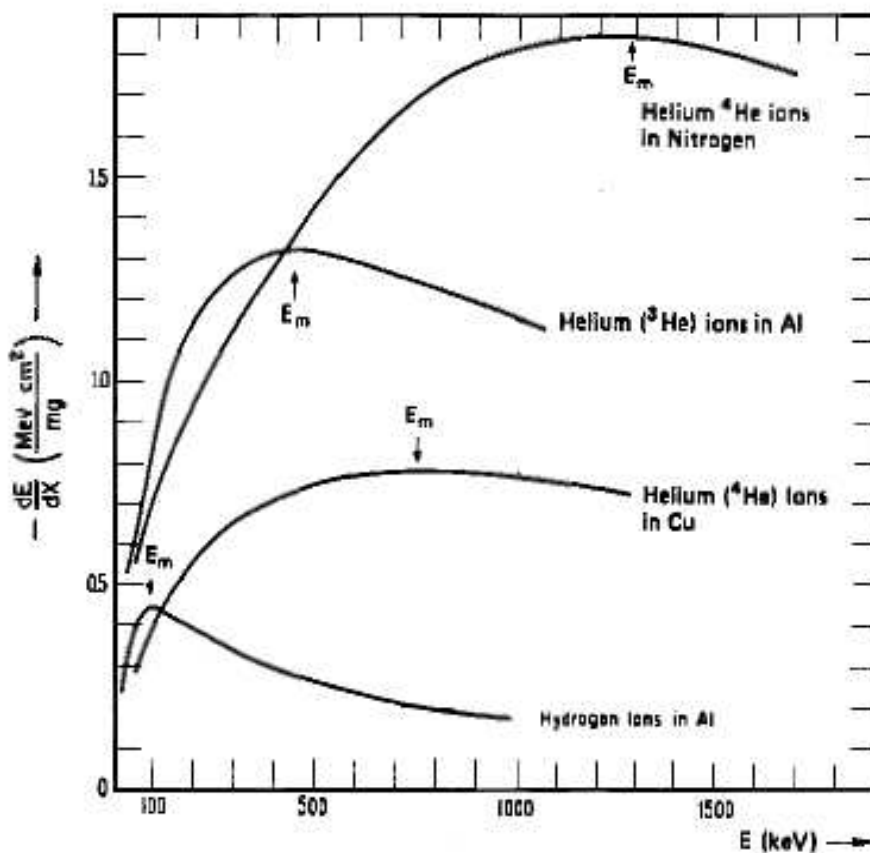


Figura 1.9.2: Fermi fig.II.4 pag.33

sono (10%CH<sub>4</sub>+ 90%Ar), (3%CO<sub>2</sub>+ 97%Ar) e (3%CO<sub>2</sub>+ 97%Xe)

c) differenti tipi di sostanze plastiche utilizzate nei rivelatori a scintillazione

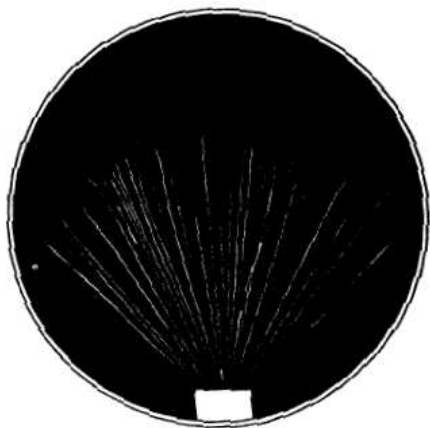
d) lo Ioduro di Sodio e lo Ioduro di Cesio anche essi utilizzati nei rivelatori a scintillazione



**Figure 2-3** Specific energy loss as a function of energy for hydrogen and helium ions.  $E_m$  indicates the energy at which  $dE/dx$  is maximized. (From Wilken and Fritz.<sup>2</sup>)

Figura 1.9.3: Knoll fig.2.3 pag.34

per rivelazione di  $\gamma$ , X e particelle cariche



**Figure 7.1** Cloud chamber tracks of  $\alpha$  particles from the decay of  $^{210}\text{Po}$ .

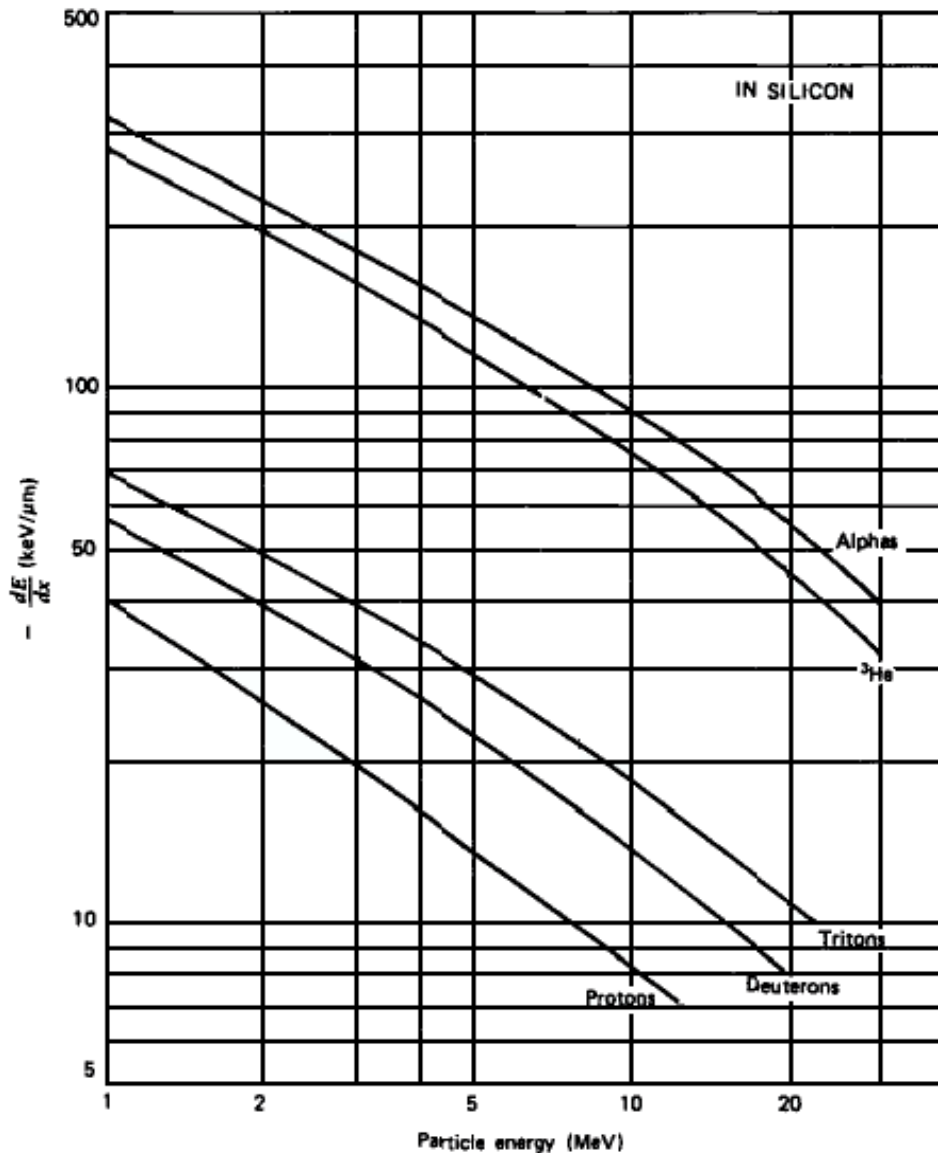
e) il Silicio, utilizzato per la rivelazione di particelle cariche e di raggi X  
 f) il Germanio, prevalentemente utilizzato per la rivelazione di raggi X e  $\gamma$   
 Inoltre:

g) il Piombo, il Rame e l'Alluminio, spesso utilizzati per realizzare schermi graduati

h) il Ferro, utilizzato come attenuatore nei calorimetri di alta energia e per richiudere i circuiti magnetici anche negli elettromagneti superconduttori.

La fig.7.1 riportata da Krane (pag. 194)

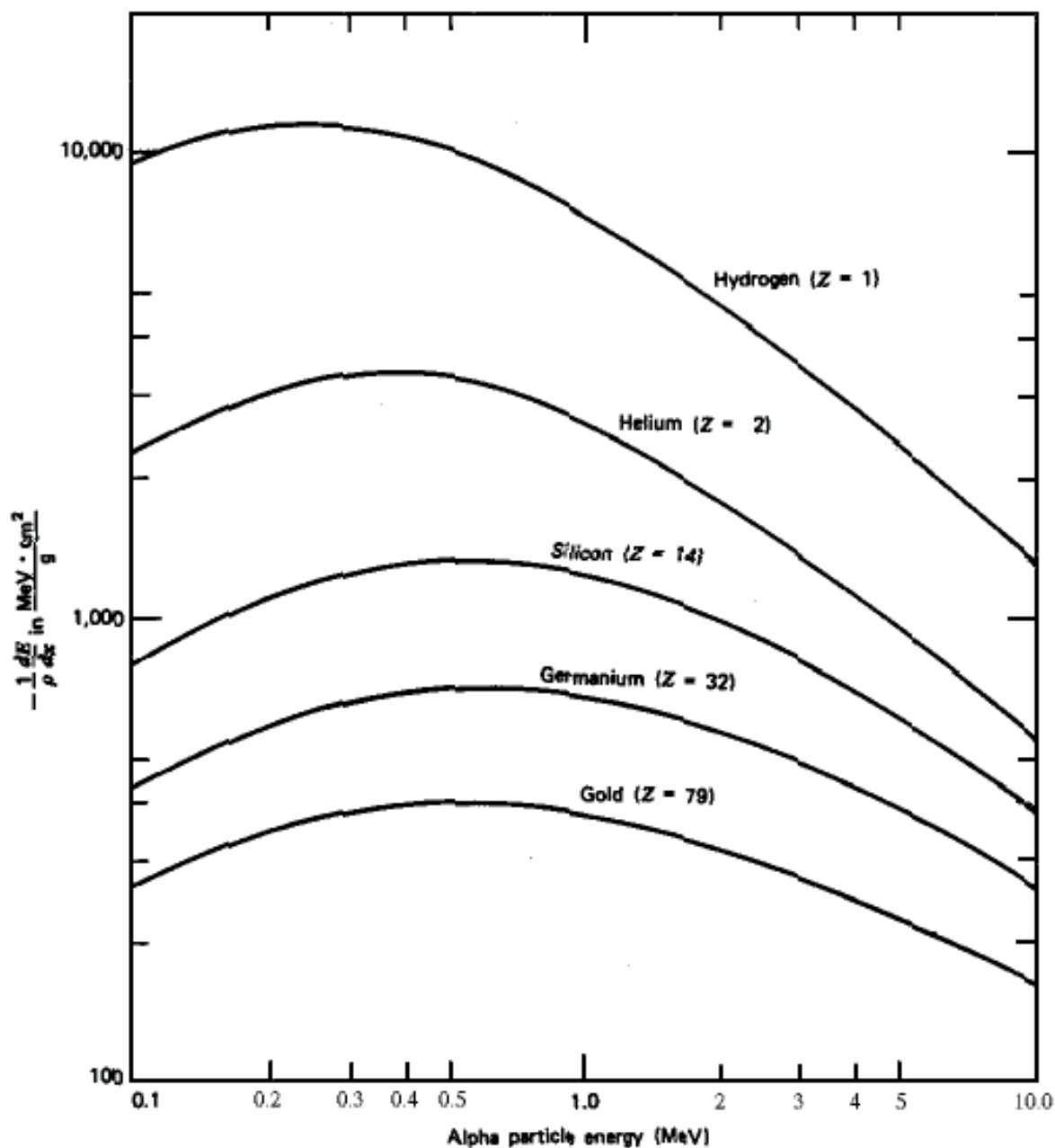
Figura 1.10.1: Krane fig.7.1



**Figure 2-9** The specific energy loss calculated for different charged particles in silicon. (From Skyrme.<sup>3</sup>)

Figura 1.9.4: Knoll fig.2.9 pag.39

dà un'idea concreta del concetto di range medio e di fluttuazione (straggling, sparpagliamento) attorno al range medio. Per particelle pesanti di energia relativamente bassa è un concetto ben definito e riassunto adeguatamente in Krane (pagg. 194-195 figg.7.1 e 7.2) e in Knoll (pagg. 35-38 e figg.2.5, 2.6, 2.7, 2.8).

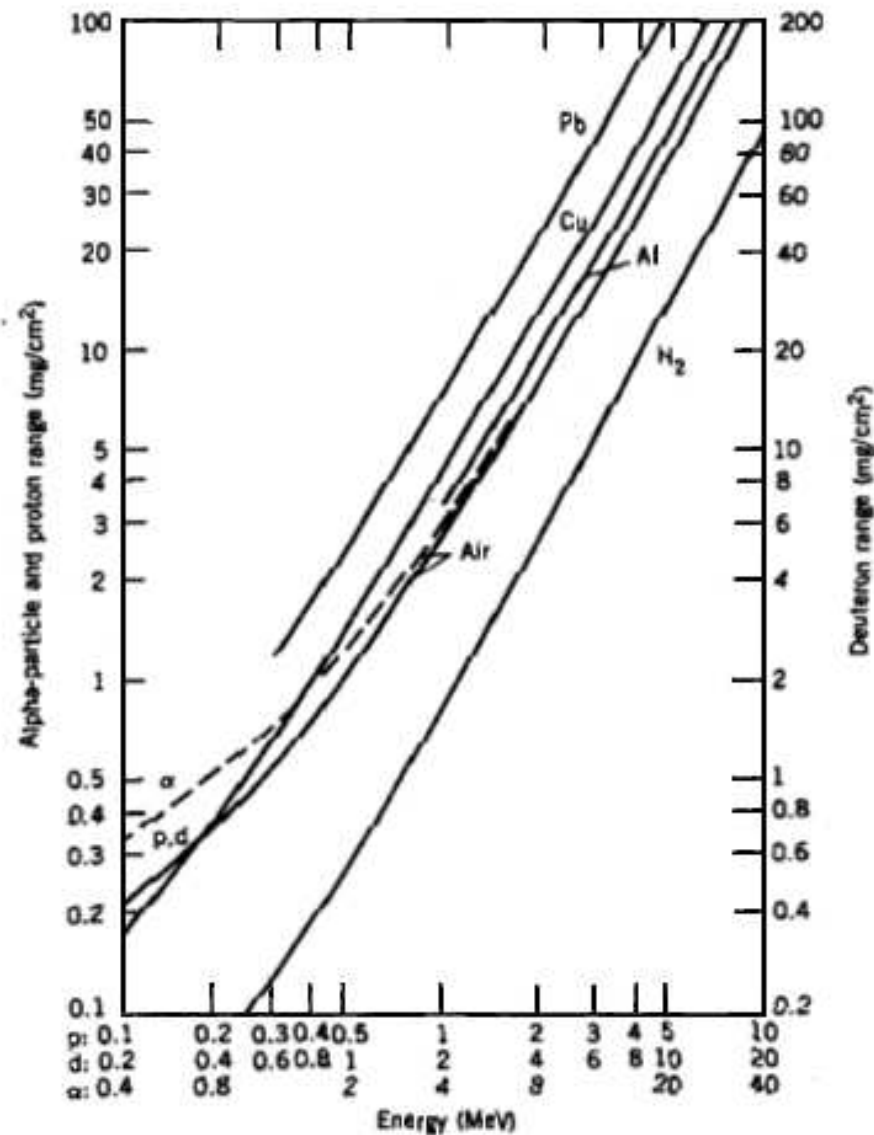


**Figure 2-10** The specific energy loss calculated for alpha particles in different materials. Values are normalized by the density of the absorber material. (Data from Williamson et al.<sup>4</sup>)

Figura 1.9.5: Knoll fig.2.10 pag.40

### 1.11 Composti e miscele. Perdita di energia e range

Una ragionevole previsione per il  $dE/dx$  di miscele e composti si ottiene ammettendo che valga la relazione  $(dE/dx) = N (dE/dx)_{atomico}$ , che tale relazione sia indipendente dallo

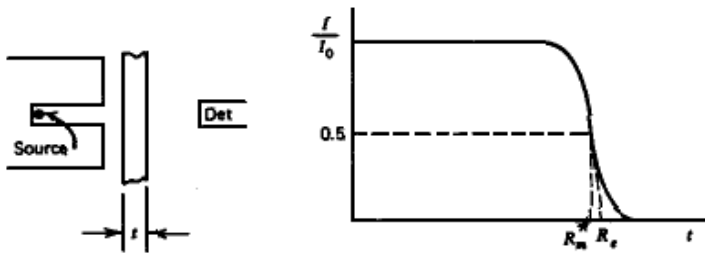


**Figure 7.2** The range-energy relationship in various materials. Because the particles lose energy through scattering by atomic electrons, the range depends inversely on the density. It is therefore convenient to plot the product range  $\times$  density, in units of  $\text{mg}/\text{cm}^2$ . Unfortunately, this product is also called "range" in the literature. From A. H. Wapstra et al., *Nuclear Spectroscopy Tables* (Amsterdam: North-Holland, 1959).

Figura 1.10.2: Krane fig.7.2

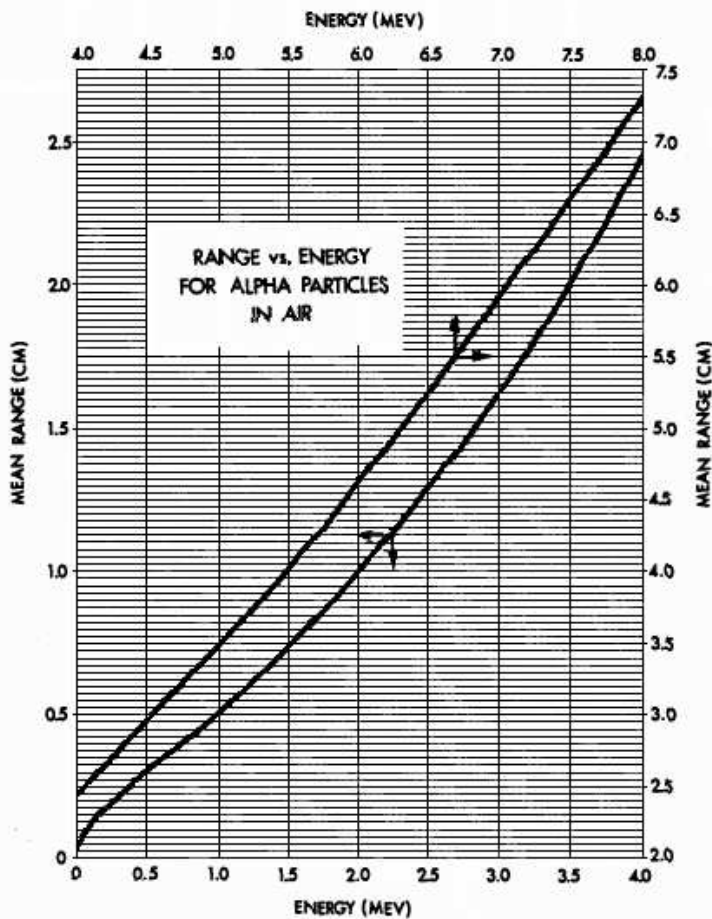
stato di aggregazione della materia e che in ciascuna molecola ciascun atomo conservi il





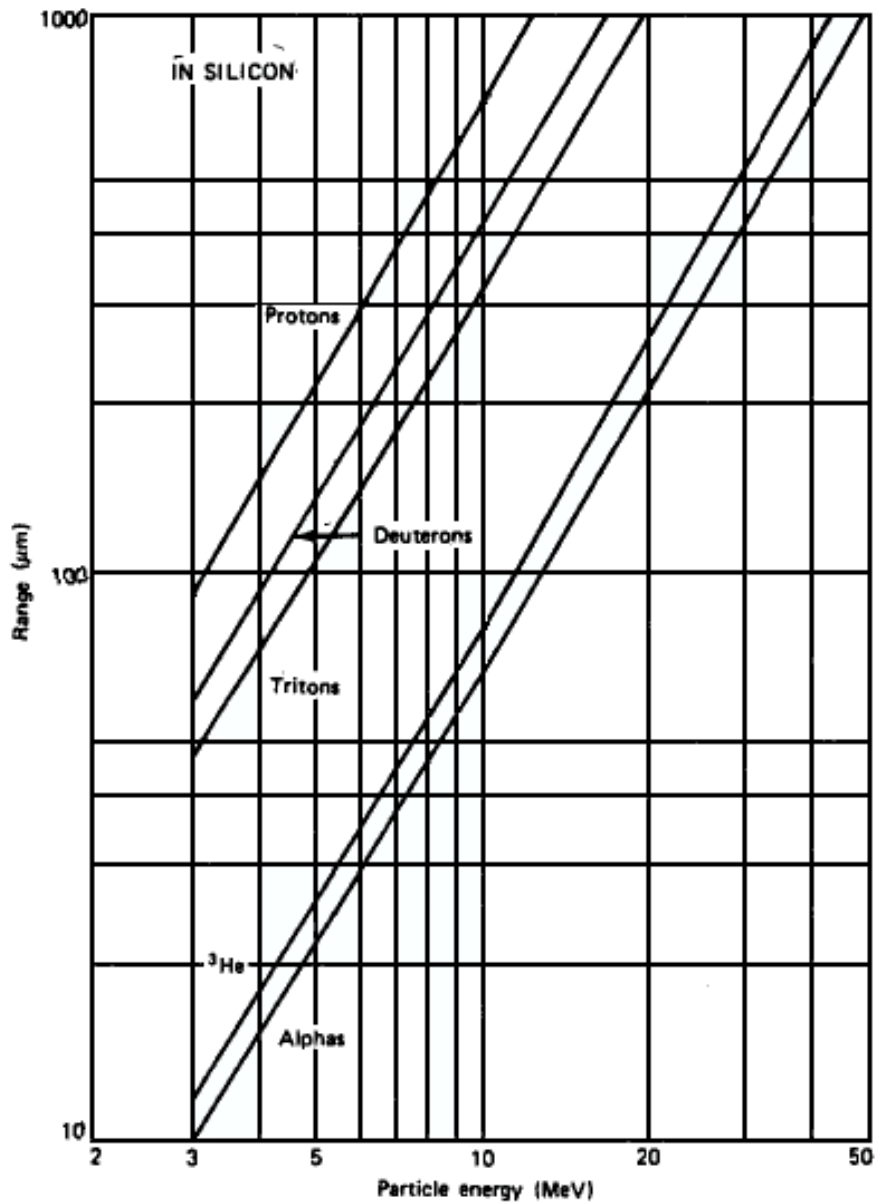
**Figure 2-5** An alpha particle transmission experiment.  $I$  is the detected number of alpha particles through an absorber thickness,  $t$ , whereas  $I_0$  is the number detected without the absorber. The mean range  $R_m$  and extrapolated range  $R_e$  are indicated.

Figura 1.10.3: Knoll fig.2.5



**Figure 2-6** Range-energy plot for alpha particles in air at 15°C and 760 mm Hg pressure. (From *Radiological Health Handbook*, U.S. Department of Health, Education and Welfare, Washington, DC, 1970.)

Figura 1.10.4: Knoll fig.2.6

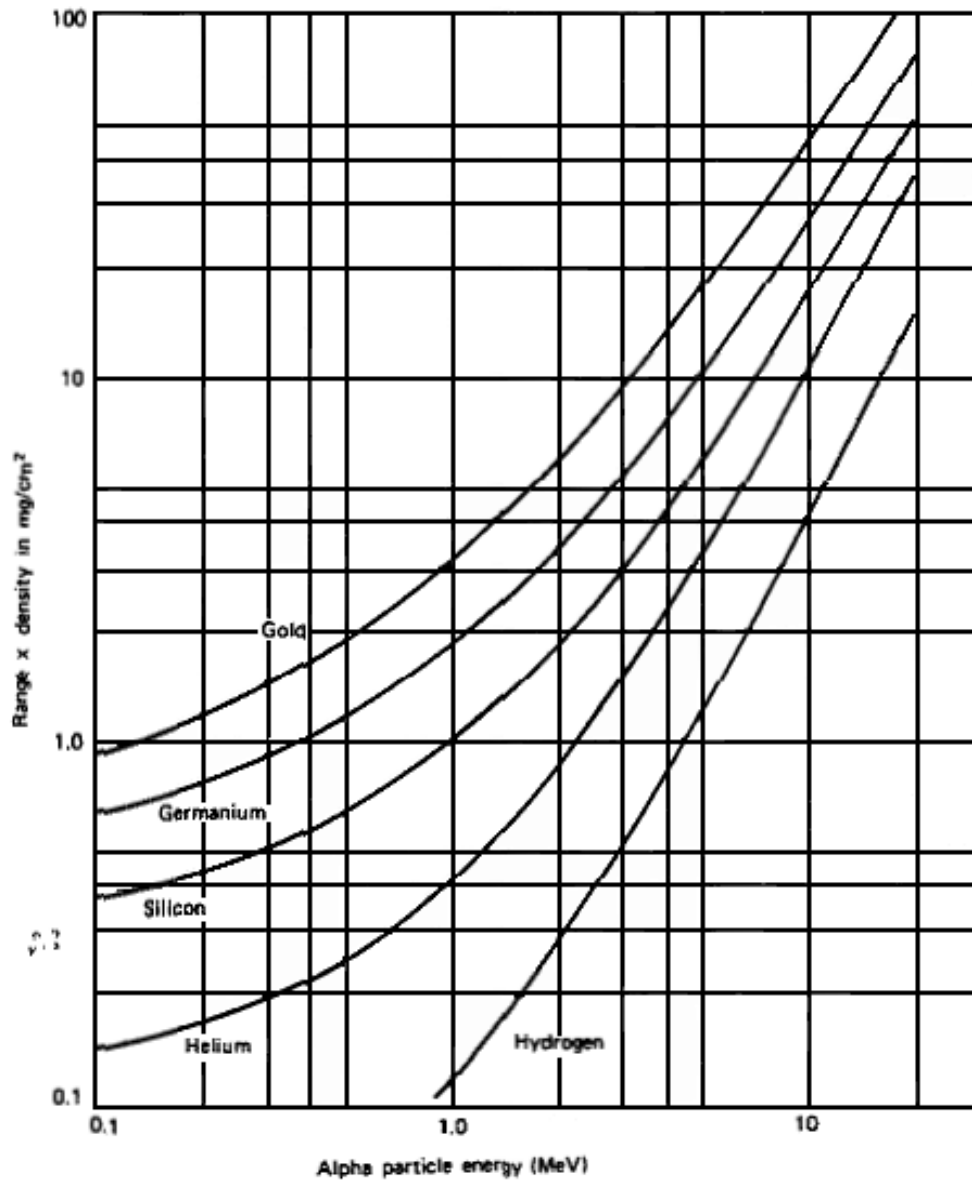


**Figure 2-7** Range-energy curves calculated for different charged particles in silicon. The near-linear behavior of the log-log plot over the energy range shown suggests an empirical relation of the form  $R = aE^b$ , where the slope-related parameter  $b$  is not greatly different for the various particles. (From Skyrme.<sup>3</sup>)

Figura 1.10.5: Knoll fig.2.7

proprio  $(dE/dx)_{atomico}$  e si scriva cioè per l'atomo del generico elemento  $\alpha$ :

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{atom,\alpha} = \frac{1}{N_\alpha} \left(\frac{dE}{dx}\right)_\alpha = \frac{4\pi(z e^2)^2}{m_e c^2 \beta^2} Z_\alpha \left[ \ln \frac{2m_e c^2 \beta^2}{I_\alpha} - \beta^2 \right] \quad (1.11.1)$$



**Figure 2-8** Range-energy curves calculated for alpha particles in different materials. Units of the range are given in mass thickness (see Section III.B.2) to minimize the differences in these curves. (Data from Williamson et al.<sup>4</sup>)

Figura 1.10.6: Knoll fig.2.8

In queste ipotesi, per la miscela si pone:

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{atom,misc} = \sum_i W_i \left(\frac{dE}{dx}\right)_{atom,i} \quad (1.11.2)$$

dove  $W_i$  rappresenta la frazione di atomi della specie  $i$ -esima rispetto al totale di atomi base. Facciamo alcuni esempi:

a) se si ha a che fare con un gas puro, per esempio metano in determinate condizioni di temperatura e pressione, l'elemento base è la molecola  $\text{CH}_4$  e in tale molecola compaiono 5 atomi: uno di C per il quale è  $W_C = 1/5$  e quattro di H per il quale è  $W_H = 4/5$ . Pertanto, per la perdita di energia in gas metano si scrive subito:

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{CH}_4} = \frac{4\pi(ze^2)^2}{m_e c^2 \beta^2} \left\{ \frac{1}{5} Z_C \left[ \ln \frac{2m_e c^2 \beta^2}{I_C} - \beta^2 \right] + \frac{4}{5} Z_H \left[ \ln \frac{2m_e c^2 \beta^2}{I_H} - \beta^2 \right] \right\}$$

Una volta assegnate la pressione e la temperatura del gas da  $pV = N_{\text{metano}} kT$  (trattando il gas come perfetto) si ha subito:  $N_{\text{metano}}/V = p/kT \text{ cm}^{-3}$ , cioè la densità numerica per la quale moltiplicare la perdita di energia relativa alla molecola di metano per ottenere quella del gas.

b) se si tratta di una miscela di gas, per esempio: 10%  $\text{CH}_4$  e 90% Ar (le percentuali sono di norma in volume e quindi, assegnate temperatura e pressione e supposta valida la legge dei gas perfetti, è quanto dire che sono assegnate le densità numeriche delle varie specie presenti), e questo è il caso di molti contatori proporzionali utilizzati per la rivelazione di raggi X molli (spettroscopia Mossbauer) con pressione dell'ordine dell'atmosfera e a temperatura ambiente, i pesi  $W_i$  si valutano come segue: c'è una molecola di metano ogni nove molecole di Ar, e le probabilità di incontro sono:  $W_{\text{metano}} = 1/10$  e  $W_{\text{Ar}} = 9/10$ .

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{atom, miscela}} = \frac{9}{10} \frac{4\pi(ze^2)^2}{m_e c^2 \beta^2} \left\{ Z_{\text{Ar}} \left[ \ln \frac{2m_e c^2 \beta^2}{I_{\text{Ar}}} - \beta^2 \right] \right\} + \frac{1}{10} \left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{atom, CH}_4}$$

A questo punto, noto il  $(dE/dx)$  "atomico" della miscela, per ottenere il  $(dE/dx)$  della miscela basta moltiplicare per il numero di elementi presenti nell'unità di volume (legge di Dalton delle pressioni parziali).

c) un caso di particolare interesse è quello dei cristalli di NaI e di CsI, per i quali, ripetendo i ragionamenti precedenti, si ha:  $W_{\text{Na}} = W_{\text{I}} = 0.5$  e  $W_{\text{Cs}} = W_{\text{I}} = 0.5$ .

Per quanto riguarda il range, si trova che nei composti si può stimarlo con un'approssimazione entro il 20% per mezzo della seguente formula (per scrivere la quale occorre ipotizzare che la forma del  $dE/dx$  non dipenda dal mezzo frenante) :

$$\frac{M_{m\ c}}{R_c} = \sum_i n_i \frac{M_{m\ i}}{R_i} \quad (1.11.3)$$

dove  $R_c$  è il range nel composto,  $R_i$  è il range nell'elemento  $i$ -esimo,  $n_i$  è il numero di atomi dell'elemento  $i$ -esimo nella molecola,  $M_{m\ i}$  è la massa della mole dell'elemento  $i$ -esimo e  $M_{m\ c}$  è la massa della mole del composto.

Per esempio, nel caso dello NaI si calcola:

$$\frac{M_{m\ \text{NaI}}}{R_{\text{NaI}}} = \frac{M_{m\ \text{Na}}}{R_{\text{Na}}} + \frac{M_{m\ \text{I}}}{R_{\text{I}}} = \frac{R_{\text{I}} M_{m\ \text{Na}} + R_{\text{Na}} M_{m\ \text{I}}}{R_{\text{Na}} R_{\text{I}}}$$

e

$$R_{NaI} = \frac{M_m NaI R_{Na} R_I}{R_I M_m Na + R_{Na} M_m I} = \frac{150 R_{Na} R_I}{23 R_I + 127 R_{Na}}$$

In un caso di questo tipo la formula non è particolarmente utile perché non esistono molte misure o previsioni per i “materiali” Sodio e Iodio. Può aiutare allora la seguente regola empirica, basata su misure fatte da Bragg e che prende il nome di “regola di Bragg-Kleeman”:

$$\frac{R_1}{R_0} \sim \frac{\rho_0}{\rho_1} \frac{M_m^{1/2}}{M_m^{1/2}} \quad (1.11.4)$$

La (1.11.4) funziona ragionevolmente se i materiali 1 e 2 sono di massa molare simile. Calcoliamo, per esempio, il range di particelle alfa di 20 MeV in NaI. Si ricava il range in Na a partire dal range noto in Si e quello in I interpolando fra i range noti in Ge e Au (fig.2.8 di Knoll). Si ottiene:

$$R_{Na} = R_{Si} \frac{\rho_{Si}}{\rho_{Na}} \left( \frac{M_m Na}{M_m Si} \right)^{1/2} = 21.5 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{2.32}{0.97} \left( \frac{23}{28} \right)^{1/2} \simeq 46.3 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$$

$$R_I = R_{Ge} \frac{\rho_{Ge}}{\rho_I} \left( \frac{M_m I}{M_m Ge} \right)^{1/2} = 13.1 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{5.32}{4.92} \left( \frac{127}{72.6} \right)^{1/2} \simeq 18.7 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$$

e infine per lo NaI si ha:

$$R_{NaI}(T_\alpha = 20 \text{ MeV}) = \frac{150 \cdot 46.3 \cdot 10^{-3} \cdot 18.7 \cdot 10^{-3}}{23 \cdot 18.7 \cdot 10^{-3} + 127 \cdot 46.3 \cdot 10^{-3}} = 0.019 \text{ cm} \rightarrow 70 \text{ mg cm}^{-2}$$

## 1.12 Range di particelle differenti in uno stesso materiale

Nel limite non relativistico la formula di Bethe-Bloch può essere riscritta, osservando che  $E = m_1 u^2/2$  e  $dE = m_1 u du$ , come segue:

$$dx = \frac{m_1}{z_1^2} \frac{m_e}{4\pi e^4} \frac{1}{NZ} \frac{u^3 du}{\ln(2m_e u^2/I)} \quad (1.12.1)$$

$$dx = \frac{m_1}{z_1^2} f(u) du \quad (1.12.2)$$

$$R = \frac{m_1}{z_1^2} \int_{u_i}^0 f(u) du \quad (1.12.3)$$

La (1.12.3) può essere usata per prevedere il range di una particella  $(m_1, z_1)$  di data velocità iniziale  $u_1$  se è noto il range di un'altra particella  $(m_2, z_2)$  di uguale velocità iniziale scrivendo:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{m_1}{z_1^2} \frac{z_2^2}{m_2} = \frac{m_1}{m_2} \left( \frac{z_2}{z_1} \right)^2 \quad (1.12.4)$$

La (1.12.4) è molto utile per valutazioni grossolane, le sue limitazioni sono dovute ai seguenti fatti: a)  $I$  dipende dalla velocità (ma questo, trovandosi  $I$  in un termine logaritmico, non è così importante), b) a basse velocità lo  $z$  della particella incidente non è più costante, è una funzione della velocità, e non però la stessa per differenti particelle. Per esemplificare: si può ammettere che sia la stessa per particelle di uguale  $z$  come  ${}^4He$  e  ${}^3He$  ma non per  ${}^3H$ .

Nei casi per i quali si ammette che la (1.12.4) sia valida ad ogni velocità, essa è valida per tutto il range e per particelle di uguale velocità iniziale si può scrivere:

$$\begin{aligned}\frac{R_{{}^3He}}{R_{{}^4He}} &\simeq 3/4 \quad (0.753) \\ \frac{R_d}{R_p} &\simeq 2 \quad (1.999) \\ \frac{R_t}{R_p} &\simeq 3 \quad (2.993)\end{aligned}$$

Un confronto fra particelle  $\alpha$  e protoni, di uguale velocità iniziale, in aria a 15 °C e 1 *atmosfera* dà il seguente risultato:

$$R_p = \frac{(M/z)_p}{(M/z)_\alpha} (R_\alpha - 0.2 \text{ cm di aria})$$

### 1.13 Straggling in energia. Straggling in range. Angolo quadratico medio di scattering.

Non faremo cenno ad alcuna teoria per questi argomenti e ci limiteremo a fornire alcuni risultati e a dare opportuni riferimenti bibliografici.

a) Straggling in energia: è una conseguenza del carattere a caso delle cessioni di energia sia per numero che per intensità. In altri termini, la formula di Bethe-Bloch fornisce un valor medio di perdita di energia per unità di percorso. Per conseguenza il range medesimo non è deterministicamente definito. Semplici misure di energia di particelle  $\alpha$  e protoni, dopo che hanno attraversato differenti strati di materiale, mettono in evidenza che la distribuzione in energia attorno al valore medio è sostanzialmente gaussiana. Se viceversa si misura l'energia persa in un rivelatore sottile, tale che il  $\Delta E$  rilasciato sia piccolo, si notano scarti notevoli rispetto alla gaussiana ed occorrono teorie più complete, come la statistica di Landau-Vavilov, per ottenere un migliore accordo con i risultati sperimentali. Riassumendo: una valutazione delle fluttuazioni in energia è riportata in maniera semplificata in Jackson (par.13.3 pag.631) con le seguenti conclusioni:

La distribuzione in energia di particelle entranti con energia  $E_0$  che attraversano uno strato  $x$  di materia, dopodiché hanno un'energia media  $\langle E \rangle$ , nell'ipotesi che  $x$  sia sufficientemente piccolo perché sia piccolo rispetto a 1 il rapporto  $(E_0 - \langle E \rangle)/E_0$ , per cui basta calcolare la fluttuazione nel  $dE/dx$  all'energia  $E_0$ , è in buona approssimazione la seguente:

$$P(E_0, E, x) \sim \frac{1}{(2\pi)^{1/2} \Omega} \exp [-(E - \langle E \rangle)^2 / 2\Omega^2] \quad (1.13.1)$$

con

$$\Omega^2 = x \frac{dE^2}{dx} \quad (1.13.2)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{dE^2}{dx} &= 2\pi NZ \int_{b_{min}}^{b_{max}} [\Delta E(b)]^2 db = \{b_{min} \ll b_{max}\} = \\ &= 4\pi NZ \frac{(ze^2)^2}{m_e c^2 \beta^2} \left[ m_e c^2 \gamma^2 \beta^2 \left( 1 - \frac{\beta^2}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.13.3)$$

Il risultato (1.13.1) vale a patto che sia  $\Omega \ll \langle E \rangle$  e  $\Omega \ll (E_0 - \langle E \rangle)$  e inoltre deve essere  $\Omega \gg \Delta E_{max}$  (singola cessione di energia)  $- 2m_e \gamma^2 \beta^2$ . Quest'ultima condizione non è soddisfatta per particelle ultrarelativistiche e la teoria deve essere sostituita da quella di Landau.

b) Straggling in range: è la naturale conseguenza dello straggling in energia (Evans Ch.22 formule (5.7), (5.12), (5.14), (5.15) e (5.16)). Inoltre, nella stessa approssimazione nella quale è distribuito in maniera gaussiana lo straggling in energia così lo è quello in range. Nella maggior parte dei casi la distribuzione è sufficientemente stretta da consentire una definizione non ambigua del range delle particelle pesanti.

c) Angolo quadratico medio di scattering: è trattato diffusamente in Fermi e in Jackson e rende quantitativo il fatto che i ripetuti processi di scattering introducono via via un aspetto diffusivo nel moto delle particelle e ciò, per conseguenza, ne rende via via meno definita la traiettoria. Questo fatto era tenuto in speciale considerazione nelle tecniche visualizzanti di camere a nebbia e di camere a bolle degli anni '60 - '70 con le quali, dalla misura della curvatura delle tracce (traiettorie) in campo magnetico, si risaliva all'impulso delle particelle. L'allargamento delle tracce poneva un limite alle minime deflessioni osservabili e quindi alla determinazione dell'impulso delle particelle più rigide. Il risultato è relativamente semplice in presenza di numerosi scattering a piccolo angolo con i nuclei atomici. Questi scattering contribuiscono assai poco alla perdita di energia ma sono determinanti nell'introdurre l'indeterminazione angolare nella traiettoria. Gli esempi che si possono fare sono moltissimi, ma, per fissare le idee, vediamo che cosa accade ad un protone di 10 MeV che passa a distanza  $b_{min}$  da un elettrone e da un nucleo.

Data l'energia del protone, in base alla (1.4.3), utilizzando il valore  $b_{min}^{(q)} = 2500 \text{ fm}$  (vedere la nota di pag.9), l'energia trasferita all'elettrone risulta:

$$\Delta E_e(b_{min}^{(q)}, T_p = 10 \text{ MeV}) = \frac{2e^4}{m_e v^2} \frac{1}{(b_{min}^{(q)})^2} = 3.4 \cdot 10^{-10} \text{ erg} = \{1 \text{ erg} = 6.25 \cdot 10^{11} \text{ eV}\} = 200 \text{ eV}$$

mentre l'angolo  $\theta_{pe}$  di deflessione del protone è:

$$\theta_{pe}(b_{min}^{(q)}, T_p = 10 \text{ MeV}) = \frac{2e^2}{m_p v^2} \frac{1}{b_{min}^{(q)}} = 5.6 \cdot 10^{-5} \text{ rad} = 11.5'' \{ \text{secondi d'arco} \sim \left( \frac{3}{1000} \right)^\circ \}$$

Gli stessi calcoli ripetuti supponendo che il protone passi alla stessa distanza da un nucleo fittizio di  $Z = 50$  e  $A = 100$  portano ai seguenti risultati:

$$\Delta E_N(b_{min}^{(q)}, T_p = 10 \text{ MeV}) = \frac{2e^4 Z^2}{m_N v^2} \frac{1}{(b_{min}^{(q)})^2} = 1 \text{ eV}$$

mentre l'angolo  $\theta_{pN}$  di deflessione del protone risulta:

$$\theta_{pN}(b_{min}^{(q)}, T_p = 10 \text{ MeV}) = \frac{2Ze^2}{m_p v^2} \frac{1}{b_{min}^{(q)}} = 9' \{ \text{primi d'arco} \sim 0.15^\circ \}$$

Questo esempio conferma che di norma è irrilevante la presenza dei nuclei nel determinare la perdita di energia, mentre è irrilevante la presenza degli elettroni nel determinare l'angolo quadratico medio di scattering. Si intende che, nell'attraversare un mezzo omogeneo e isotropo, è atteso un angolo medio di scattering nullo.

Solo raramente la particella incidente risulta deflessa a grande angolo: siccome si tratta di eventi rari si ipotizza senz'altro che una particella subisca non più di uno di tali eventi nel suo percorso. Questa ipotesi permette di dividere il campo degli angoli di scattering in due zone: una zona a grandi angoli che contiene "solo" scattering singoli, ed una ad angoli piccoli alla quale partecipano numerosissimi processi di scattering ad angoli piccolissimi. Il risultato riportato da Jackson per l'angolo quadratico medio di scattering  $\langle \theta^2 \rangle$  dopo che la particella ha attraversato uno spessore  $x$ , è dato da:

$$\langle \theta^2 \rangle = \left[ 4\pi N \left( \frac{2zZe^2}{m_1 c^2 \gamma \beta^2} \right) \ln(204 Z^{-1/3}) \right] x \quad (1.13.4)$$

Di norma la misura di  $\langle \theta^2 \rangle^{1/2}$  non è fatta in tre dimensioni ma proiettata su un piano assiale e misurando l'angolo proiettato  $\delta$ . La distribuzione di  $\delta$  risulta ancora di tipo gaussiano per gli eventi di scattering multiplo:

$$P_M(\delta) = \frac{1}{[\pi \langle \theta^2 \rangle]^{1/2}} \exp[-\delta^2 / \langle \theta^2 \rangle] \quad (1.13.5)$$

mentre la distribuzione degli scattering a grande angolo (singoli) risulta:

$$P_S(\delta) = \frac{\pi}{2} N x \left( \frac{2zZe^2}{m_1 c^2 \gamma \beta^2} \right)^2 \frac{1}{\delta^3} \quad (1.13.6)$$

Le due distribuzioni assumono ugual valore per  $\delta = 2.35 \langle \theta^2 \rangle^{1/2}$ .

## 1.14 I processi di ionizzazione e la curva di Bragg

Un grafico del  $dE/dx$  in funzione del percorso prende il nome di curva di Bragg, la quale è dunque anche affetta da straggling. L'importanza della curva di Bragg sta nel fatto di stabilire dove sono più grandi le perdite di energia nel materiale e quindi dove sono più grandi le densità di ionizzazione.



Sono stati scritti programmi (ASTAR) che permettono di calcolare la curva di Bragg per quasi tutti i tipi di particelle e di energie in molti tipi di materiali. I risultati che si ottengono forniscono dei ragionevoli ordini di grandezza, ma non sono in grado ad esempio di tener conto di eventuali effetti di channeling, caratteristici delle strutture monocristalline.

## 1.15 Tempi di frenamento

Si rimanda a Knoll (pagg. 38 e 39) dove è presentato, in maniera semplificata, il caso non relativistico.

$$\text{Stopping time} \simeq 0.12 \cdot R(\mu m) \left[ \frac{A}{E(\text{MeV})} \right]^{1/2} ps$$

Esempi:

1) una particella  $\alpha$  (A=4) di 5.5 MeV di energia fa un percorso di  $\sim 25 \mu m$  in Si

$$\text{Stopping time} \simeq 0.12 \cdot 25 \left[ \frac{4}{5.5} \right]^{1/2} ps = 2.5 ps$$

2) un protone (A=1) di 10 MeV di energia fa un percorso di  $\sim 200 \mu m$  in Si

$$\text{Stopping time} \simeq 0.12 \cdot 100 \left[ \frac{1}{10} \right]^{1/2} ps \simeq 26 ps$$

## 2 Perdita di energia degli elettroni nella materia

Questo argomento è più complicato del precedente per i seguenti motivi:

- 1) quasi sempre gli elettroni sono relativistici salvo il caso, peraltro di grande importanza, dei raggi  $\delta$ ;
- 2) le approssimazioni introdotte nel calcolo semplificato di traiettorie rettilinee delle particelle pesanti non si applicano al caso degli elettroni;
- 3) essendo usuali gli scattering a grande angolo il percorso degli elettroni ha una relazione molto meno chiara con lo spessore di materiale attraversato;
- 4) nel caso degli elettroni ultrarelativistici in mezzi ad alto  $Z$  la “radiazione di frenamento (bremsstrahlung)” nel campo coulombiano dei nuclei (e degli elettroni) diventa un importante processo di perdita di energia in competizione con l’ordinario meccanismo di perdita di energia collisionale che riguarda collisioni elettrone-elettrone.

Con una principale differenza, sulla quale ritorneremo, i medesimi meccanismi di perdita di energia ed i medesimi risultati valgono anche per i positroni.

### 2.1 Perdita di energia collisionale

La formula (1.6.4) deve essere modificata per tenere conto che nel caso degli elettroni ( $z = 1$ ) il calcolo di  $b_{min}^{(q)}$  richiede di conoscere l’impulso dell’elettrone nel sistema di riferimento di impulso nullo. Per gli elettroni  $p^* = m_e c [(\gamma - 1)/2]^{1/2}$ , come si ricava dalla formula (B.4.7) di Appendice, e pertanto  $b_{min}^{(q)} = 2^{1/2} \hbar / [m_e c (\gamma - 1)^{1/2}]$ . Sostituendo nella (1.5.7):

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{coll} = 4\pi \frac{NZe^4}{m_e \beta^2 c^2} \left\{ \ln \frac{(\gamma - 1)(\gamma + 1)^{1/2}}{2^{1/2}} \frac{m_e c^2}{I} - \beta^2 \right\} \quad (2.1.1)$$

Confrontiamo questa formula con il risultato di un calcolo quanto-relativistico dovuto ancora a Bethe e riportato per esempio da Krane [formula (7.7) di pag.196] che qui trascriviamo nel sistema CGS:

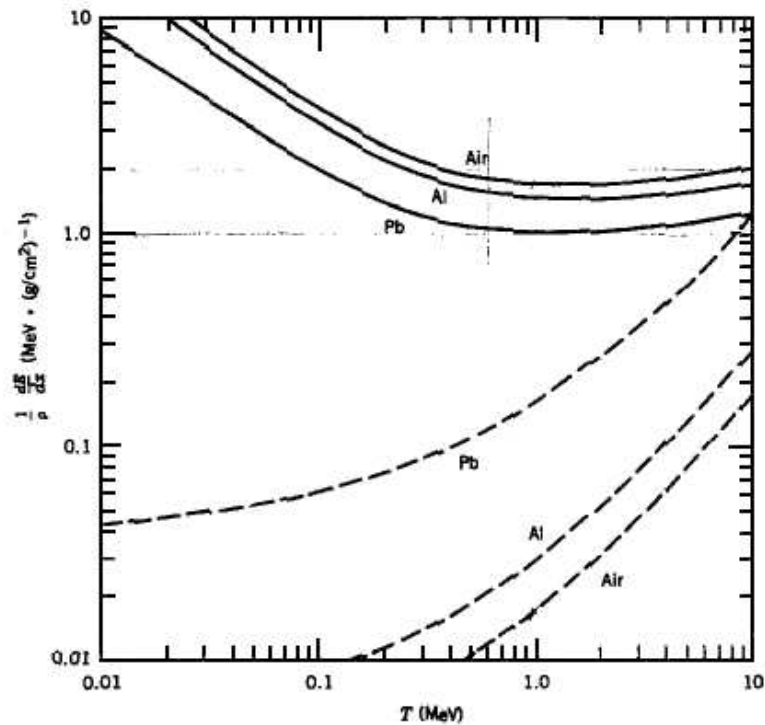
$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{coll} = 4\pi \frac{NZe^4}{m_e \beta^2 c^2} \cdot \left\{ \ln \frac{(\gamma - 1)(\gamma + 1)^{1/2}}{2^{1/2}} \frac{m_e c^2}{I} - \beta^2 + [1 - \ln 2(2(1 - \beta^2)^{1/2} - 1 + \beta^2) + \frac{1}{8}(1 - (1 - \beta^2)^{1/2})^2] \right\} \quad (2.1.2)$$

Le due formule differiscono per il termine in parentesi quadra che per  $Z \sim 50$  porta una correzione dell’ordine del 20% a bassa energia ed inferiore al 10% ad alta energia.

Un esempio di  $(dE/dx)_{coll}$  in aria, Al, Pb è riportato nella fig.7.3 di Krane dove è riportato anche un confronto con le perdite di energia radiative.

### 2.2 Perdita di energia radiativa

Poiché il campo coulombiano dei nuclei di alto  $Z$  è molto più efficace di quello degli elettroni, ci limiteremo a considerare l’interazione elettrone-campo coulombiano del nucleo

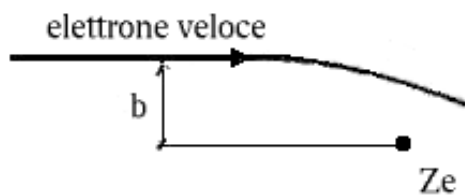


**Figure 7.3** Energy loss by electrons in air, Al, and Pb. To suppress the large variation in  $dE/dx$  arising from the number of electrons of the material, the quantity  $\rho^{-1}(dE/dx)$  is plotted. Solid lines are for collisions; dashed lines are for radiation. For additional tabulated data on energy losses, see L. Pages et al., *Atomic Data* 4, 1 (1972).

Figura 2.1.1: Krane fig.7.3

(si troverà che la perdita di energia radiativa dipende dal quadrato della carica bersaglio e che, pertanto, il contributo elettronico per atomo è proporzionale a  $Ze^2$  mentre quello nucleare è proporzionale a  $Z^2e^2$ : ciò significa che per  $Z > 20$  il contributo elettronico costituisce una correzione inferiore al 5%).

Riportiamo gli elementi essenziali del ragionamento di Fermi [Ch.2, par.3, pag.43 “Radiation loss by fast electrons (bremsstrahlung)”], ripreso successivamente da Weizsaecker e riportato anche in un’analisi quantitativa da Jackson nei paragrafi 15.4 (“Weizsaecker-Williams method of the virtual quanta”) e 15.5 (“Bremsstrahlung as the scattering of virtual quanta”).



Si considera un elettrone di alta energia ( $T_e > 10 \text{ MeV}$ ,  $\beta \simeq 1$ ,  $\gamma > 20$ ) che, come mostrato in fig.2.2.1, passa in prossimità di un nucleo di carica  $Ze$ , fermo nel sistema L (del laboratorio). Per calcolare l’energia che l’elettrone perde sotto forma di fotoni quando è accelerato dal campo e.m. del nucleo, si utilizza la procedura esposta di seguito.

Figura 2.2.1:

Nel sistema di riferimento (\*) solidale con l'elettrone, il nucleo  $Ze$  si muove con velocità praticamente uguale a  $c$ . Il campo elettrico  $\vec{E}^*$  del nucleo è contratto (per un fattore  $\gamma$  nella direzione del moto) e l'associato campo magnetico  $\vec{H}^*$  è ortogonale ad  $\vec{E}^*$  e, sostanzialmente, della stessa intensità (Sistema di Gauss di unità di misura). Pertanto, il nucleo appare all'elettrone come un'onda e.m. piana impulsiva (a simmetria cilindrica). L'onda di fotoni (che, quantisticamente, rappresenta il campo coulombiano del nucleo agli effetti della sua interazione con l'elettrone) subisce scattering da parte dell'elettrone. Tali fotoni scatterati, visti nel sistema di riferimento del nucleo (che coincide sostanzialmente con il sistema di riferimento L) appaiono come fotoni emessi dall'elettrone incidente.

Seguendo quanto detto, il calcolo procede secondo questi punti:

- 1) si trasforma il campo e.m. del nucleo dal sistema L al sistema dell'elettrone a riposo
- 2) si calcolano le caratteristiche dell'onda e.m. piana impulsiva risultante nel sistema dell'elettrone e in particolare la densità di energia puntuale
- 3) si determina la densità di fotoni (numero di fotoni per unità di energia o di frequenza angolare) corrispondente all'onda e.m. impulsiva
- 4) si calcola la probabilità di scattering di tutti fotoni, che rappresentano un nucleo, con l'elettrone utilizzando la sezione d'urto Thomson (coerente, di bassa energia) per lo scattering fotone-elettrone (nell'ambito della sua validità, cioè alle basse energie, questa sezione d'urto risulta indipendente dall'energia)
- 5) si riporta il risultato al sistema L.

Il campo e.m. generato dal nucleo nel sistema dell'elettrone a riposo è dato dalle formule (C.4) di Appendice, che, per memoria, sono riportate anche in forma grafica nelle figure che seguono. Le componenti dei campi sono scritte con le notazioni ( $_{//} \perp \phi$ ) che si usano per mettere in rilievo il carattere trasversale del campo elettrico rispetto alla velocità e la simmetria cilindrica dell'onda piana impulsiva. È evidente che, per  $\beta \rightarrow 1$ ,

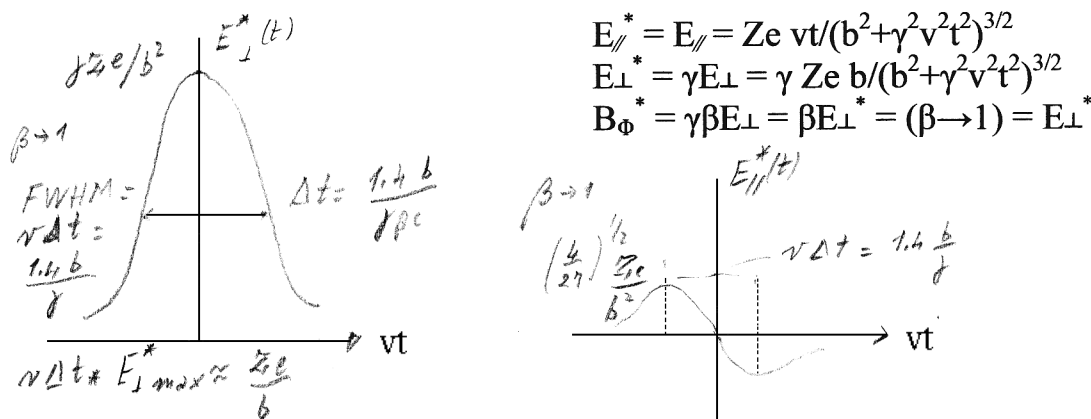


Figura 2.2.2:

questi campi diventano un'onda piana impulsiva (a simmetria circolare) nella quale  $B_{\phi}^*$  e  $E_{\perp}^*$  sono ortogonali e di uguale intensità (CGS<sub>em</sub>). La durata dell'impulso diminuisce

nella proporzione:

$$FWHM = v \Delta t \simeq 1.4 b/\gamma$$

Seguendo Fermi, per calcolare la densità di energia del campo e.m. si approssima la

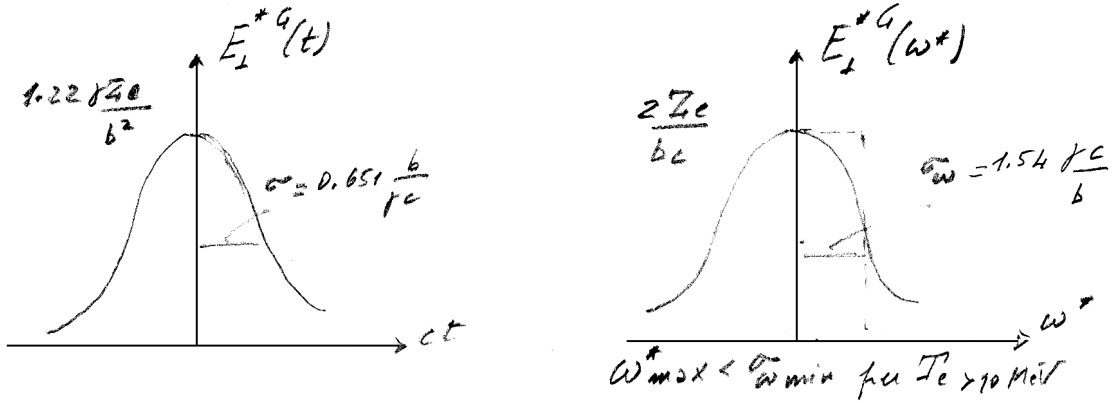


Figura 2.2.3:

componente trasversale  $E_{\perp}^*$  dell'onda piana impulsiva con una gaussiana di pari  $FWHM$ . Così facendo è semplice determinare, tramite trasformata di Fourier, lo spettro di ampiezza in funzione della frequenza angolare [si tratta ancora di una gaussiana caratterizzata da  $\sigma_{\omega} = 1.54 (\gamma v/b)$ , e per  $\beta \rightarrow 1$ :  $\sigma_{\omega} = 1.54 (\gamma c/b)$ ].

Nota sulla rappresentazione di  $E_{\perp}^*$  tramite gaussiana

$$E_{\perp}^* = \gamma Ze b / (b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2} \quad E_{\perp}^*_{max} = \gamma Ze / b^2$$

$$E_{\perp}^*_{max}/2 = \gamma Ze / 2b^2 = \gamma Ze b / (b^2 + \gamma^2 v^2 t_{1/2}^2)^{3/2} \quad t_{1/2} = b(2^{2/3} - 1)^{1/2} / \gamma v$$

$$\Delta t (FWHM) = 2 t_{1/2} = 1.533(b/\gamma v) \simeq (\beta \rightarrow 1) \rightarrow 1.533(b/\gamma c)$$

inoltre:

$$\int_{-\infty}^{\infty} E_{\perp}^* dt = \{Dwight : item 200.3\} = 2Ze/bv \simeq (\beta \rightarrow 1) \rightarrow 2Ze/bc \quad \text{esu cm}^{-2}s$$

La funzione gaussiana (per la quale vale la relazione  $FWHM = 2.355 \sigma$ ), per rappresentare il campo  $E_{\perp}^*$ , deve essere caratterizzata dalla seguente standard deviation:

$$\sigma = [1.533(b/\gamma c)]/2.35 = 0.651(b/\gamma c) \quad s$$

Chiamata  $E_{\perp}^{*G}(t)$  l'approssimazione gaussiana del campo elettrico trasversale, per produrre lo stesso integrale nel tempo si deve porre:

$$E_{\perp}^{*G}(t) = \frac{2Ze}{bc} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-t^2/2\sigma^2} \quad \text{esu cm}^{-2}$$

Trasformata di Fourier della gaussiana:

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-t^2/2\sigma^2} e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2/2\pi\sigma^2} e^{-j2\pi[t/\sqrt{2\pi}\sigma][\sqrt{2\pi}\sigma f]} [dt/\sqrt{2\pi}\sigma] =$$

$$= \{\text{posto } t/\sqrt{2\pi}\sigma = y\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi y^2} e^{-j2\pi y[\sqrt{2\pi}\sigma f]} dy = e^{-\pi[2\pi\sigma^2 f^2]} = e^{-4\pi^2\sigma^2 f^2/2} = e^{-\sigma^2\omega^2/2}$$

(per la soluzione dell'integrale v. Dwight item 586)

E infine si ha

$$G(\omega) = e^{-\omega^2/2\sigma_\omega^2}$$

avendo posto

$$\sigma_\omega = 1/\sigma = 1.54(\gamma c/b) \quad Hz$$

Applicando questo risultato nel nostro caso (sistema di riferimento \*) si ha:

$$E_{\perp}^{*G}(\omega^*) = \frac{2Ze}{bc} e^{-\omega^{*2}/2\sigma_\omega^2} \quad \text{esu } cm^{-2}s$$

Nel sistema L l'energia del fotone emesso non può superare l'energia cinetica dell'elettrone  $(\gamma-1)m_e c^2 \sim \gamma m_e c^2$  e la massima frequenza consentita è di conseguenza  $\omega_{max} = \gamma m_e c^2/\hbar$ . Passando al sistema di riferimento dell'elettrone questo significa (effetto Doppler) una frequenza massima del fotone  $\omega_{max}^* = \omega_{max}/\gamma = m_e c^2/\hbar = c/\lambda_e$  con  $\lambda_e = \lambda_{ce}/2\pi$  lunghezza d'onda Compton ridotta dell'elettrone ( $\sim 4.5 \cdot 10^{-11} \text{ cm}$ ). Nel caso in studio ciò consente di stabilire per quali valori di  $\gamma$  risulti  $\omega_{max}^* < \sigma_{\omega min} \simeq \gamma c/b_{max}$ . Se si sceglie, secondo il modello di Thomas-Fermi,  $b_{max} = a_0 Z^{-1/3} \sim 10^{-9} \text{ cm}$  ( $Z \sim 70 \div 80$ ), essendo  $m_e c^2/\hbar \sim 8 \cdot 10^{20} \text{ Hz}$ , si trova che la condizione è soddisfatta per  $\gamma > 20$  e cioè per elettroni di energia cinetica  $T_e$  superiore a  $10 \text{ MeV}$ .

In questi limiti, per calcoli di ordini di grandezza, si può approssimare lo spettro di ampiezza  $E_{\perp}^{*G}(\omega^*)$  come costante e uguale al valore massimo fino a  $\sigma_\omega$ , cosicché il valore puntuale del campo elettrico a distanza  $b$  dal nucleo risulta:

$$E_{\perp}^{*G}(b) \sim \left(\frac{2Ze}{bc}\right)^2 1.54(\gamma c/b) = 3.08 \gamma Z e/b^2 \quad \text{esu } cm^{-2}$$

Poiché il campo  $B_{\phi}^{*G}(b)$  risulta di intensità uguale al campo  $E_{\perp}^{*G}(b)$ , la densità di energia puntuale a distanza  $b$  dal nucleo è:

$$w_{em}(b) = \{[E_{\perp}^{*G}(b)]^2 + [B_{\phi}^{*G}(b)]^2\}/8\pi^2 = [E_{\perp}^{*G}(b)]^2/4\pi^2 \sim 0.25\gamma^2 Z^2 e^2/b^4 \quad \text{erg } cm^{-3}$$

Quindi, a distanza  $b$  dal nucleo, l'energia contenuta in un volumetto  $dV$  di area  $dA \text{ cm}^2$  (disposta ortogonalmente al moto relativo nucleo-elettrone) e di spessore  $b/\gamma \text{ cm}$ , risulta:

$$dE = 0.25(\gamma^2 Z^2 e^2/b^4)(b/\gamma)dA = 0.25(\gamma Z^2 e^2/b^3)dA \quad \text{erg}$$

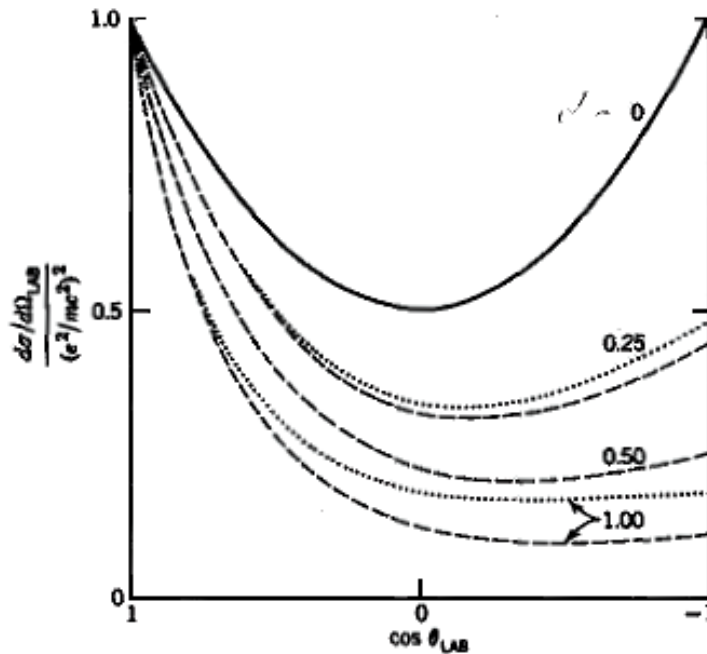
Se si vuole l'energia per unità di superficie (nei punti a distanza  $b$  dal nucleo) e per intervallo di frequenza  $d\omega^*$  occorre dividere  $dE$  per  $dA$  e per  $\sigma_\omega$  e moltiplicare per  $d\omega^*$ :

$$d^2E = [0.25(\gamma Z^2 e^2 / b^3) / (1.54 \gamma c / b)] d\omega^* \sim (0.16 Z^2 e^2 / b^2 c) d\omega^* \quad \text{erg cm}^{-2}$$

Pertanto, a distanza  $b$  dal nucleo, il numero  $n^*$  di fotoni di energia  $\hbar\omega^*$  presenti per unità di superficie risulta:

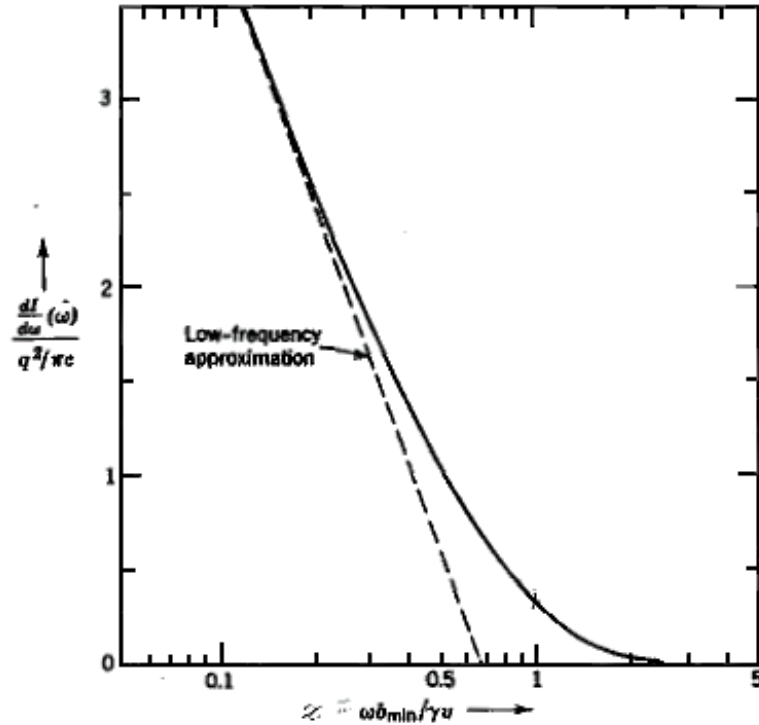
$$n^* = d^2E / \hbar\omega^* = 0.16(1/c\hbar)(Ze/b)^2 \Delta\omega^* / \omega^* \quad \text{cm}^{-2} \quad \text{fino a} \quad \omega_{max}^* \simeq \gamma c / b$$

*Nota: nel sistema di riferimento dell'elettrone, la sezione d'urto totale di scattering fotone-elettrone si approssima utilizzando l'ipotesi di scattering Thomson come  $\sigma_T = (8\pi/3)r_e^2$  (con  $r_e = e^2/m_e c^2 \sim 2.82 \cdot 10^{-13}$  cm, raggio classico dell'elettrone). L'ipotesi è che si possa usare la sezione d'urto Thomson per  $\hbar\omega^* \leq \hbar\omega_{max}^* < m_e c^2$ . I limiti di validità di tale ipotesi sono discussi in Jackson (fig.14.13); nella fig.15.8 è anche riportato uno spettro più realistico dei fotoni di quello gaussiano usato da Fermi. Si noti come la possibilità di utilizzare la sezione d'urto totale di scattering Thomson, che è indipendente dalla frequenza dei fotoni, renda semplice il calcolo dell'energia sottratta al pacchetto di fotoni.*



**Fig. 14.13** Differential scattering cross section of unpolarized radiation by a charged particle initially at rest in the laboratory. The solid curve is the classical Thomson result. The dashed curves are the quantum-mechanical results for a spinless particle, with the numbers giving the values of  $\hbar\omega/mc^2$ . For  $\hbar\omega/mc^2 = 0.25, 1.00$  the dotted curves show the results for spin  $\frac{1}{2}$  point particles (electrons).

Figura 2.2.4: Jackson fig.14.13



**Fig. 15.8** Frequency spectrum of virtual quanta for a relativistic particle, with the energy per unit frequency  $dI(\omega)/d\omega$  in units of  $q^2/\pi c$  and the frequency in units of  $\gamma v/b_{min}$ . The number of virtual quanta per unit energy interval is obtained by dividing by  $\hbar^2\omega$ .

Figura 2.2.5: Jackson fig.15.8

In definitiva, la sezione d'urto per scattering dei fotoni di energia  $\hbar\omega^*$  che incontrano l'elettrone a parametro d'urto  $b$  è data da:

$$n^* \sigma_T 2\pi b db \quad cm^2$$

perché si ipotizza che tutti i fotoni dell'impulso e.m. che si trovano a distanza  $b$  dal nucleo contribuiscano ugualmente e indipendentemente alla sezione d'urto.

Infine, la sezione d'urto totale  $d\Sigma^*$  di scattering di fotoni di energia  $\hbar\omega^*$  per nucleo si ottiene integrando la precedente espressione fra i parametri d'urto ( $b_{min}, b_{max}$ )

$$d\Sigma^* = \int_{b_{min}}^{b_{max}} n^* \sigma_T 2\pi b db \quad cm^2$$

L'integrazione fra  $b_{min}$  e  $b_{max}$  fornisce la sezione d'urto di scattering fotonico per nucleo:

$$d\Sigma^* = 16(Z^2 e^2 / ch) (\Delta\omega^* / \omega^*) r_e^2 \ln(b_{max} / b_{min}) \quad cm^2$$

Le valutazioni che si danno per gli estremi del parametro d'urto  $b$  sono le seguenti: per tenere conto dell'effetto di schermo degli elettroni (modello di Thomas-Fermi) si sceglie  $b_{max} = a_0 (5.29 \cdot 10^{-9} cm) Z^{-1/3}$ , mentre per  $b_{min}$  si usa la lunghezza d'onda Compton



ridotta dell'elettrone ( $\hbar/m_e c \sim 4.5 \cdot 10^{-11} \text{ cm}$ ).

La sezione d'urto di scattering per nucleo così calcolata nel sistema di riferimento dell'elettrone è trasformata nel sistema L (dalla formula di trasformazione relativistica dell'effetto Doppler si ha  $\Delta\omega^*/\omega^* \simeq \Delta\omega/\omega$ ):

$$d\Sigma = (16/137)Z^2(\Delta\omega/\omega) r_e^2 \ln(144/Z^{1/3}) \quad \text{cm}^2$$

Calcoli più precisi conducono al seguente risultato:

$$d\Sigma = (4/137)Z^2(\Delta\nu/\nu) r_e^2 \ln(183/Z^{1/3}) \quad \text{cm}^2$$

La perdita di energia totale per emissione di fotoni di frequenza  $\nu$ , nell'attraversare uno strato  $dx$  di materiale omogeneo che contiene  $N_0$  nuclei per  $\text{cm}^3$  è:

$$-d^2E = (\text{energia per fotone } h\nu)d\Sigma N_0 dx \quad \text{erg}$$

e la perdita di energia media nel  $dx$  per tutte le frequenze permesse:

$$dE_{rad} = -dx \int_0^{\nu_{max}} N_0 h\nu d\Sigma = -dx \int_0^{\nu_{max}} N_0 h\nu (4/137)Z^2(\Delta\nu/\nu) r_e^2 \ln(183/Z^{1/3}) \quad \text{erg}$$

Poiché  $h\nu_{max}$  coincide con l'energia cinetica  $T_e$  dell'elettrone incidente, si ha:

$$dE_{rad} = -(4/137)Z^2 N_0 T_e r_e^2 \ln(183/Z^{1/3}) dx \quad \text{erg} \quad (2.2.1)$$

[v. Fermi, pag.47 (II.56)]

Questo risultato può essere confrontato con il risultato di Bethe:

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{rad} = -(4/137)Z^2 e^4 N_0 \frac{T_e + m_e c^2}{(m_e c^2)^2} \left[ \ln \frac{2(T_e + m_e c^2)}{m_e c^2} - \frac{1}{3} \right] \quad (2.2.2)$$

e posto  $T_e/m_e c^2 = t$ ;  $r_e = e^2/m_e c^2 \sim 2.8 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$  raggio classico dell'elettrone;  $N_0 = N_A \rho / M_m$ :

$$\left(\frac{dE}{\rho dx}\right)_{rad} = -\frac{4}{137}Z^2 r_e^2 \frac{N_A}{M_m} (m_e c^2)(t+1) \left[ \ln 2(t+1) - \frac{1}{3} \right] \quad (2.2.3)$$

Nella (2.2.3), esprimendo la massa di riposo dell'elettrone in  $\text{MeV}$ , la perdita di energia risulta misurata in  $\text{MeV g}^{-1} \text{ cm}^2$ .

Nel caso di elettroni ultrarelativistici ( $t \gg 1$ ) la (2.2.3) diventa:

$$\left(\frac{dE}{\rho dx}\right)_{rad} = -\frac{4}{137}Z^2 r_e^2 \frac{N_A}{M_m} (m_e c^2) t \ln 2t \quad (2.2.4)$$

Si osserva che la teoria completa introduce un termine logaritmico che contribuisce ad aumentare la perdita di energia alle energie ultrarelativistiche.

## 2.3 Perdita di energia totale. Contributi relativi

La perdita di energia totale degli elettroni è perciò:

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{elettroni} = \left(\frac{dE}{dx}\right)_c + \left(\frac{dE}{dx}\right)_r \quad (2.3.1)$$

È evidente dalle (2.2.2) e (2.2.3) che la perdita radiativa diventa più importante ad alte energie e in mezzi ad alto  $Z$ . Passando da aria ( $\langle Z \rangle = 7.3$ ) a Ta ( $Z = 73$ ) c'è un aumento di un fattore 100 della perdita di energia a parità di energia cinetica dell'elettrone; passando da 10 MeV a 1 GeV c'è di nuovo un aumento di un fattore 100 della perdita di energia. Un riassunto di tutto ciò è riportato nella fig.7.3 di Krane (fig.2.1.1).

Per stimare i contributi relativi si può fare il rapporto :

$$\frac{(dE/dx)_r}{(dE/dx)_c} \sim \frac{(t+1) Z}{1600} \quad (2.3.2)$$

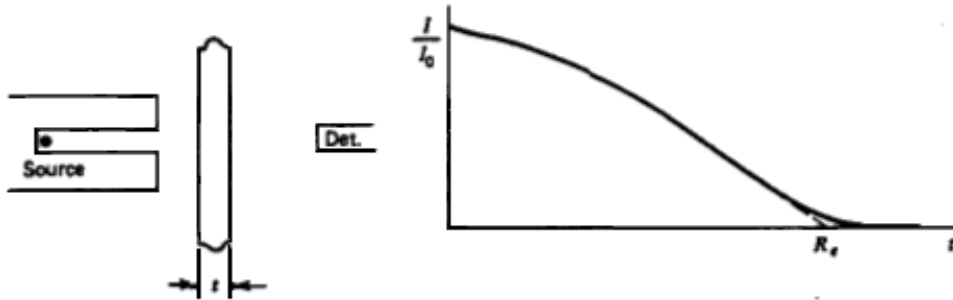
Si può, per esempio, verificare che per elettroni di 10 MeV in Pb le due perdite di energia sono praticamente uguali.

Anche nel caso degli elettroni i risultati sono più convenientemente espressi introducendo la densità della materia e riportando  $dE/d(\rho x)$ .

## 2.4 Range

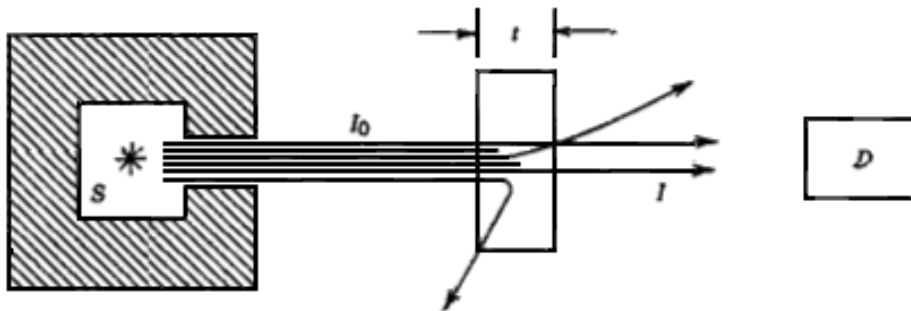
Il carattere medio del  $(dE/dx)$  è molto meno definito nel caso degli elettroni, i quali, per bremsstrahlung possono perdere anche tutta la loro energia in un evento singolo e che, per scattering, possono perderne gran parte, per cui, mentre l'integrale del  $(dE/dx)$  fra energia iniziale ed energia finale nulla dell'elettrone può servire a determinare il valore medio del cammino percorso dall'elettrone nel materiale, questo non ha praticamente relazione diretta con il range definito come spessore di materiale attraversato, per il quale è meglio fare riferimento agli esperimenti e per memoria alla fig.2.13 di Knoll e alle fig.7.9 e 7.11 di Krane.

Curve range - energia per elettroni in Al e aria sono inoltre riportate in Krane fig.7.4 (ESTAR).



**Figure 2-13** Transmission curve for monoenergetic electrons.  $R_e$  is the extrapolated range.

Figura 2.4.1: Knoll fig.2.13



**Figure 7.9** An experiment to measure absorption of radiation in a slab of material of thickness  $t$ . A beam of radiation from the source  $S$  is collimated and then is scattered or absorbed by the material. The remaining intensity  $I$  reaches the detector  $D$ .

Figura 2.4.2: Krane fig.7.9

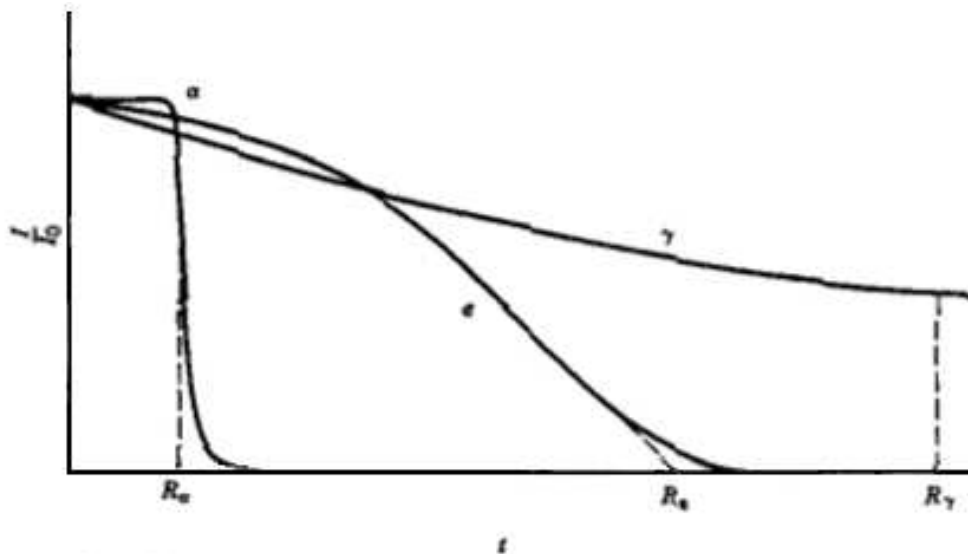
## 2.5 Ulteriori caratteristiche dell'interazione elettrone-materia

a) angolo quadratico medio di scattering: Fermi (pag.37) riporta le seguenti formule per valutazioni di ordini di grandezza:

$$\begin{aligned} \text{elettroni in Pb} & < \theta^2 > = \frac{6 \cdot 10^8}{[T(\text{keV})]^2} x \\ \text{elettroni in aria} & < \theta^2 > = \frac{7 \cdot 10^3}{[T(\text{keV})]^2} x \end{aligned}$$

Si desume così che, a parità di  $< \theta^2 >$  ed energia dell'elettrone incidente,  $7 \cdot 10^3 x_{aria} \simeq 6 \cdot 10^8 x_{Pb}$  ossia  $x_{aria} \simeq 10^5 x_{Pb}$ .

b) Knoll (pag.49) riporta in fig.2.17 la percentuale di backscattering di elettroni da  $50 \text{ keV}$  a  $50 \text{ MeV}$  su diversi tipi di materiale. Come si vede il fenomeno può diventare imponente con materiali di alto  $Z$  e per energie inferiori a  $1 \div 2 \text{ MeV}$ . La tabella 10.1 di pag.325



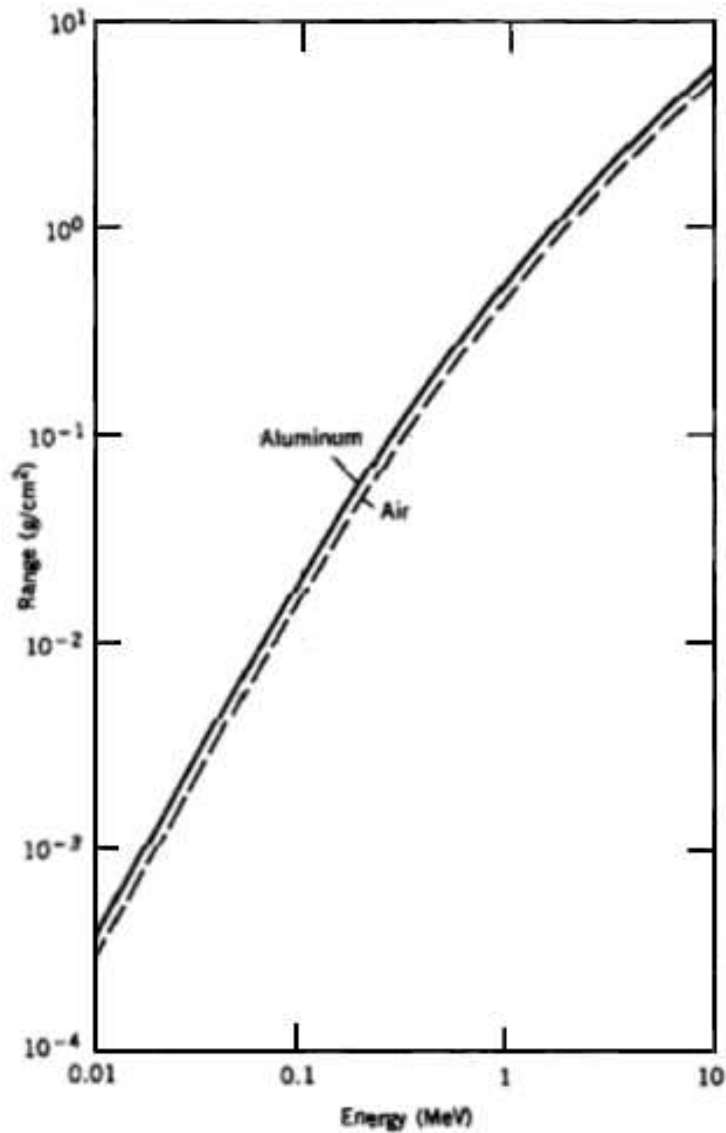
**Figure 7.11** The transmitted intensity measured in a geometry such as that shown in Figure 7.9. For  $\alpha$ 's, the value of  $t$  such that  $I/I_0 = 0.5$  is the mean range; for photons, with their simple exponential dependence, we can define the mean range similarly. For electrons, it is customary to define the *extrapolated* range by extending the linear portion of the absorption curve as shown. The horizontal scale is not at all linear; the range for  $\gamma$ 's may be  $10^4$  that for  $\alpha$ 's.

Figura 2.4.3: Krane fig.7.11

(Knoll) riporta l'interessante caso degli scintillatori organici (plastici). Per angoli d'incidenza minori di  $90^\circ$  il fenomeno si esalta.

c) positroni: in larga parte i risultati discussi per gli elettroni si applicano bene anche al caso dei positroni. La differenza principale sta nel fenomeno dell'annichilazione che avviene nella grande maggioranza dei casi con il positrone a riposo e con il decadimento del positronio (coppia  $e^+ e^-$ ) con l'emissione di due  $\gamma$  di  $511 \text{ keV}$  a  $180^\circ$ .

Inoltre, a energie basse il fatto che gli elettroni del materiale siano respinti dall'elettrone e attratti dal positrone, genera una perdita di energia piú grande per i positroni (v. anche il caso analogo  $\mu^+, \mu^-$  riportato dal Particle Data Group)



**Figure 7.4** Range-energy relationship for electrons in air and in aluminum.

Figura 2.4.4: Krane fig.7.4

### 3 Interazione della radiazione e.m. con la materia

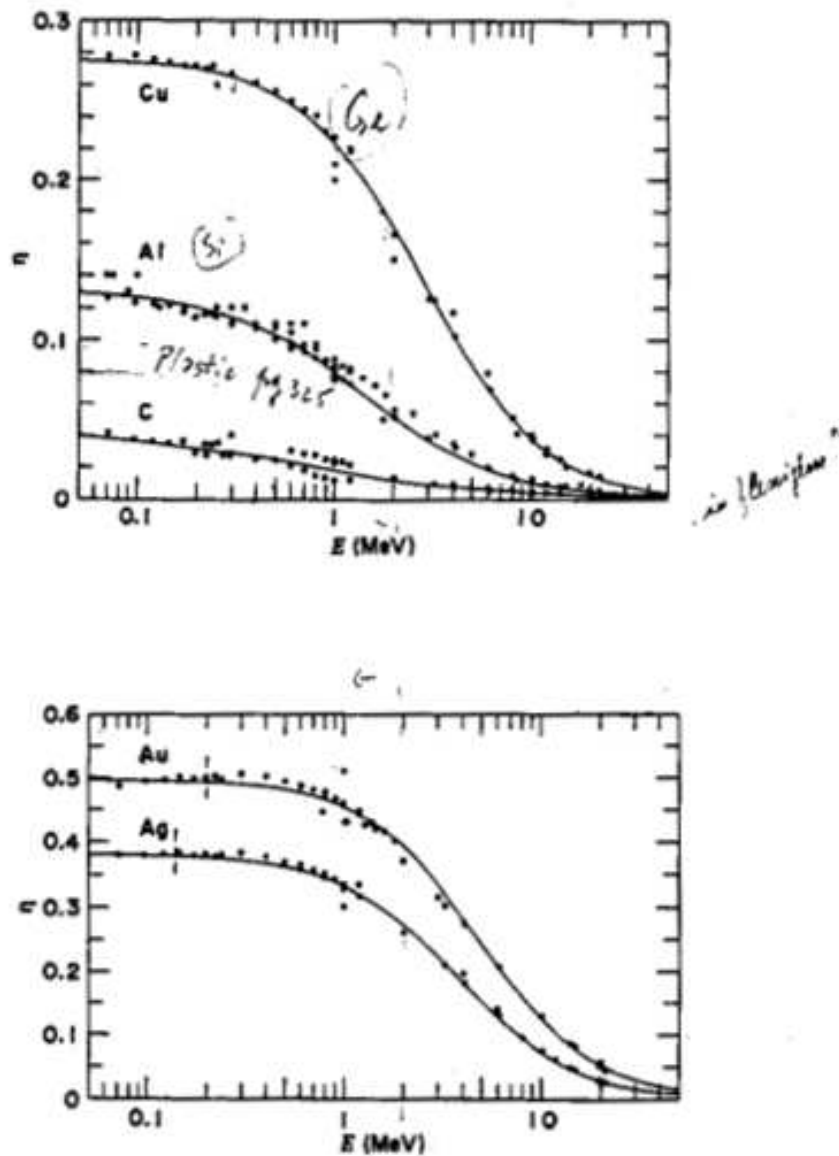
raggi  $\gamma$ : transizioni nucleari

raggi X: transizioni atomiche e radiazioni da macchine per radiodiagnostica e radioterapia

bremstrahlung: radiazione di frenamento (cariche comunque accelerate)

raggi  $\gamma$  di annichilazione:  $(e^+ + e^-) \rightarrow \gamma + \gamma$

Tre sono le interazioni principali: scattering Compton, effetto fotoelettrico, creazione di coppie.



**Figure 2-17** Fraction  $\eta$  of normally incident electrons that are backscattered from thick slabs of various materials, as a function of incident energy  $E$ . (From Tabata et al.<sup>12</sup>)

Figura 2.5.1: Knoll fig.2.17

### 3.1 Scattering Compton. Leggi di conservazione

Lo scattering Rayleigh (coerente) è già trascurabile a 100 keV. In Si, per raggi X fino a 10 keV, porta un contributo non superiore al 2% rispetto all'effetto fotoelettrico.

Si studierà l'effetto Compton (scattering incoerente) nell'ipotesi che l'energia di legame dell'elettrone sia piccola (si considera l'elettrone libero). Nelle formule che seguono fare-

mo uso della notazione  $\alpha = h\nu/m_e c^2$  per indicare l'energia del fotone misurata in unità di energia di massa di riposo dell'elettrone. In fig.3.1.1 è riportato schematicamente il processo di scattering incoerente.

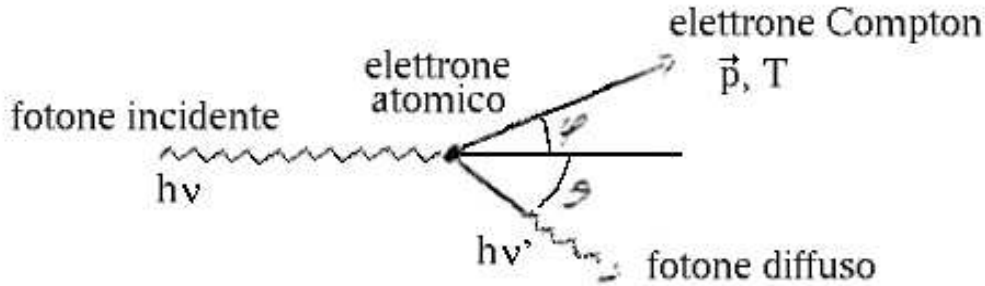


Figura 3.1.1:

Un fotone non ha massa di riposo, pertanto la relazione relativistica fra energia e impulso è:

$$h\nu = (p_f^2 c^2)^{1/2} = p_f c \quad (3.1.1)$$

e anche

$$p_f = h\nu/c \quad (3.1.2)$$

avendo indicato con  $p_f$  l'impulso del fotone.

Le leggi di conservazione dell'impulso e dell'energia sono:

$$\begin{cases} \frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu^*}{c} \cos \theta + p \cos \phi \\ 0 = \frac{h\nu^*}{c} \sin \theta - p \sin \phi \end{cases} \quad (3.1.3)$$

$$h\nu = h\nu^* + T \quad (3.1.4)$$

Utilizzando per l'elettrone la relazione relativistica :

$$pc = [T(T + 2m_e c^2)]^{1/2} = m_e c^2 [t(t + 2)]^{1/2} \quad (3.1.5)$$

con  $t = T/m_e c^2$ , si ottengono i seguenti risultati:

1) energia del fotone diffuso ad angolo  $\theta$

$$\begin{aligned} h\nu^* &= \frac{m_e c^2}{1 - \cos \theta + \frac{m_e c^2}{h\nu}} = \frac{h\nu}{\left(\frac{h\nu}{m_e c^2}\right)(1 - \cos \theta) + 1} = \\ &= \frac{h\nu}{1 + \alpha(1 - \cos \theta)} = m_e c^2 \frac{\alpha}{1 + \alpha(1 - \cos \theta)} \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

e anche

$$\frac{h\nu^*}{h\nu} = \frac{\nu^*}{\nu} = \frac{1}{1 + \alpha(1 - \cos \theta)} \quad (3.1.7)$$

2) energia dell'elettrone di rinculo:

$$T_e = h\nu - h\nu^* = h\nu \frac{\alpha(1 - \cos \theta)}{1 + \alpha(1 - \cos \theta)} = m_e c^2 \alpha \frac{\alpha(1 - \cos \theta)}{1 + \alpha(1 - \cos \theta)} \quad (3.1.8)$$

La (3.1.8) può essere riscritta con  $t = T_e/m_e c^2$

$$t = \frac{\alpha^2(1 - \cos \theta)}{1 + \alpha(1 - \cos \theta)} \quad ; \quad t(1 + \alpha) - t\alpha \cos \theta = \alpha^2(1 - \cos \theta) \quad ; \quad (\alpha^2 - \alpha t) \cos \theta = \alpha^2 - (1 + \alpha)t$$

e quest'ultima espressione può essere utilizzata per determinare  $\cos \theta$  e  $\sin \theta$ :

$$\cos \theta = \frac{\alpha^2 - (1 + \alpha)t}{\alpha^2 - \alpha t} \quad ; \quad \sin \theta = \left\{ 1 - \left[ \frac{\alpha^2 - (1 + \alpha)t}{\alpha^2 - \alpha t} \right]^2 \right\}^{1/2}$$

Inoltre, dalla (3.1.8) si può ricavare l'espressione dell'energia dell'elettrone di rinculo nel caso di backscattering del fotone:

$$T_{emax}(\theta = 180^\circ) = h\nu \frac{2\alpha}{1 + 2\alpha} = h\nu \frac{2 \frac{h\nu}{m_e c^2}}{1 + 2 \frac{h\nu}{m_e c^2}} = h\nu \frac{1}{\frac{m_e c^2}{2h\nu} + 1} \quad (3.1.9)$$

e il caso limite, quando  $h\nu \gg m_e c^2$ :

$$T_{emax}(\theta = 180^\circ, h\nu \gg m_e c^2) = h\nu \left( 1 - \frac{m_e c^2}{2} \frac{1}{h\nu} \right) = h\nu - \frac{m_e c^2}{2} \quad (3.1.10)$$

3) relazione fra gli angoli di scattering:

$$\frac{1}{\tan \varphi} = (1 + \alpha) \tan \frac{\theta}{2} \quad ; \quad \varphi = \arctan \frac{1}{(1 + \alpha) \tan \frac{\theta}{2}} \quad (3.1.11)$$

*NOTA: il fotone può essere diffuso con un angolo di scattering  $\theta$  compreso fra 0 rad (non urto) e  $\pi$  rad (urto centrale con backscattering)*

$$0 < \theta < \pi \rightarrow 0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2} \rightarrow 0 < \tan \frac{\theta}{2} < \infty \rightarrow 0 < \frac{1}{\tan \varphi} < \infty \rightarrow \infty > \tan \varphi > 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} > \varphi > 0$$

*nel sistema nel quale era inizialmente in quiete, l'elettrone, viceversa, può, al più, essere emesso a 90°.*

Concludiamo osservando che la diminuzione in energia del fotone  $h\nu - h\nu^*$ , e quindi l'energia cinetica acquistata dall'elettrone, dipende fortemente da  $h\nu$ :

$$\begin{aligned} \text{Esempio : per } \theta = 90^\circ \quad & \text{se } h\nu = 10 \text{ keV} \rightarrow h\nu - h\nu^* = 0.2 \text{ keV} \\ & \text{se } h\nu = 10 \text{ MeV} \rightarrow h\nu - h\nu^* = 9.5 \text{ MeV} \end{aligned}$$



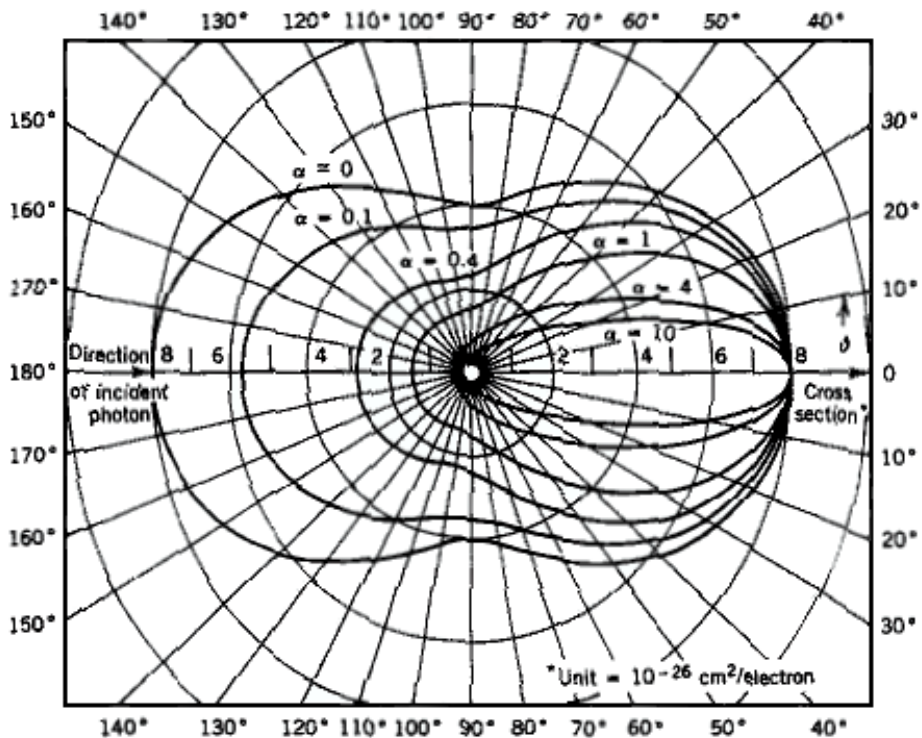
Le formule essenziali per le applicazioni pratiche sono le seguenti e valgono nel caso che la radiazione incidente non sia polarizzata:

Sezione d'urto differenziale di collisione di scattering fotone-elettrone, espressa in funzione dell'angolo del fotone diffuso e per unità di angolo solido attorno a tale direzione: "è la probabilità che un fotone di energia  $h\nu$  di un fascio monocromatico non polarizzato, nell'attraversare uno strato di spessore tale che l'assorbitore contiene 1 elettrone per  $cm^2$  subisca una collisione con l'elettrone a seguito della quale il fotone diffuso emerge con energia  $h\nu^*$  nell'angolo solido  $\sin \theta d\theta d\varphi$  attorno alla direzione  $\theta, \varphi$ , oppure, ammettendo la simmetria cilindrica, nell'angolo solido  $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$ ":

$$\frac{d\sigma_c}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{2} \left( \frac{\nu^*}{\nu} \right)^2 \left( \frac{\nu}{\nu^*} + \frac{\nu^*}{\nu} - \sin^2 \theta \right) \quad (3.1.12)$$

con  $\nu^*/\nu$  espresso dalla (3.1.7).

Osservazione: se nella (3.1.7)  $\alpha \ll 1$  e cioè se  $h\nu \ll m_e c^2$ , si ha  $\nu^*/\nu \sim 1$  e la (3.1.12) diventa  $d\sigma_T/d\Omega = (r_e^2/2)(1 + \cos^2 \theta)$  che è la formula di Thomson, il cui andamento con  $\theta$  è riportato per esempio in Evans (pag.683, fig.2.3), in Krane (pag.201, fig.7.7) e, in rappresentazione diversa, in Jackson (pag.681, fig. 14.13).



**Figure 7.7** The Compton-scattering cross section for various incident energies. The polar plot shows the intensity of the scattered radiation as a function of the scattering angle  $\theta$ . From R. D. Evans, *The Atomic Nucleus* (New York: McGraw-Hill, 1955).

Figura 3.1.2: Krane fig.7.7

L'andamento della sezione d'urto Thomson è simmetrico rispetto  $\theta = \pi/2$ .

Se si analizza, senza il precedente vincolo sull'energia, lo scattering da particelle puntiformi e di spin nullo [Jackson: formula (14.105), pag.682] si osserva una modificazione che si manifesta con il fattore  $(\nu^*/\nu)^2$  che, già per  $\alpha \geq 0.1$ , dissimmetrizza l'andamento della sezione d'urto con l'angolo.

La presenza dello spin introduce i termini  $\nu^*/\nu$  e  $\nu/\nu^*$  nella parentesi della (3.1.12). Questo è il risultato dai calcoli quantistici di Klein - Nishina che origina una modesta correzione, rispetto al caso di particelle di spin nullo, che diventa più rilevante all'aumentare dell'energia del fotone incidente.

### 3.2 Distribuzione di energia degli elettroni Compton

Questa è una conoscenza importante, come avremo modo di apprezzare quando discuteremo gli spettri energetici prodotti da rivelatori di  $\gamma$  come gli scintillatori di NaI e i rivelatori al Ge.

Utilizzando la simmetria cilindrica del problema si scrive  $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$  e, per conseguenza:

$$d\sigma = \frac{d\sigma_c}{d\Omega} 2\pi \sin \theta d\theta \quad ; \quad \frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{d\sigma_c}{d\Omega} 2\pi \sin \theta \quad (3.2.1)$$

La (3.2.1) esprime la probabilità di scattering del fotone diffuso in un angolo solido conico, fra due coni con stesso vertice (elettrone urtato) e stesso asse (direzione di moto del fotone incidente) e di semiapertura  $\theta$  e  $\theta + d\theta$ .

Si ricorda che, secondo la (3.1.11), per ciascun fotone diffuso fra  $\theta$  e  $\theta + d\theta$  c'è un elettrone che rincula in un cono fra  $\varphi$  e  $\varphi + d\varphi$  nell'angolo solido  $d\Omega_e = 2\pi \sin \varphi d\varphi$ . Siccome il numero di fotoni diffuso fra  $\theta$  e  $\theta + d\theta$  deve essere uguale al numero di elettroni di rinculo fra  $\varphi$  e  $\varphi + d\varphi$ , si può utilizzare la distribuzione numerica dei fotoni (3.2.1) e determinare l'energia dei corrispondenti elettroni usando la (3.1.8) che serve anche a trasformare la distribuzione numerica in angolo in quella in energia, con le seguenti formalità: come già detto, si indica  $h\nu/m_e c^2$  con  $\alpha$  e si misura anche l'energia dell'elettrone  $T_e$ , in unità  $m_e c^2$  ponendo  $T_e/m_e c^2 = t_e$ .

Le equazioni da utilizzare, scritte con tali notazioni, sono:

$$\frac{d\sigma}{dt_e} = \frac{d\sigma}{d\theta} \frac{d\theta}{dt_e} = \left( \frac{d\sigma_c}{d\Omega} \right) 2\pi \sin \theta \frac{d\theta}{dt_e} \quad (3.2.2)$$

con  $d\sigma_c/d\Omega$  espresso dalla (3.1.12) nella quale si introduce  $\nu^*/\nu$  nella forma (3.1.7).

Energia dell'elettrone di rinculo dalla (3.1.8):

$$t_e = \frac{\alpha^2(1 - \cos \theta)}{1 + \alpha(1 - \cos \theta)} \quad (3.2.3)$$

$$\frac{dt_e}{d\theta} = \frac{\alpha^2 \sin \theta}{[1 + \alpha(1 - \cos \theta)]^2} \quad ; \quad \frac{d\theta}{dt_e} = \frac{[1 + \alpha(1 - \cos \theta)]^2}{\alpha^2 \sin \theta} \quad (3.2.4)$$

segue dalla (3.2.2):

$$\frac{d\sigma}{dt_e} = \left( \frac{d\sigma_c}{d\Omega} \right) 2\pi \sin \theta \frac{[1 + \alpha(1 - \cos \theta)]^2}{\alpha^2 \sin \theta} = \frac{2\pi}{\alpha^2} \left( \frac{d\sigma_c}{d\Omega} \right) [1 + \alpha(1 - \cos \theta)]^2$$

$$\frac{d\sigma}{dt_e} = \frac{2\pi}{\alpha^2} \frac{r_e^2}{2} \left\{ \frac{1}{1 + \alpha(1 - \cos \theta)} + \frac{1}{[1 + \alpha(1 - \cos \theta)]^3} - \frac{\sin^2 \theta}{[1 + \alpha(1 - \cos \theta)]^2} \right\} [1 + \alpha(1 - \cos \theta)]^2$$

$$\frac{d\sigma}{dt_e} = \pi r_e^2 \frac{1}{\alpha^2} \left\{ [1 + \alpha(1 - \cos \theta)] + \frac{1}{1 + \alpha(1 - \cos \theta)} - \sin^2 \theta \right\} \quad (3.2.5)$$

Inoltre, dalla (3.2.3) si ricava subito:

$$(1 - \cos \theta) = \frac{t_e}{\alpha(\alpha - t_e)} ; \cos \theta = \frac{\alpha(\alpha - t_e) - t_e}{\alpha(\alpha - t_e)} ; \sin^2 \theta = 1 - \frac{[\alpha(\alpha - t_e) - t_e]^2}{\alpha^2(\alpha - t_e)^2} \quad (3.2.6)$$

sostituendo le (3.2.6) nella (3.2.5), con qualche calcolo, si ottiene:

$$\left( \frac{d\sigma}{dt_e} \right) \frac{1}{\pi r_e^2} = \frac{2\alpha^4 - 2\alpha^2(2\alpha + 1)t_e + (3\alpha^2 + 2\alpha + 1)t_e^2 - \alpha t_e^3}{\alpha^4(\alpha - t_e)^2} \quad (3.2.7)$$

In definitiva, per avere la distribuzione “numero-energia” degli elettroni Compton, fissata l’energia del fotone incidente, si ricavano i valori di  $t_e$  dalla relazione (3.2.3) facendo  $0 < \theta < \pi$  e si introducono nella (3.2.7) che riscriviamo nella forma finale:

$$\frac{d\sigma}{dT_e} = \frac{\pi r_e^2}{m_e c^2} [ \quad ] \quad (3.2.8)$$

e introducendo le costanti numeriche e le unità di misura:

$$r_e = e^2/m_e c^2 = 2.81 \cdot 10^{-13} \text{ cm} \text{ raggio classico dell'elettrone}; m_e c^2 = 511 \text{ keV}$$

$$\frac{d\sigma}{dT_e} = 48.6 \cdot 10^{-26} [ \quad ] \frac{\text{cm}^2}{\text{elettrone}} \text{ MeV}^{-1} \quad (3.2.9)$$

Per esempio, per  $\alpha = 1$  ( $h\nu = 511 \text{ keV}$ ), si ha il caso particolare:

$$t_e(\alpha = 1) = \frac{1 - \cos \theta}{2 - \cos \theta} ; \frac{d\sigma}{dt_e} \frac{1}{\pi r_e^2} = (2 - \cos \theta) + \frac{1}{2 - \cos \theta} - \sin^2 \theta$$

per questo caso si hanno i valori riportati in tabella:

$\theta$ (gradi)	$t_e(\alpha = 1)$	$\frac{d\sigma}{dt_e} \frac{1}{\pi r_e^2}(\alpha = 1)$
0	0.0	2.0
10	0.015	1.97
30	0.118	1.77
60	0.333	1.42
90	0.5	1.50
120	0.6	2.15
150	0.651	2.96
180	0.666	3.33

Questo risultato è riportato in forma grafica in Knoll fig.10.1 pag.291.

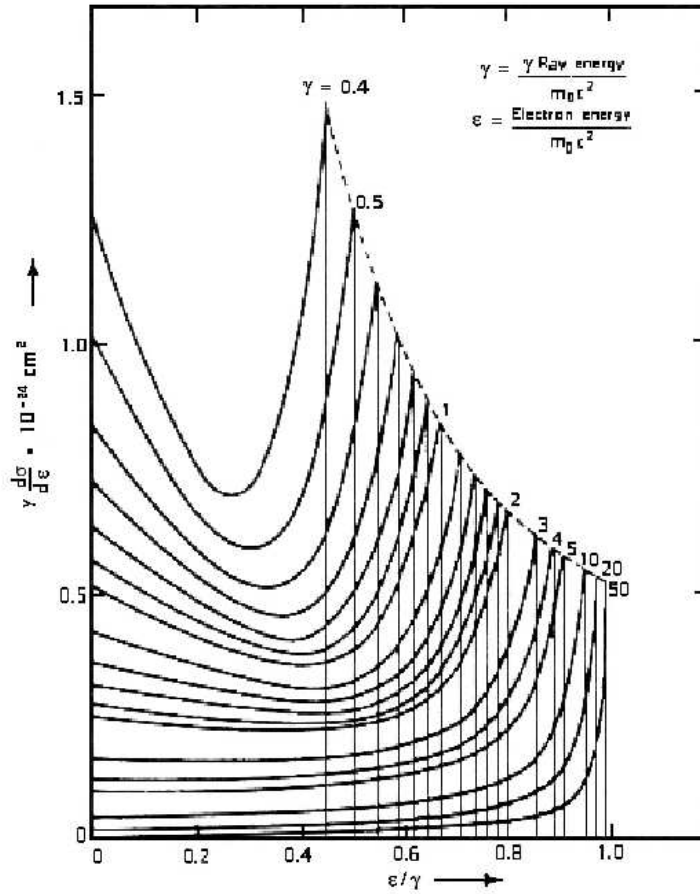


Figura 3.2.1: Knoll fig.10.1

### 3.3 Sezione d'urto totale e coefficienti di attenuazione lineare e di massa

L'integrazione su tutto l'angolo solido della (3.1.12), una volta espresso  $\nu^*/\nu$  tramite la (3.1.7), conduce al risultato:

$$\begin{aligned}
 \sigma_c &= \int_{4\pi} \left( \frac{d\sigma_c}{d\Omega} \right) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = 2\pi \int_0^\pi \left( \frac{d\sigma_c}{d\Omega} \right) \sin\theta \, d\theta = \\
 &= 2\pi r_e^2 \left\{ \frac{1+\alpha}{\alpha^2} \left[ \frac{2(1+\alpha)}{1+2\alpha} - \frac{1}{\alpha} \ln(1+2\alpha) \right] + \frac{1}{2\alpha} \ln(1+2\alpha) - \frac{(1+3\alpha)}{(1+2\alpha)^2} \right\} \frac{cm^2}{elettrone}
 \end{aligned}
 \tag{3.3.1}$$

La sezione d'urto totale  $\sigma_c$  rappresenta la probabilità di rimozione del fotone da un fascio monocromatico collimato, nel passare attraverso un assorbitore che contiene 1 elettrone per  $cm^2$ . La divergenza di  $\sigma_c$ , per  $\alpha \rightarrow 0$ , è dovuta al fatto che il calcolo non tiene conto che gli elettroni sono legati.

Il coefficiente di attenuazione lineare Compton si definisce come segue:

Consideriamo un foglio sottile di spessore  $dx$  di materia omogenea e amorfa, caratterizzato

da  $N$  atomi per  $cm^3$ , ciascun atomo con  $Z$  elettroni: ci sono  $(NZ)$  elettroni per  $cm^3$  e  $(NZdx)$  elettroni per  $cm^2$ . Supponiamo che un fascio collimato di  $n$  fotoni al secondo, ciascun fotone avendo energia  $h\nu$ , attraversi il foglio perpendicolarmente. Il numero di fotoni  $dn_c$  che subiscono collisione Compton, e che sono pertanto rimossi dal fascio collimato, è:

$$dn_c = (NZ dx)\sigma_c n \quad (3.3.2)$$

Si suppone  $\sigma_c$  indipendente da  $Z$ , perché si suppone l'energia  $h\nu$  del fotone molto più grande dell'energia di legame (binding energy BE) degli elettroni.

Il coefficiente di attenuazione lineare Compton  $\sigma$  è definito come segue:

$$\sigma = N Z \sigma_c \text{ cm}^{-1} \quad (3.3.3)$$

e quindi vengono a mancare dal fascio  $dn = -dn_c = -\sigma dx n$  fotoni.

Pertanto il numero di fotoni  $n$  presenti nel fascio, che inizialmente ne conteneva  $n_0$ , dopo che è stato attraversato uno spessore  $x$  di materiale, è:

$$n = n_0 e^{-\sigma x} = n_0 e^{-\frac{\sigma}{\rho}(\rho x)} \quad (3.3.4)$$

La (3.3.3) può essere riscritta, ricordando che  $N = N_A\rho/M_m$ , come segue:

$$\sigma = N_A \frac{\rho}{M_m} Z \sigma_c \quad (3.3.5)$$

Per due sostanze diverse, per le quali siano noti densità, massa molare e numero atomico, si può scrivere:

$$\sigma_1 = N_A \frac{\rho_1}{M_{m\ 1}} Z_1 \sigma_c \quad ; \quad \sigma_2 = N_A \frac{\rho_2}{M_{m\ 2}} Z_2 \sigma_c$$

e il rapporto dei coefficienti di attenuazione lineare risulta:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\rho_1 Z_1 M_{m\ 2}}{\rho_2 Z_2 M_{m\ 1}} \quad (3.3.6)$$

La (3.3.6) è importante perché permette di determinare il coefficiente di attenuazione lineare di una sostanza appena noto quello di un'altra. È meglio che le due sostanze non abbiano  $Z$  troppo diversi per eliminare effetti minori dovuti alle differenti BE trascurate nelle considerazioni precedenti.

La (3.3.5) si presta ad essere riscritta nella forma:

$$\frac{\sigma}{\rho} = N_A \frac{Z}{M_m} \sigma_c \text{ g}^{-1}\text{cm}^2 \quad (3.3.7)$$

che mette in evidenza come il coefficiente  $\sigma/\rho$ , che prende il nome di coefficiente di attenuazione di massa, sia sostanzialmente indipendente dal tipo di materiale in quanto, a parte l'idrogeno, il rapporto numerico  $Z/M_m$ , per le composizioni isotopiche naturali,

risulta  $0.45 \pm 0.05$  per tutti gli elementi.

In termini del coefficiente di attenuazione di massa la (3.3.4) si scrive:

$$n = n_0 e^{-\frac{\sigma}{\rho} (\rho x)} \quad (3.3.8)$$

Diventa così, anche in questo caso, utile e naturale misurare gli spessori di materia attraversata in unità  $g\ cm^{-2}$  o con i sottomultipli  $mg\ cm^{-2}$  e  $\mu g\ cm^{-2}$ .

Interessanti esempi di andamento di  $\sigma/\rho$  nell'ambito  $10\ keV \div 100\ MeV$  di energia della radiazione elettromagnetica sono riportati in Evans (pag. 713  $\div$  717, fig. 1.2  $\div$  1.6) per aria, acqua, Al, Pb e NaI.

Riportiamo due esempi di utilizzazione della (3.3.6):

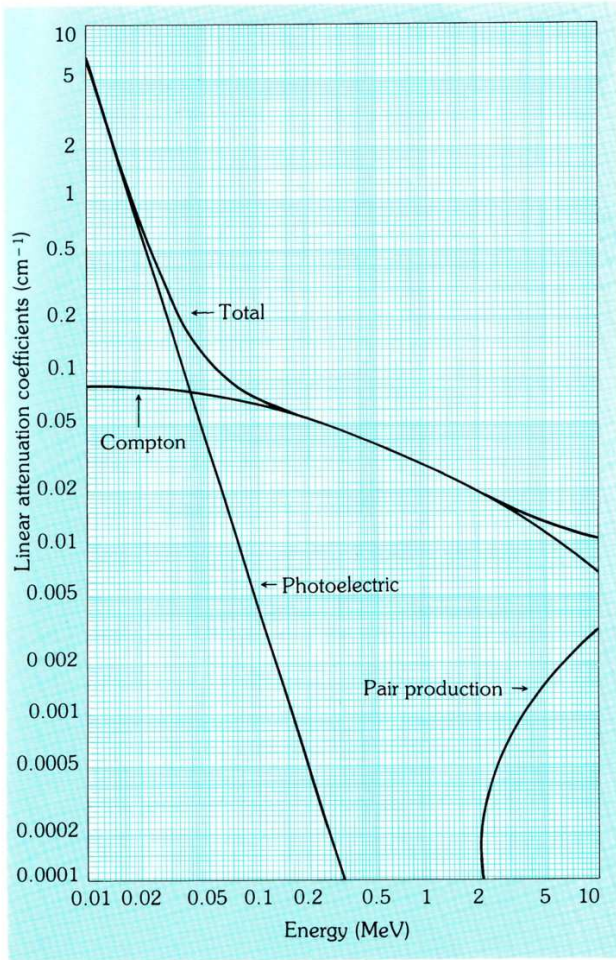
$$\frac{\sigma_{Si}/\rho_{Si}}{\sigma_{Al}/\rho_{Al}} = \frac{Z_{Si} M_m\ Al}{Z_{Al} M_m\ Si} = \frac{14\ 27}{13\ 28} = 1.038$$

correzione  $\sim 4\ \%$

$$\frac{\sigma_{Ge}/\rho_{Ge}}{\sigma_{Al}/\rho_{Al}} = \frac{Z_{Ge} M_m\ Al}{Z_{Al} M_m\ Ge} = \frac{32\ 27}{13\ 72.6} = 0.915$$

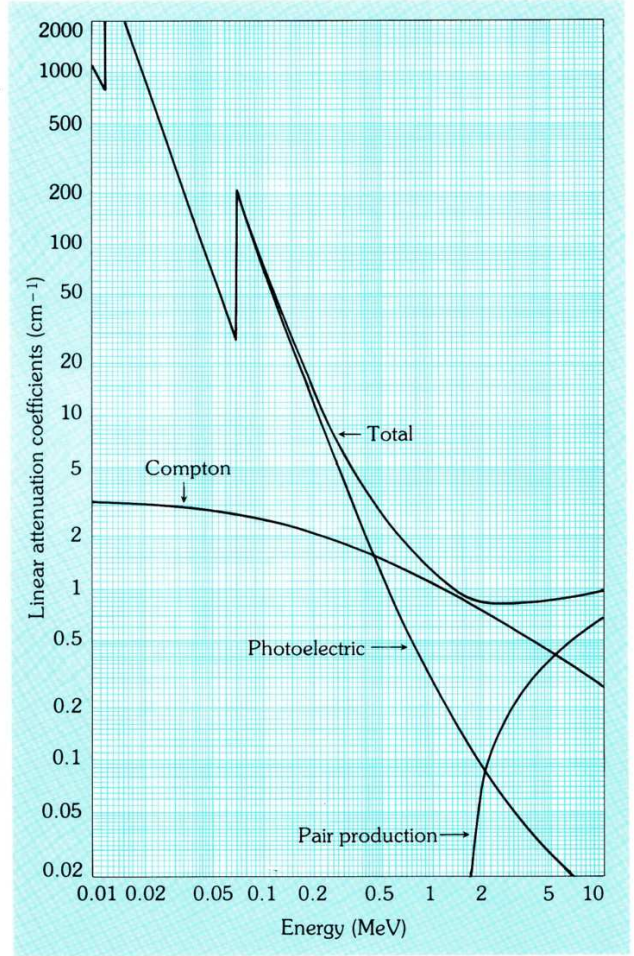
correzione  $\sim 8\ \%$ .

$\text{Al}_2\text{O}_3$



Specific mass  
 Depends upon packing density, about  $450 \text{ kg/m}^3$   
 Atomic number:  $Z(\text{Al}) = 13$   
 $Z(\text{O}) = 8$   
 K-edge (Al) = 1.56 keV

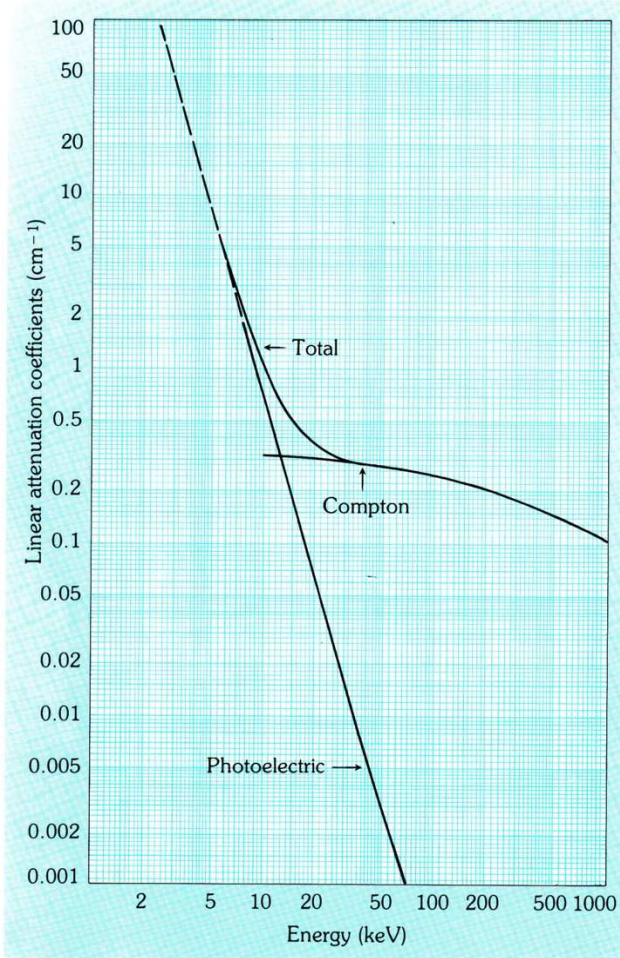
W



Specific mass =  $19350 \text{ kg/m}^3$   
 Atomic number:  $Z = 74$   
 Electron Binding Energies:  
 K-edge = 69.53 keV  
 $L_1$ -edge = 12.10 keV  
 $L_{11}$ -edge = 11.54 keV  
 $L_{111}$ -edge = 10.21 keV  
 Average K X-Ray Energy = 60.7 keV

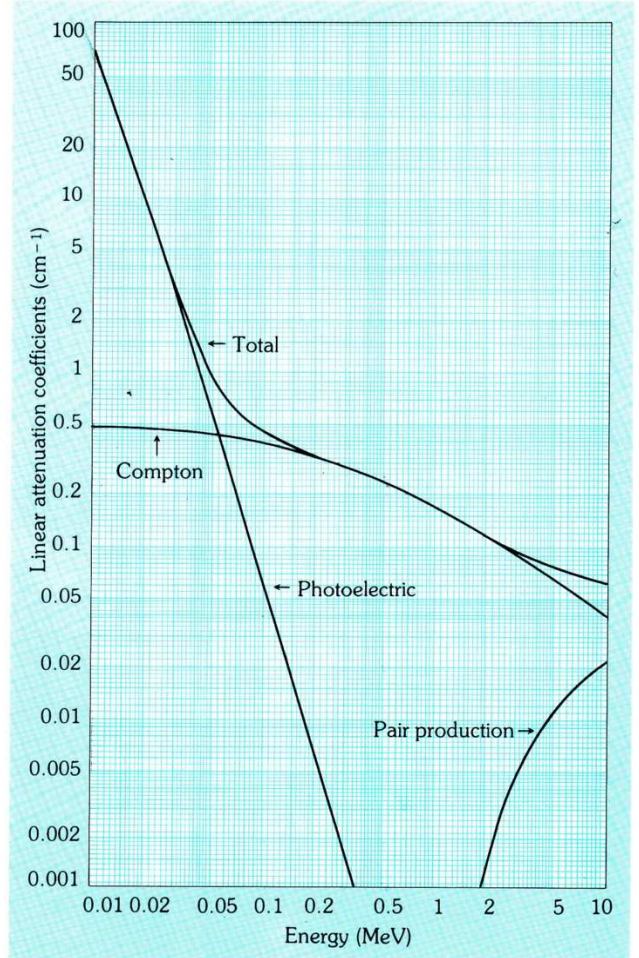
Figura 3.3.1:

Be



Specific mass = 1850 kg/m<sup>3</sup>  
Atomic number: Z = 4  
K-Binding Energy = 0.116 keV

Al

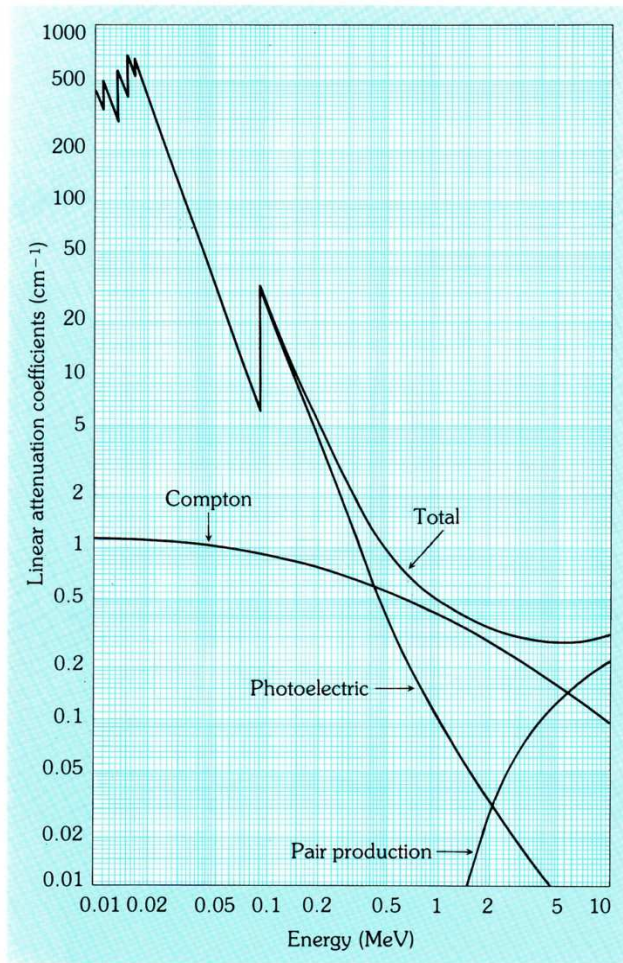


Specific mass = 2700 kg/m<sup>3</sup>  
Atomic number: Z = 13  
Electron Binding Energies:  
K-edge = 1.56 keV  
Average K X-Ray Energy = 1.45 keV

Figura 3.3.2:

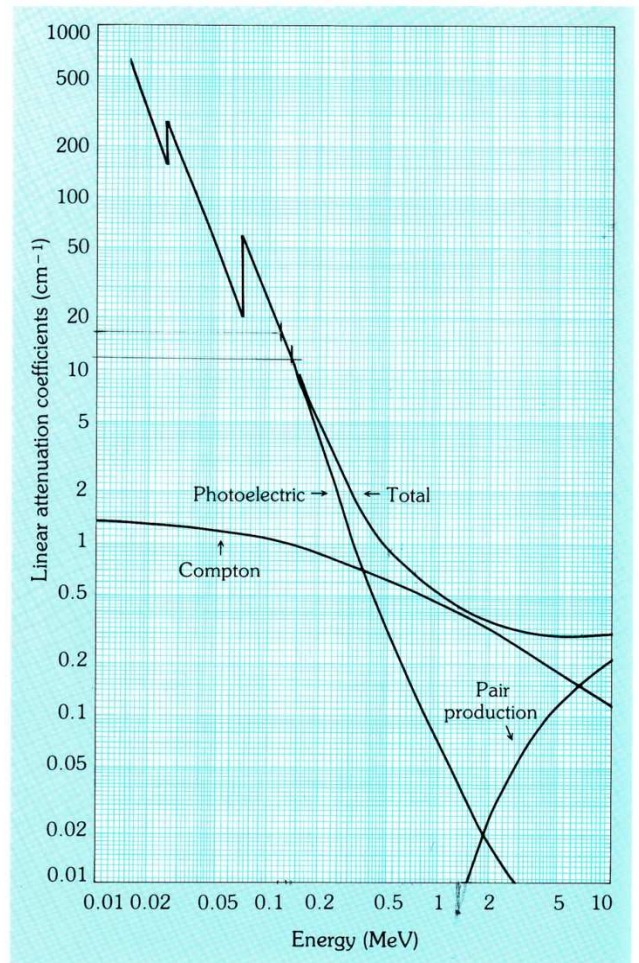


**BGO**



Specific mass = 7130 kg/m<sup>3</sup>  
 Atomic number: Z (Bi) = 83  
                   Z (Ge) = 32  
 Electron Binding Energies:  
 K-edge (Bi) = 90.53 keV  
 L<sub>1</sub>-edge (Bi) = 16.39 keV  
 L<sub>11</sub>-edge (Bi) = 15.71 keV  
 L<sub>111</sub>-edge (Bi) = 13.42 keV  
 K-edge (Ge) = 11.10 keV  
 Average K X-Ray Energy (Bi) = 78.9 keV

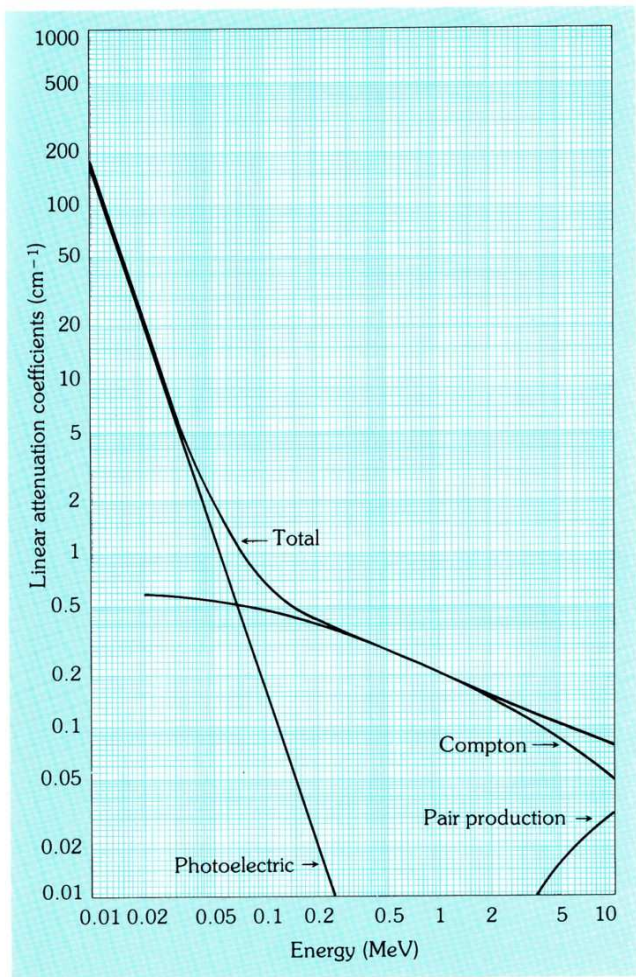
**CdWO<sub>4</sub>**



Specific mass = 7900 kg/m<sup>3</sup>  
 Atomic number: Z (Cd) = 48  
                   Z (W) = 74  
 Electron Binding Energies:  
 K-edge (W) = 69.5 keV  
 L<sub>1</sub>-edge (W) = 12.1 keV  
 L<sub>11</sub>-edge (W) = 11.5 keV  
 L<sub>111</sub>-edge (W) = 10.2 keV  
 K-edge (Cd) = 26.7 keV

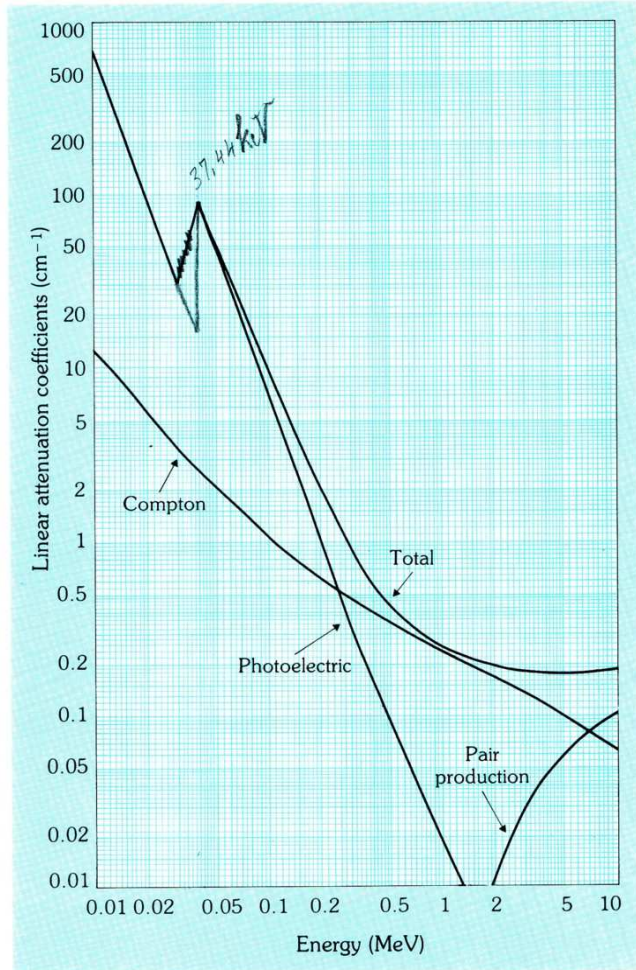
Figura 3.3.3:

**CaF<sub>2</sub>**



Specific mass = 3190 kg/m<sup>3</sup>  
 Atomic number: Z (Ca) = 20  
                   Z (F) = 9  
 Electron Binding Energies:  
 K-edge (Ca) = 4.04 keV  
 K-edge (F) = 0.69 keV  
 Average K X-Ray Energy (Ca) = 3.7 keV

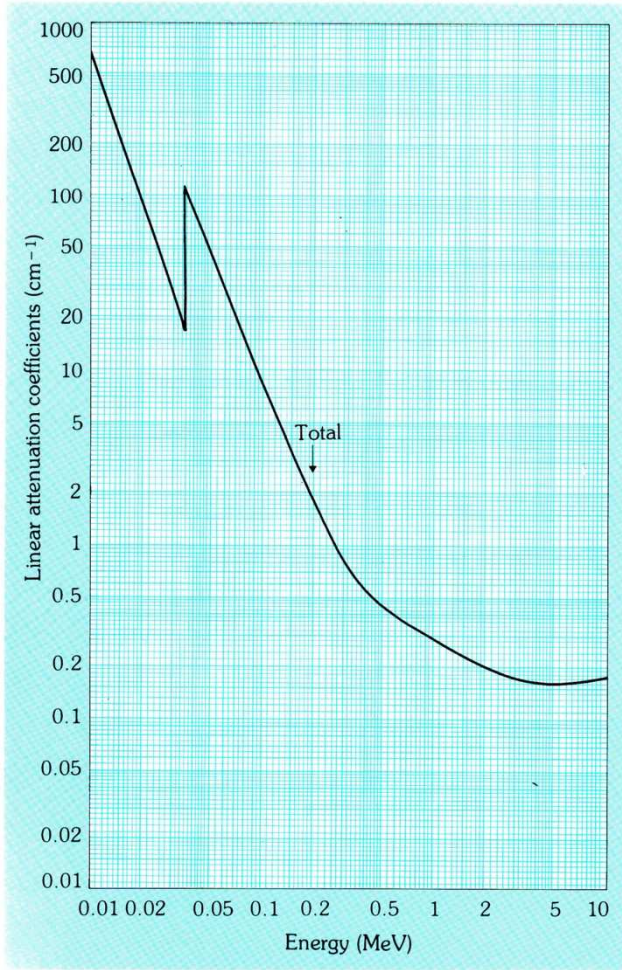
**BaF<sub>2</sub>**



Specific mass = 4880 kg/m<sup>3</sup>  
 Atomic number: Z (Ba) = 56  
                   Z (F) = 9  
 Electron Binding Energies:  
 K-edge (Ba) = 37.44 keV  
 L<sub>1</sub>-edge (Ba) = 5.99 keV  
 L<sub>11</sub>-edge (Ba) = 5.62 keV  
 L<sub>111</sub>-edge (Ba) = 5.25 keV  
 K-edge (F) = 0.69 keV

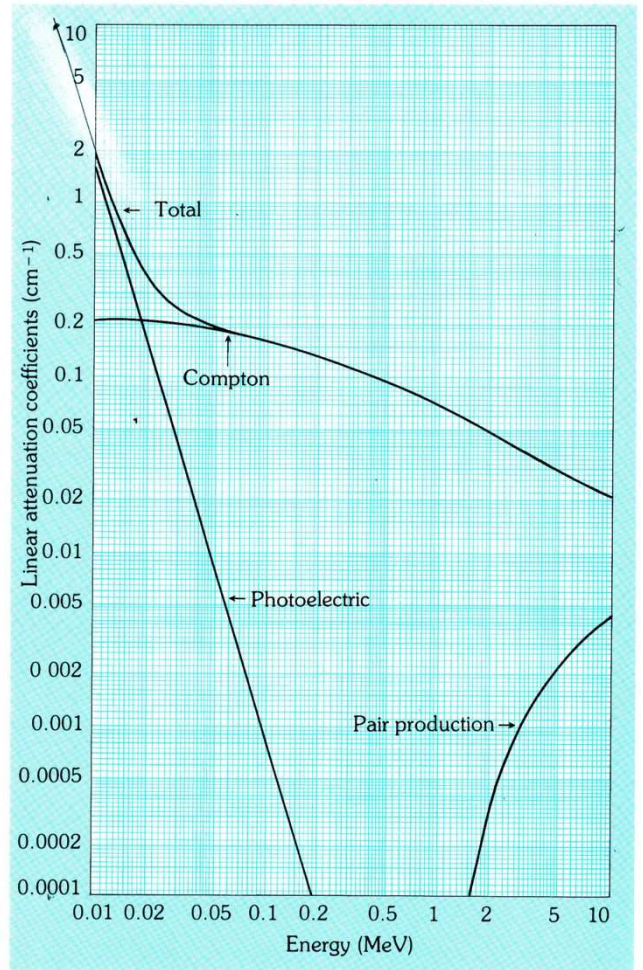
Figura 3.3.4:

**CsF**



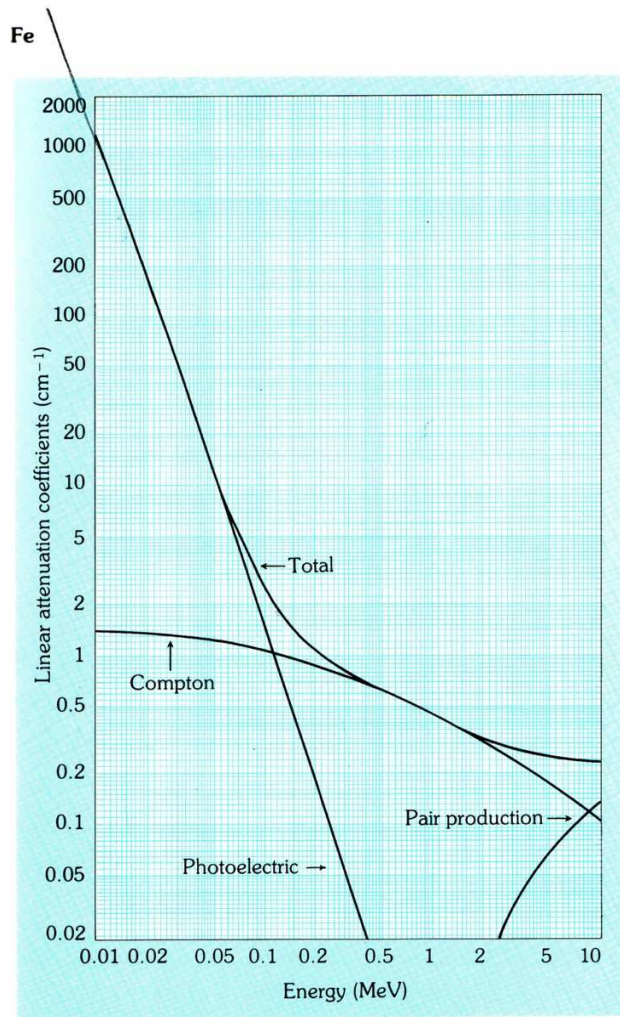
Specific mass = 4640 kg/m<sup>3</sup>  
 Atomic number: Z(Cs) = 55  
                   Z(F) = 9  
 Electron Binding Energies:  
 K-edge (Cs) = 35.98 keV  
 L<sub>1</sub>-edge (Cs) = 5.72 keV  
 L<sub>11</sub>-edge (Cs) = 5.36 keV  
 L<sub>111</sub>-edge (Cs) = 5.01 keV  
 K-edge (F) = 0.69 keV  
 Average K X-ray energy (Cs) = 31.6 keV

**Plastic Scintillator** *(1mm of Carbon)*  $\rho = 1050 \text{ kg/m}^3$

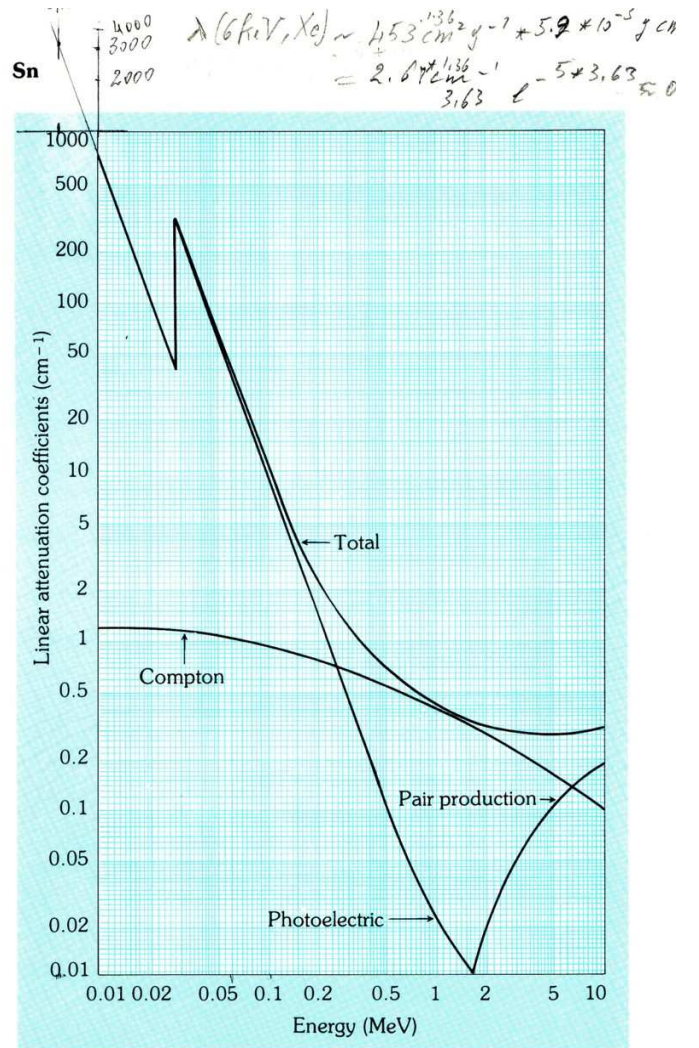


Specific mass = 1050 kg/m<sup>3</sup>  
 No atoms per cm<sup>3</sup>  
 H:  $5.25 \times 10^{22}$ ; C:  $4.75 \times 10^{22}$   
 N:  $1.8 \times 10^{18}$ ; O:  $1.8 \times 10^{18}$   
 Atomic number: Z (C) = 6  
 K-edge (C) = 0.28 keV

Figura 3.3.5: Evans Fig. 1.6



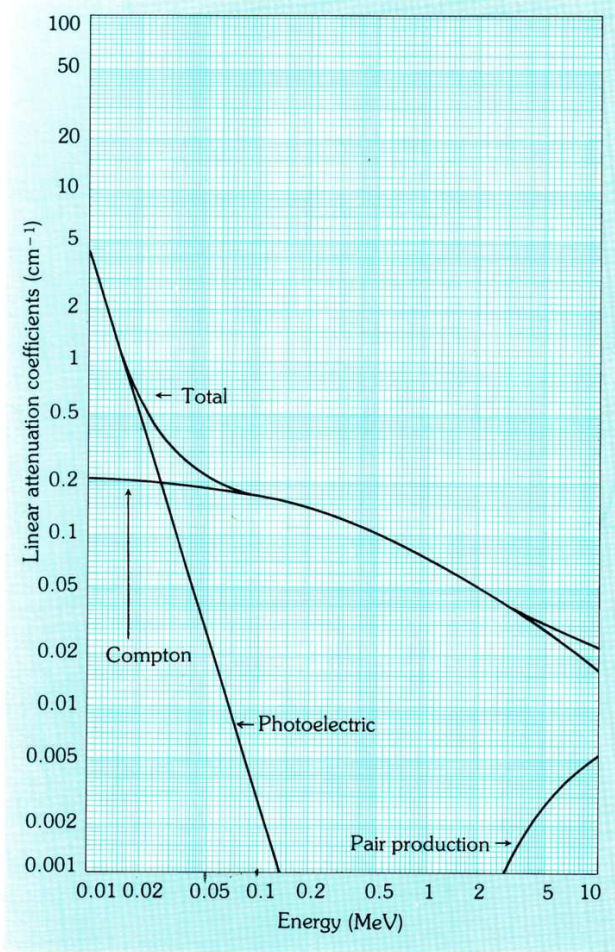
Specific mass = 7860 kg/cm<sup>3</sup>  
 Atomic Number: Z = 26  
 Electron Binding Energies:  
 K-edge = 7.11 keV  
 L<sub>1</sub>-edge = 0.84 keV  
 L<sub>11</sub>-edge = 0.72 keV  
 L<sub>111</sub>-edge = 0.71 keV  
 Average K X-Ray Energy = 6.47 keV



Specific mass = 7280 kg/m<sup>3</sup>  
 Atomic number: Z = 50  
 Electron Binding Energies:  
 K-edge = 29.20 keV  
 L<sub>1</sub>-edge = 4.47 keV  
 L<sub>11</sub>-edge = 4.16 keV  
 L<sub>111</sub>-edge = 3.93 keV  
 Average K X-Ray Energy = 25.8 keV

Figura 3.3.6:

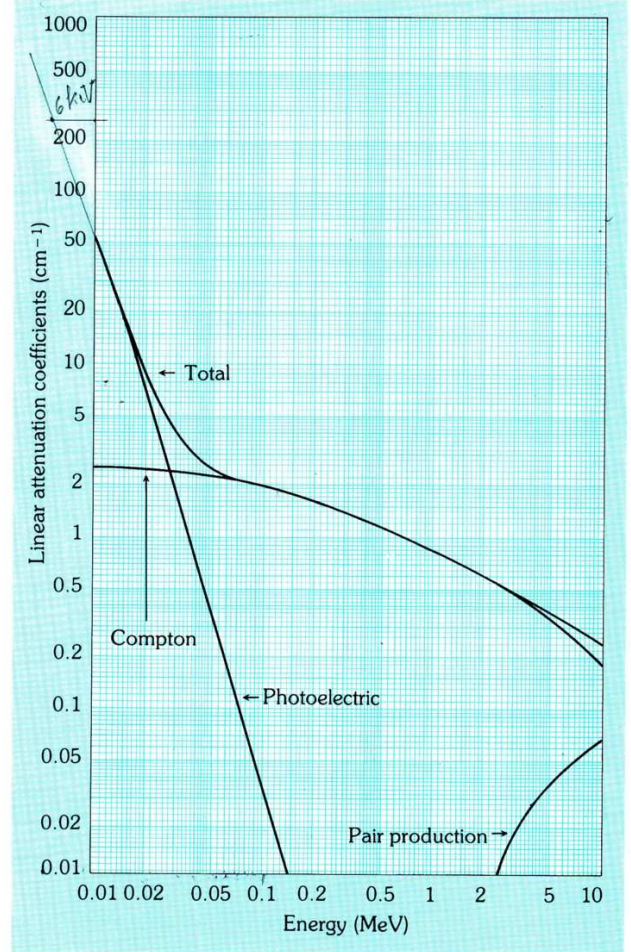
H<sub>2</sub>O



Specific mass = 1000 kg/m<sup>3</sup>

Air  
x 10<sup>-4</sup>

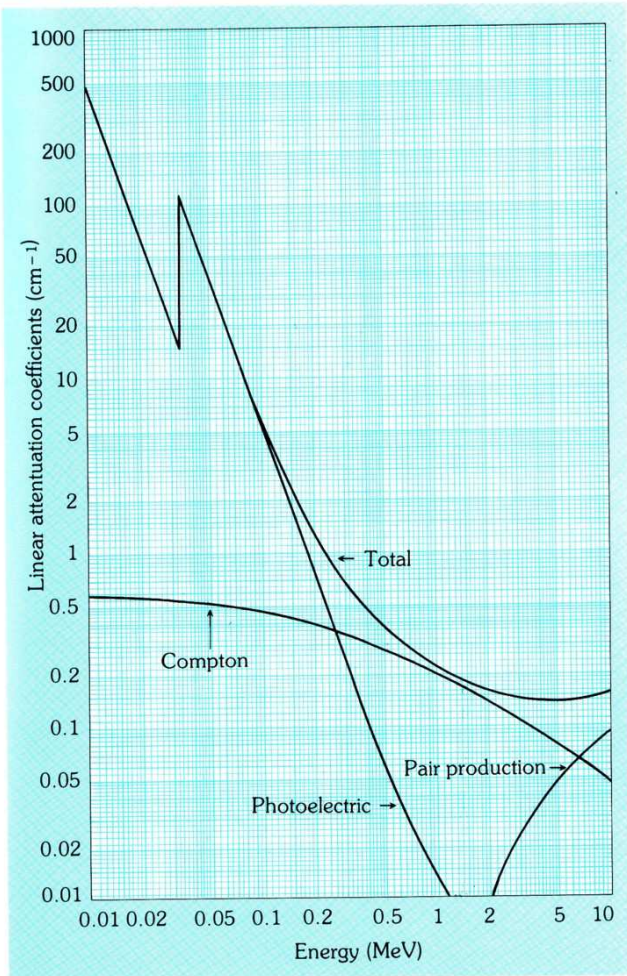
depth 5cm  $e^{-5 \times 2.6 \times 10^{-2}} \approx 0.88$



Specific mass = 1.293 kg/m<sup>3</sup>  
Composition of "air"  
78.04 volume percent nitrogen  
21.02 volume percent oxygen  
0.94 volume percent argon

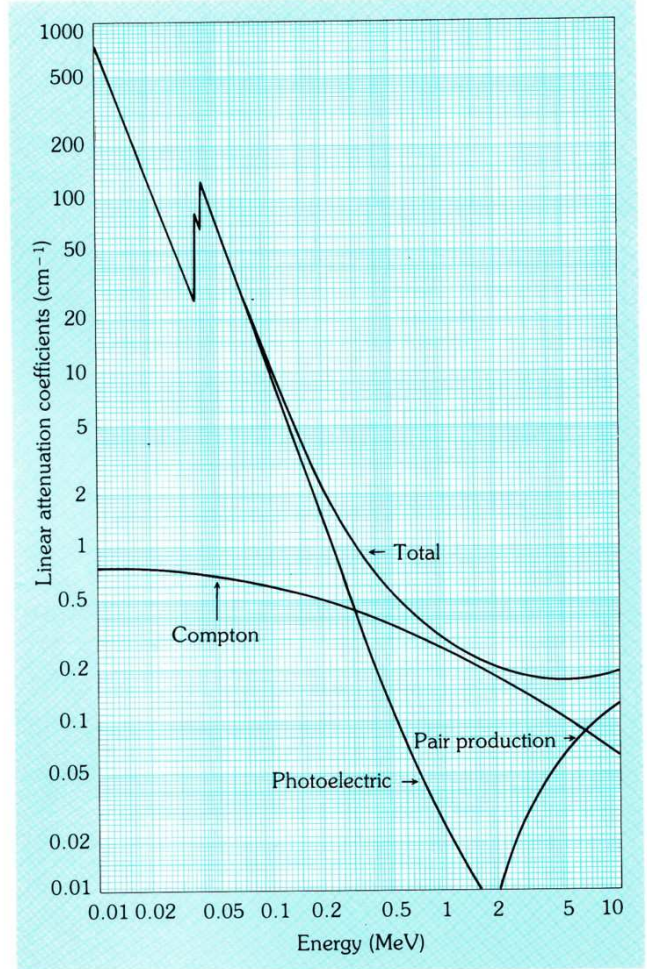
Figura 3.3.7:

NaI



Specific mass = 3670 kg/m<sup>3</sup>  
Atomic Number: Z(I) = 53  
Z(Na) = 11  
Electron Binding Energies:  
K-edge (I) = 33.17 keV  
L<sub>1</sub>-edge (I) = 5.19 keV  
L<sub>11</sub>-edge (I) = 4.85 keV  
L<sub>111</sub>-edge (I) = 4.56 keV  
Average K X-Ray Energy (I) = 29.2 keV

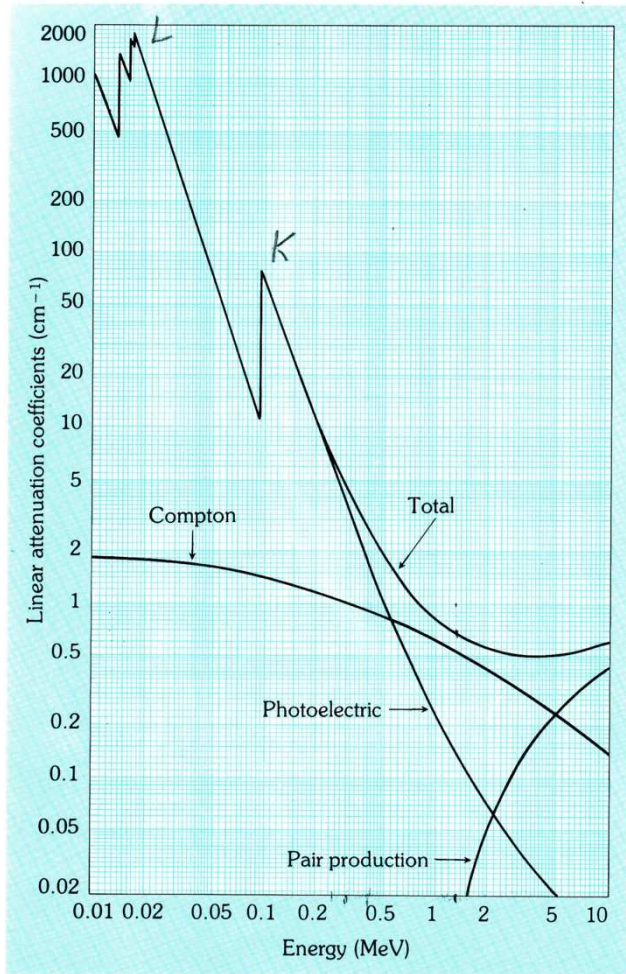
CsI



Specific mass = 4510 kg/m<sup>3</sup>  
Atomic number: Z (I) = 53  
Z (Cs) = 55  
Electron Binding Energies:  
K-edge (I) = 33.17 keV  
K-edge (Cs) = 35.98 keV  
L<sub>1</sub>-edge (Cs) = 5.72 keV  
L<sub>11</sub>-edge (Cs) = 5.36 keV  
L<sub>111</sub>-edge (Cs) = 5.01 keV  
Average K X-Ray Energy (Cs) = 31.6

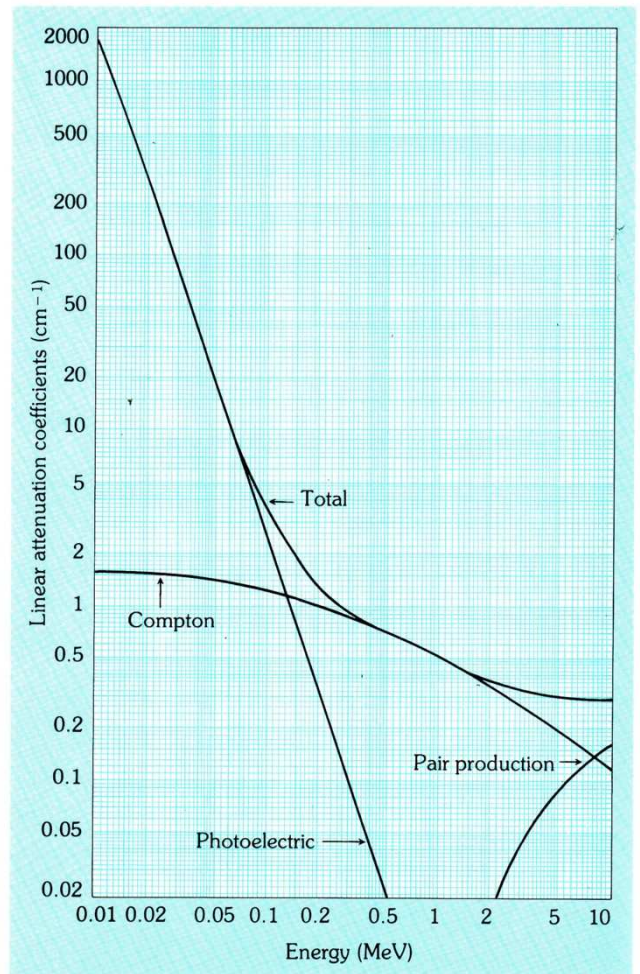
Figura 3.3.8:

Pb



Specific mass = 11350 kg/m<sup>3</sup>  
Atomic number: Z = 82  
Electron Binding Energies:  
K-edge = 88.02 keV  
L<sub>1</sub>-edge = 15.87 keV  
L<sub>11</sub>-edge = 15.21 keV  
L<sub>111</sub>-edge = 13.05 keV  
Average K X-Ray Energy = 76.74 keV

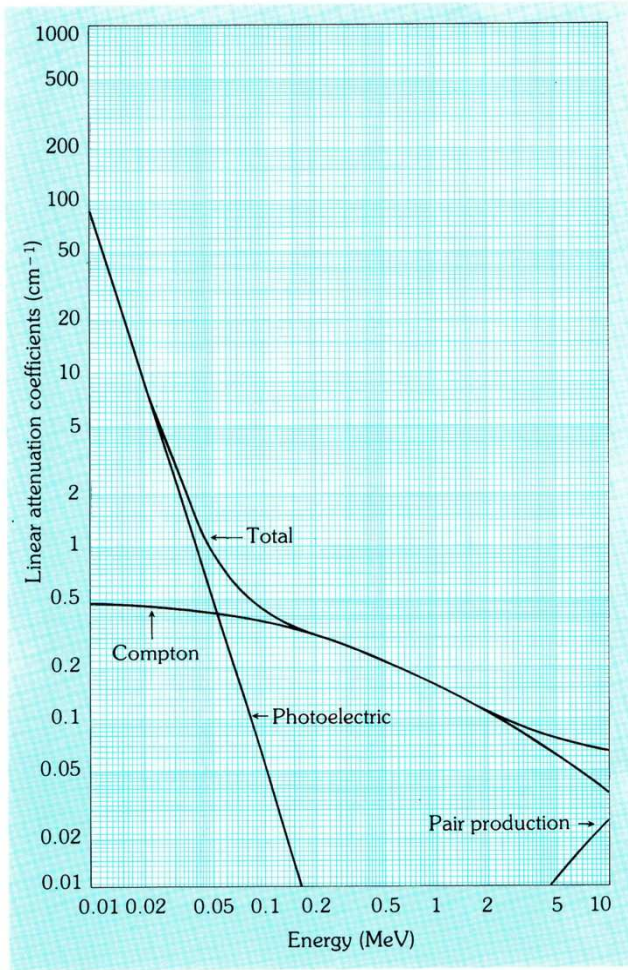
Cu



Specific mass = 8920 kg/m<sup>3</sup>  
Atomic number: Z = 29  
Electron Binding Energies:  
K-edge = 8.98 keV  
L<sub>1</sub>-edge = 1.10 keV  
L<sub>11</sub>-edge = 0.95 keV  
L<sub>111</sub>-edge = 0.93 keV  
Average K X-Ray Energy = 8.11 keV

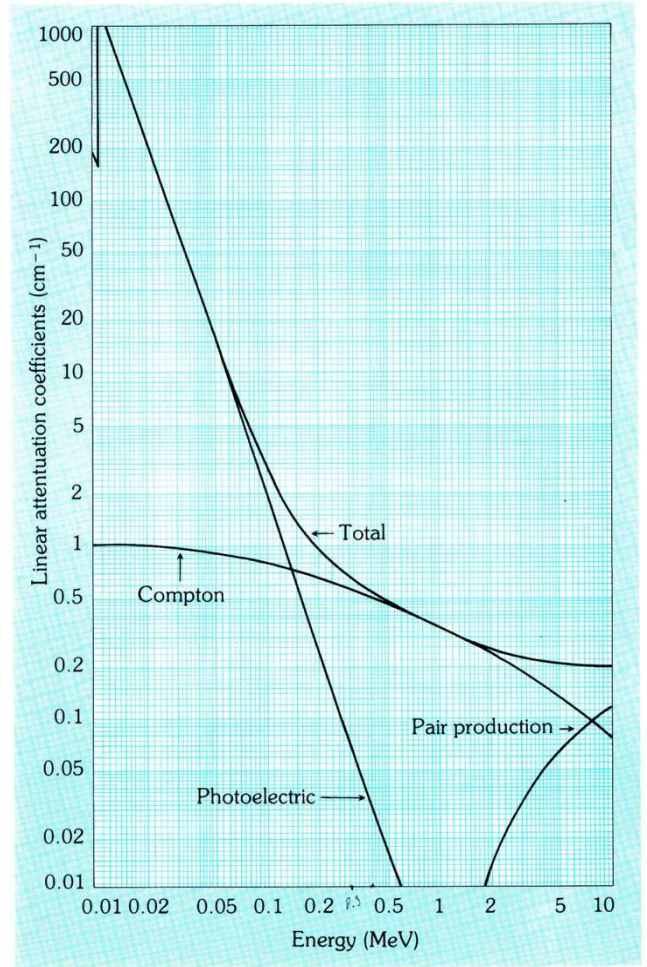
Figura 3.3.9:

Si



Specific mass = 2420 kg/m<sup>3</sup>  
Atomic number: Z = 14  
Electron Binding Energy:  
K-edge = 1.84 keV  
Average K X-Ray Energy: 1.75 keV

Ge



Specific mass = 5350 kg/m<sup>3</sup>  
Atomic number: Z = 32  
Electron Binding Energy:  
K-edge = 11.1 keV  
Average K X-Ray Energy = 10 keV

Figura 3.3.10:



### 3.4 Interazione fotoelettrica (effetto fotoelettrico)

Nella successiva figura sono ricordate le principali proprietà delle shell atomiche e la struttura elettronica degli elementi leggeri.

numeri quantici				Nomenclatura spettroscopica del livello		n. stati disponibili	
n	l	m	m <sub>s</sub>				
1	0	0	±½		1s	2	<b>K shell</b>
2	0	0	±½		2s	2	L <sub>I</sub>
2	1	-1	±½		Spin orbit coupling		<b>L shell</b>
		0	±½	2p →	2p <sub>1/2</sub>	6	L <sub>II</sub>
		1	±½	→	2p <sub>3/2</sub>		L <sub>III</sub>

n. atomico	Simbolo	Struttura elettronica	
1	H	(1s) <sup>1</sup>	<b>K shell</b>
2	He	(1s) <sup>2</sup>	2 elettroni (n=1)
3	Li	(1s) <sup>2</sup> (2s) <sup>1</sup>	
4	Be	(1s) <sup>2</sup> (2s) <sup>2</sup>	
5	B	(1s) <sup>2</sup> (2s) <sup>2</sup> (2p) <sup>1</sup>	
6	C	(1s) <sup>2</sup> (2s) <sup>2</sup> (2p) <sup>2</sup>	<b>L shell</b>
7	N	(1s) <sup>2</sup> (2s) <sup>2</sup> (2p) <sup>3</sup>	8 elettroni (n=2)
8	O	(1s) <sup>2</sup> (2s) <sup>2</sup> (2p) <sup>4</sup>	
9	F	(1s) <sup>2</sup> (2s) <sup>2</sup> (2p) <sup>5</sup>	
10	Ne	(1s) <sup>2</sup> (2s) <sup>2</sup> (2p) <sup>6</sup>	
11	Na	(1s) <sup>2</sup> (2s) <sup>2</sup> (2p) <sup>6</sup> (3s) <sup>1</sup>	<b>M shell</b> 18 elettroni (n=3)

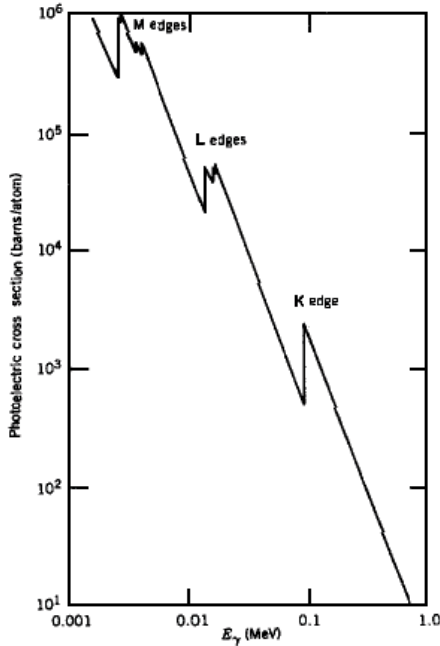
Figura 3.4.1:

Si riportano alcune considerazioni dovute a Fermi, che sembrano le più fisicamente interessanti.

Gli elettroni atomici sono raggruppabili in gusci (shell) che differiscono per le energie di legame. La shell più interna detta shell *K*, contiene fino a 2 elettroni 1s che hanno un'energia di legame  $BE_K \sim 13.5(Z - 1)^2 \text{ eV}$ . Le shell successive sono la *L* (che può contenere fino a 8 elettroni) e la *M* (fino a 16 elettroni), le cui energie di legame sono approssimativamente:  $BE_L \sim 13.5(Z - 5)^2/4 \text{ eV}$  e  $BE_M \sim 13.5(Z - 13)^2/9 \text{ eV}$ . Queste due ultime valutazioni sono molto approssimative perché la *BE* dipende dall'effetto di schermo degli altri elettroni e dalla forma dell'orbita. Le orbite più esterne dell'atomo che contengono elettroni sono le cosiddette orbite di valenza con energie di legame dell'ordine di  $2 \div 3 \text{ eV}$  e sono quelle coinvolte nell'emissione degli spettri ottici. Meno legate di queste orbite ce ne sono altre, vuote, che emergono nel continuo (stati di elettrone libero).

Se possiede sufficiente energia un fotone può rimuovere un elettrone da una qualunque orbita e lasciarlo in un'altra (compatibilmente con il principio di esclusione di Pauli) o

lasciare l'atomo ionizzato e l'elettrone libero ( $T_e > 0$ ). All'aumentare della sua energia, il fotone inizia ad essere in grado di eccitare elettroni delle orbite ottiche (pochi  $eV$ ). Questo tipo di perdita di energia è il primo contributo all'assorbimento di fotoni per effetto fotoelettrico. Via via che aumenta l'energia del fotone l'assorbimento finisce con l'interessare anche orbite più interne. Quando  $h\nu$  raggiunge la  $BE$  di una particolare shell c'è un improvviso aumento nell'assorbimento fotoelettrico.



**Figure 7.5** Photoelectric cross section in Pb. The discrete jumps correspond to the binding energies of various electron shells; the K-electron binding energy, for example, is 88 keV. To convert the cross section to the linear absorption coefficient  $\tau$  in  $\text{cm}^{-1}$ , multiply by 0.033.

Un buon esempio dell'assorbimento fotoelettrico in funzione dell'energia e delle discontinuità alle  $BE$  di shell è riportato in Krane (pag.199, fig.7.5). L'energia per la quale si verifica il brusco cambiamento della sezione d'urto prende il nome di soglia (o edge). Le soglie di assorbimento  $L$  sono 3 perché nella shell  $L$  ci sono 3 sotto-shell ( $2s, 2p_{1/2}, 2p_{3/2}$ ) che hanno energia un poco diversa a causa della differente schermatura del nucleo, che distingue le orbite  $s$  dalle orbite  $p$ , e per la diversa interazione spin-orbita che genera lo sdoppiamento  $2p_{1/2}, 2p_{3/2}$ .

Per energie usuali dei raggi  $\gamma$  incidenti ( $\geq 100 \text{ keV}$ ), la sezione d'urto fotoelettrico è prevalentemente determinata dagli elet-

troni  $K$ . La sezione d'urto di assorbimento fotoelettrico associata ad un elettrone  $K$  (che passi nel continuo di energia e quindi con energia cinetica finale  $> 0$ ) è stata calcolata ipotizzando una funzione d'onda di tipo idrogenoide per l'elettrone  $1s$ .

Il risultato (Heitler "Quantum theory of radiation" 2<sup>nd</sup> ed. pag. 124) è il seguente:

$$\sigma_{ph}(\text{per 1 elettrone } 1s) = \frac{128\pi}{3} \frac{e^2 h}{m_e c} \frac{1}{E_\gamma} \left( \frac{BE_K}{E_\gamma} \right)^3 \frac{e^{-4\varepsilon \arctan(1/\varepsilon)}}{1 - e^{-2\pi\varepsilon}} \text{ cm}^2 \quad (3.4.1)$$

con

$$\varepsilon = [BE_K / (E_\gamma - BE_K)]^{1/2}$$

La (3.4.1) vale solo per  $E_\gamma > BE_K$ .

In prossimità della soglia  $K$ , funziona piuttosto bene la seguente formula semplificata:

$$\sigma_{ph}(\text{per 1 elettrone } 1s) \simeq \frac{6.31 \cdot 10^{-18}}{Z^2} \left( \frac{BE_K}{E_\gamma} \right)^{8/3} \text{ cm}^2 \quad (3.4.2)$$

NOTA: 1) se si pensa di utilizzare  $2\sigma_{ph}$  come sezione d'urto atomica totale dell'effetto fotoelettrico è evidente che questo vale solo per  $E_\gamma > BE_K$ . Inoltre, il contributo trascurato delle altre shell può arrivare ad essere il 40% del valore calcolato e costituisce un'importante correzione; 2) secondo l'equazione (3.4.1), poiché  $BE_K \sim 13.5(Z-1)^2 eV$ , si prevede una dipendenza della sezione d'urto da  $Z$  del tipo  $(Z-1)^6$  e, nella forma approssimata (3.4.2), del tipo  $(Z-1)^{16/3}/Z^2$ . La dipendenza dall'energia del fotone passa viceversa da  $\sim E_\gamma^{-8/3}$  in vicinanza della soglia, a  $\sim E_\gamma^{-4}$  secondo la formula (3.4.1).

Nella tabella seguente sono riportate le zone di energia nelle quali predomina l'effetto fotoelettrico per alcuni tipi, molto diffusi, di rivelatori di radiazione elettromagnetica.

materiale del rivelatore	$BE_K(keV)$	energie al di sotto delle quali predomina l'effetto fotoelettrico (keV)
NaI	36	100
Ge	11	75
Si	1.8	25
Camera ionizz. (aria)		20
Scint. plastici		15

Molte delle considerazioni riportate da Evans sull'andamento di  $\sigma_{ph}$  con  $Z$  e con  $E_\gamma$  riguardano la zona di energia meno importante, mentre, al di sotto dei 100 keV si suggerisce di utilizzare i risultati sperimentali.

Il coefficiente di attenuazione lineare per effetto fotoelettrico si suppone di scriverlo come:

$$\tau = \{(5 \div 6)/4\} \sigma_{ph} N \text{ cm}^{-1} \quad (3.4.3)$$

ove con il coefficiente numerico  $(5 \div 6)/4$  si cerca di tenere conto degli elettroni  $L$ ,  $M$  etc. e  $N$  è il numero di atomi per  $\text{cm}^3$  che è sempre conveniente porre nella forma  $N_A \rho / M_m$ . Per due differenti materiali, 1 e 2, si ipotizza di poter scrivere:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= (5/4) \sigma_{ph} N_1 = (5/4) K Z_1^n N_A \rho_1 / M_{m\ 1} \\ \tau_2 &= \qquad \qquad \qquad = (5/4) K Z_2^n N_A \rho_2 / M_{m\ 2} \end{aligned}$$

e quindi

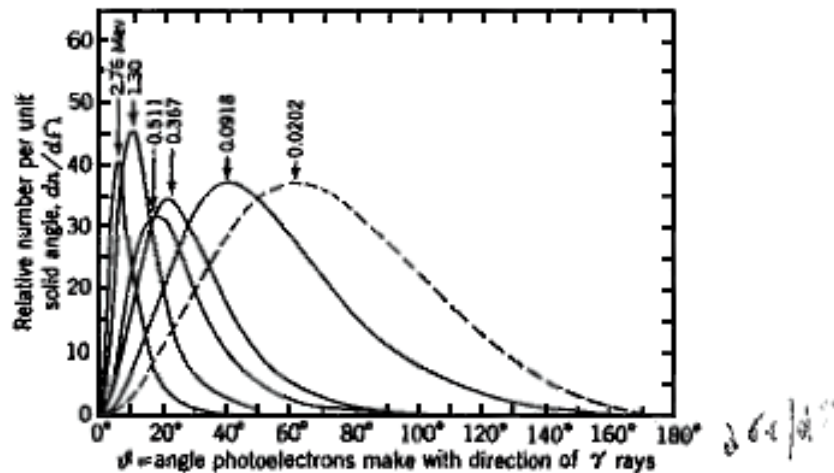
$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{Z_1^n \rho_1}{M_{m\ 1}} \frac{M_{m\ 2}}{Z_2^n \rho_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{M_{m\ 2}}{M_{m\ 1}} \left( \frac{Z_1}{Z_2} \right)^n \quad (3.4.4)$$

Nella maggior parte dei casi non occorre fare distinzione fra attenuazione ed assorbimento (ma non sempre questo è vero), supponendo che raggi X ed elettroni Auger emessi nel riassetamento dell'atomo dopo la eiezione del foto-elettrone, data la loro piccola energia, siano di nuovo assorbiti in prossimità del punto di interazione.

Anche in questo caso è di uso corrente introdurre ed utilizzare il coefficiente di attenuazione di massa:

$$\frac{\tau_1}{\rho} = \frac{5 \div 6}{4} \sigma_{ph} \frac{N_A}{M_m} g^{-1} \text{ cm}^2 \quad (3.4.5)$$

Un risultato interessante, confermato dagli esperimenti, è riportato in Evans (pag.696,697; fig. 1.2 e 1.3) e riguarda la distribuzione angolare con la quale sono emessi i fotoelettroni in funzione dell'energia del quanto  $\gamma$  incidente. Uno degli aspetti più caratteristici è che per energie inferiori a  $20\text{ keV}$  la distribuzione avanti-indietro è sostanzialmente simmetrica con un massimo molto accentuato attorno a  $\theta = \pi/2$  ( $\theta$  angolo di emissione nel sistema L del fotoelettrone misurato rispetto alla direzione di incidenza del fotone). Per energie crescenti la distribuzione è sempre più del tipo "in avanti" (risultano cioè favoriti gli angoli  $\theta$  piccoli).



**Fig. 1.2** Directional distribution of photoelectrons per unit solid angle, for energies as marked. The curves are not normalized with respect to each other. Solid curves are calculated from Sauter's (S0) relativistic formula; dashed curve from Fischer's (F50) nonrelativistic formula. [From Davison and Evans (D12).]

Figura 3.4.3: Evans Fig. 1.2

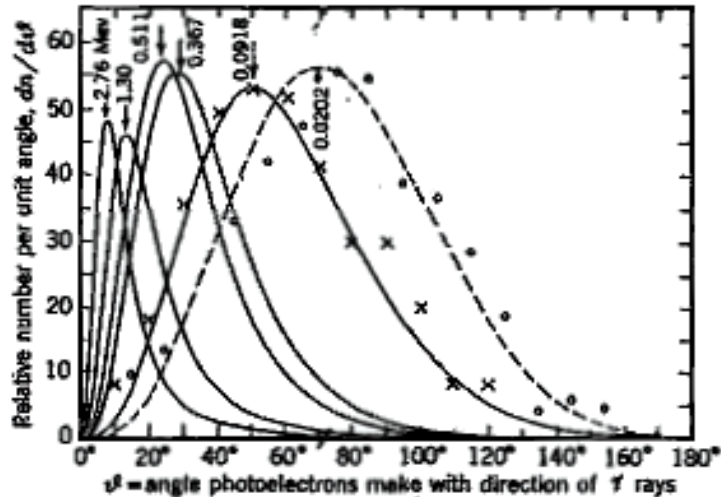
### 3.5 Produzione di coppie

Per discutere il processo di creazione di coppie si riportano alcune considerazioni riprese da Fermi.

Una procedura semplificata, simile a quella utilizzata per calcolare la perdita di energia radiativa di elettroni veloci (bremsstrahlung), può essere usata anche per calcolare la sezione d'urto per produzione di coppie ( $e^+, e^-$ ) da parte di fotoni di energia molto grande. Per arrivare al risultato finale occorre conoscere, sperimentalmente o teoricamente, la sezione d'urto del processo di collisione in vuoto:  $h\nu + h\nu = e^+ + e^-$ .

Consideriamo un fotone di energia  $h\nu \sim 1000 m_e c^2$  ( $\sim 0.5\text{ GeV}$ ).

Passiamo dal sistema L, nel quale il nucleo è a riposo, ad un sistema di riferimento nel quale il nucleo si muove quasi a velocità  $c$  (non proprio il sistema di riferimento del fotone, ma quasi). Il fotone incidente, visto in questo nuovo sistema di riferimento, ha frequenza ridotta (e ovviamente velocità  $c$ ). In questo stesso sistema il nucleo si presenta come un'onda piana impulsiva di fotoni (come nel caso della bremsstrahlung). Se, inoltre,



**Fig. 1.3** Angular distribution of photoelectrons ejected between two cones half angles of  $\theta$  and  $\theta + d\theta$ . *Crosses*, measured values by Lutz (L36) at 0.091 Mev; *Circles*, measured values by Williams et al. (W60) at 0.0202 Mev; *Measur* at 0.4 Mev and 1.3 Mev by Hedgran and Hultberg (H28) and at 2.62 Mev by L. (L12) are also in satisfactory agreement with these predicted distributions. *Davissan and Evans (D12).*]

Figura 3.4.4: Evans Fig. 1.3

scegliamo il sistema di riferimento in modo che il nucleo abbia velocità tale che i suoi fotoni abbiano la stessa frequenza di quella (ridotta) dei fotoni incidenti visti in tale riferimento, il processo diventa quello della collisione di fotoni in vuoto:  $h\nu + h\nu = (e^+, e^-)$ .

Il processo di creazione di coppie costituisce il più importante meccanismo di perdita di energia da parte dei fotoni di alta energia.

Secondo la teoria relativistica degli elettroni, un elettrone ha energia  $\pm(m_e^2c^4 + p^2c^2)^{1/2}$ : sono cioè possibili stati di energia totale (compresa l'energia di massa) negativa. Lo spettro delle possibili energie di un elettrone libero è del tipo mostrato in fig. 3.5.1.

Nella teoria di Dirac, in condizioni normali, tutti gli stati di energia totale negativa sono occupati da elettroni in tutti i punti dello spazio: il vuoto è cioè un mare di elettroni che riempiono tutti gli stati di energia negativa. La presenza di tale enorme carica è supposta non osservabile perché uniformemente distribuita.

Un fotone di energia sufficientemente elevata può trasferire un elettrone da uno stato di energia negativa ad uno di energia positiva. Naturalmente c'è un'energia di soglia per il fotone, pari a  $2m_e c^2$ , perché non esistono stati possibili per l'elettrone nel gap  $(-m_e c^2, +m_e c^2)$ .

Fisicamente questo significa che il fotone deve avere energia sufficiente a creare due particelle di massa  $m_e$ : anche la lacuna lasciata nel mare negativo (positrone) diventa osservabile.

Siccome la qdm deve essere conservata, ciò richiede che l'elettrone di energia negativa

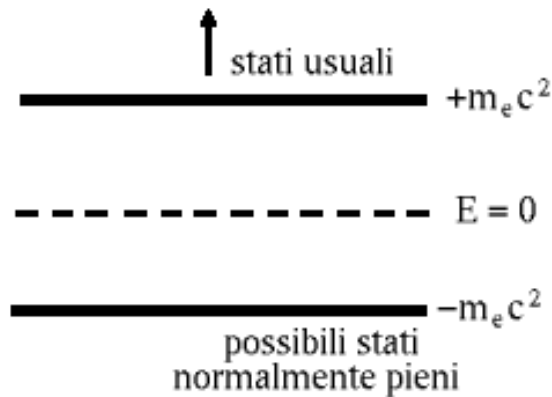


Figura 3.5.1:

si trovi in prossimità di un nucleo o di un altro elettrone di energia positiva e cioè che non si tratti di un elettrone di energia negativa isolato. Oppure occorre che due fotoni, provenienti da direzioni diverse, interagiscano a promuovere l'elettrone da uno stato di energia negativa ad uno di energia positiva.

In via di principio basta un'energia inferiore a  $2m_e c^2$ , perché l'elettrone creato potrebbe essere lasciato in uno stato atomico legato. Tuttavia, questi sono casi molto marginali, non osservati e difficilmente osservabili.

Per  $h\nu \gg m_e c^2$  vale un'espressione limite (Heitler) del tipo:

$$\sigma_{pair} = \frac{Z^2}{137} r_e^2 \left( \frac{28}{9} \ln 183 Z^{-1/3} - \frac{2}{27} \right) cm^2 \quad (3.5.1)$$

In Evans sono riportate anche espressioni più complicate, valide per energie inferiori. Si può definire un libero cammino medio per creazione di coppie:

$$l_p = \frac{1}{N \sigma_{pair}} \quad (3.5.2)$$

con  $N$  numero di atomi (nuclei) per  $cm^3$ .

Un fascio di fotoni monocromatici diminuisce di intensità con legge esponenziale:

$$n = n_0 e^{-x/l_p} \quad (3.5.3)$$

e c'è una precisa relazione fra creazione di coppie e bremsstrahlung:

$$l_r \sim \frac{7}{9} l_p \quad (3.5.4)$$

Concludiamo ricordando che la radiazione di frenamento e la creazione di coppie sono alla base della formazione degli sciame (showers) provocati dai raggi cosmici.

Lo sciame è normalmente iniziato da un elettrone che ha energia dell'ordine dei  $GeV$ . Per radiazione di frenamento esso produce fotoni di simile energia. Tali fotoni producono a

loro volta coppie ( $e^+$ ,  $e^-$ ) e ciascuna delle due particelle formate genera a sua volta fotoni di bremsstrahlung e così via. In questo modo l'energia si suddivide rapidamente fra molte particelle. Quando l'energia delle particelle formate raggiunge l'ambito di valori per i quali predomina la perdita di energia per ionizzazione, lo sciame ha termine.

Si osserva che i mesoni  $\mu$  (essi pure presenti in grande quantità nei raggi cosmici) hanno massa ( $105.7 \text{ MeV}$ ) circa 200 volte maggiore di quella dell'elettrone e che nella formula della perdita di energia per radiazione compare il fattore  $(e^2/mc^2)^2$ . La conseguenza è che a parità di energia cinetica il mesone  $\mu$  ha una perdita per radiazione circa 40000 volte inferiore a quella dell'elettrone. È quindi molto più improbabile che sia un mesone  $\mu$  ad iniziare uno sciame.

# APPENDICI

## A Elementi di cinematica relativistica

### A.1 Velocità di una particella in differenti riferimenti inerziali

Riportiamo alcune nozioni e formule che risulteranno di utilità nello studio delle collisioni fra particelle.

Consideriamo una particella elementare, il moto della quale è osservato da due sistemi di riferimento  $\Sigma$  e  $\Sigma'$  con  $\Sigma'$  che trasla lungo l'asse  $x$  del sistema  $\Sigma$  con velocità  $v$  nella direzione positiva dell'asse delle  $x$  ed ha l'asse  $x'$  lungo l'asse  $x$  e gli assi  $y'$  e  $z'$  paralleli agli assi  $y$  e  $z$ . Supporremo, inoltre, che le origini dei due sistemi di riferimento  $O$  e  $O'$  coincidano al tempo comune  $t = t' = 0$  (stesso tempo nello stesso punto!).

Supponiamo che nel sistema  $\Sigma$ , al tempo  $t$ , la particella si trovi nel punto  $P$  di coordinate  $(x, y, z)$  e che al tempo successivo  $t + dt$  si trovi nel punto  $P + dP$  di coordinate  $(x + dx, y + dy, z + dz)$ .

Definiamo la velocità  $\vec{u}$  della particella nel sistema  $\Sigma$  tramite le sue componenti:

$$u_x = \frac{dx}{dt} \quad u_y = \frac{dy}{dt} \quad u_z = \frac{dz}{dt} \quad (\text{A.1.1})$$

Il modulo della velocità è:

$$u = (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)^{1/2} \quad (\text{A.1.2})$$

Da un punto di vista fisico le due successive misure della posizione della particella sono due “eventi” che operativamente necessitano, per esempio, dell'osservazione del passaggio della particella carica in due scintillatori. Gli “eventi” passaggio della particella carica nel rivelatore 1 e passaggio successivo della medesima nel rivelatore 2 accadono indipendentemente dalla scelta del sistema di coordinate di riferimento che sia stato utilizzato per l'osservazione.

Applicando le trasformazioni di Lorentz si trovano le componenti della velocità della particella nel sistema  $\Sigma'$ :

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - vdt}{dt - \frac{v}{c^2}dx} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \\ u'_y &= \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy(1 - \frac{v^2}{c^2})^{1/2}}{dt - \frac{v}{c^2}dx} = \frac{u_y(1 - \frac{v^2}{c^2})^{1/2}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \\ u'_z &= \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz(1 - \frac{v^2}{c^2})^{1/2}}{dt - \frac{v}{c^2}dx} = \frac{u_z(1 - \frac{v^2}{c^2})^{1/2}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \end{aligned} \quad (\text{A.1.3})$$

Queste trasformazioni mettono in relazione i valori della velocità istantanea della particella in un preciso “punto” della sua traiettoria così come misurati in  $\Sigma$  e  $\Sigma'$ .

Le coordinate di tale “punto”, e cioè le coordinate spaziali e il tempo, misurate nei due



sistemi di riferimento, sono collegate dalle trasformazioni di Lorentz. È interessante notare che per quanto gli spostamenti “trasversali”  $dy$  e  $dy'$  (o  $dz$  e  $dz'$ ) siano uguali, non sono però uguali  $u_y$  e  $u_{y'}$  (o  $u_z$  e  $u_{z'}$ ): la differenza fra le velocità trasversali nasce dalla differente misura degli intervalli di tempo in  $\Sigma$  e  $\Sigma'$ .

Riportiamo anche la trasformazione del modulo quadro della velocità della particella:

$$u'^2 = u_x'^2 + u_y'^2 + u_z'^2 = \frac{(u_x - v)^2 + (u^2 - u_x^2)(1 - \frac{v^2}{c^2})}{(1 - \frac{vu_x}{c^2})^2} \quad (\text{A.1.4})$$

Secondo il principio di relatività le trasformazioni inverse si ottengono scambiando le quantità con indice con le quantità senza indice e viceversa e sostituendo  $v$  con  $-v$ . Osserviamo infine che i simboli  $\vec{u}$  e  $\vec{u}'$  sono utilizzati per individuare le velocità della particella misurata nei sistemi  $\Sigma$  e  $\Sigma'$  rispettivamente, mentre il simbolo  $\vec{v}$  è utilizzato esclusivamente per indicare la velocità del sistema  $\Sigma'$  rispetto al sistema  $\Sigma$ .

Utilizzeremo, inoltre, le notazioni:

$$\beta_v = v/c \quad \gamma_v = (1 - \beta_v^2)^{-1/2} \quad (\text{A.1.5})$$

NOTA: riportiamo alcune relazioni utili che fanno uso della relazione fra  $\gamma$ ,  $\beta$  e l'energia cinetica  $t$  della particella espressa dalla (A.4.3) e misurata in unità di massa di riposo:

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \beta^2} \quad ; \quad 1 - \beta^2 = \frac{1}{\gamma^2} \quad ; \quad \beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2} = \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} \quad (\text{a}) \quad (\text{A.1.6})$$

$$\gamma^2 \beta^2 = \gamma^2 - 1 = (\gamma - 1)(\gamma + 1) = (\gamma - 1)[(\gamma - 1) + 2] = \frac{T}{mc^2} \left( \frac{T}{mc^2} + 2 \right) = t(t + 2) \quad (\text{b})$$

$$\gamma^2 = \gamma^2 - 1 + 1 = (\gamma - 1)(\gamma - 1 + 2) + 1 = t(t + 2) + 1 \quad ; \quad \gamma = [t(t + 2) + 1]^{1/2} \quad (\text{c})$$

$$\beta^2 = \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} = \frac{(\gamma - 1)(\gamma - 1 + 2)}{\gamma^2} = \frac{t(t + 2)}{t(t + 2) + 1} \quad (\text{d})$$

$$\gamma^2 \beta^2 = t(t + 2) \quad ; \quad \gamma\beta = [t(t + 2)]^{1/2} \quad ; \quad \gamma\beta^2 = \frac{t(t + 2)}{[t(t + 2) + 1]^{1/2}} \quad (\text{e})$$

Nella successiva tabella sono poi riportate le relazioni numeriche tra  $\gamma$ ,  $\beta$  e  $t$ .

$\gamma - 1 = t$	$\gamma$	$\beta$	$\beta\gamma$
$10^{-3}$	1.001	0.0446	0.0446
$10^{-2}$	1.01	0.14	0.14
$10^{-1}$	1.1	0.42	0.046
1	2.0	0.86	1.72
10	11	0.996	10.96
$10^2$	101	0.99995	101
$10^3$	1001	0.9999995	1001

Riportiamo infine le leggi di trasformazione per le seguenti quantità:

$$\frac{1}{\gamma_{u'}} = \frac{(1 - \beta_v^2)^{1/2}(1 - \beta_u^2)^{1/2}}{(1 - \beta_v u_x/c)} \quad (\text{A.1.7})$$

$$\frac{1}{\gamma_u} = \frac{(1 - \beta_v^2)^{1/2}(1 - \beta_{u'}^2)^{1/2}}{(1 + \beta_v u'_x/c)} \quad (\text{A.1.8})$$

## A.2 Definizione della massa e dell'impulso relativistico di una particella

Indicheremo con  $m$  la massa della particella nel sistema di riferimento nel quale essa si trova “a riposo” e indicheremo con “ $\gamma_u m$ ” la massa della particella in un sistema  $\Sigma$  nel quale essa abbia velocità  $\vec{u}$ . Ovviamente, in un sistema  $\Sigma'$  nel quale la sua velocità sia  $\vec{u}'$  la sua massa è “ $\gamma_{u'} m$ ”.

L'impulso relativistico di una particella di velocità  $\vec{u}$  nel sistema di riferimento  $\Sigma$  è definito come:

$$\vec{p} = \gamma_u m \vec{u} \quad (\text{A.2.1})$$

le cui componenti sono:

$$p_x = \gamma_u m u_x \quad ; \quad p_y = \gamma_u m u_y \quad ; \quad p_z = \gamma_u m u_z \quad (\text{A.2.2})$$

## A.3 Forza

La definizione è quella consueta:

$$\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (\text{A.3.1})$$

che, a causa della variabilità della massa con la velocità, assume la forma:

$$\vec{f} = \gamma_u m \frac{d\vec{u}}{dt} + \vec{u} m \frac{d\gamma_u}{dt} \quad (\text{A.3.2})$$

Per produrre una variazione di impulso in un tempo  $dt$ , deve avere agito una forza uguale a  $d(\gamma_u m \mathbf{u})/dt$ .

## A.4 Energia totale ed energia cinetica

Secondo la relazione di equivalenza massa-energia di Einstein, una particella di massa di riposo  $m$  che ha velocità  $\vec{u}$  nel sistema di riferimento  $\Sigma$ , possiede un'energia totale  $E$  pari a:

$$E = \gamma_u m c^2 \quad (\text{A.4.1})$$

e, detta  $mc^2$  l'energia di riposo della particella, in  $\Sigma$  essa ha energia cinetica  $T$  pari a:

$$\begin{aligned} T &= E - mc^2 & ; & & E^2 &= T^2 + 2Tmc^2 + m^2c^4 \\ T &= \gamma_u mc^2 - mc^2 = (\gamma_u - 1)mc^2 \end{aligned} \quad (\text{A.4.2})$$

Seguono le utili relazioni:

$$\gamma - 1 = T/mc^2 = t \quad ; \quad \gamma = t + 1 \quad (\text{A.4.3})$$

Per particelle ultrarelativistiche ( $\gamma \gg 1$ ) è conveniente esprimere l'energia cinetica in unità di energia di massa di riposo ( $t = T/mc^2$ ): così facendo, l'energia cinetica  $t$  viene a coincidere con  $\gamma$ .

## A.5 Relazioni fra impulso, energia totale ed energia cinetica

Dal calcolo del modulo quadro dell'impulso  $\vec{p}$  si ricava

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 = c^2(p^2 + m^2c^2) \quad ; \quad E = c(p^2 + m^2c^2)^{1/2} \quad ; \quad E = T + mc^2 \quad (\text{A.5.1})$$

$$\frac{p}{mc} = \beta\gamma \quad (\text{A.5.2})$$

derivando la A.5.1 rispetto a  $p$  si ottiene:

$$\frac{dE}{dp} = u \quad (\text{A.5.3})$$

Nel caso del fotone, per il quale si ipotizza una massa di riposo nulla, le relazioni fra impulso ed energia diventano le seguenti:

$$E^2 = p^2c^2 \quad ; \quad p = E/c \quad (\text{A.5.4})$$

$$E = h\nu \quad ; \quad p = h\nu/c \quad (\text{A.5.5})$$

## B Cinematica relativistica delle collisioni elastiche

### B.1 Trasformazione della massa di una particella

Indichiamo con  $m$  la massa di riposo di una particella. Come abbiamo già ricordato, in un sistema inerziale  $\Sigma$  rispetto al quale la particella abbia velocità  $\vec{u}$  la sua massa risulta  $\gamma_u m$ .

Supponiamo di eseguire misure sulla particella anche da un altro sistema inerziale  $\Sigma'$ , che si muove con velocità  $\vec{v}$  rispetto al sistema  $\Sigma$  e supponiamo che nel sistema  $\Sigma'$  la velocità della particella sia  $\vec{u}'$ . Per consistenza con quanto già detto, dovremo assegnare alla particella, in tale sistema di riferimento, la massa  $\gamma_{u'} m$ . Quindi, il rapporto fra il valore della massa in  $\Sigma'$  rispetto al valore in  $\Sigma$  risulta:  $\gamma_{u'}/\gamma_u$ .

Sfruttando i risultati riportati nelle A.1.7 e A.1.8 si ha la relazione:

$$\gamma_{u'} = \frac{(1 - \beta_v u_x/c)}{(1 - \beta_v^2)^{1/2}(1 - \beta_u^2)^{1/2}} = \gamma_v \gamma_u (1 - \beta_v u_x/c) \quad (\text{B.1.1})$$

La relazione inversa si ottiene come al solito:

$$\gamma_u = \frac{(1 + \beta_v u'_x/c)}{(1 - \beta_v^2)^{1/2}(1 - \beta_{u'}^2)^{1/2}} = \gamma_v \gamma_{u'} (1 + \beta_v u'_x/c) \quad (\text{B.1.2})$$

### B.2 Trasformazione dell'impulso e dell'energia

Con le notazioni precedenti, nel sistema di riferimento  $\Sigma$ , le componenti dell'impulso e l'energia totale della particella risultano:

$$p_x = \gamma_u m u_x \quad ; \quad p_y = \gamma_u m u_y \quad ; \quad p_z = \gamma_u m u_z \quad ; \quad E = \gamma_u m c^2 \quad (\text{B.2.1})$$

Le corrispondenti quantiti in  $\Sigma'$  sono:

$$p'_x = \gamma_{u'} m u'_x \quad ; \quad p'_y = \gamma_{u'} m u'_y \quad ; \quad p'_z = \gamma_{u'} m u'_z \quad ; \quad E' = \gamma_{u'} m c^2 \quad (\text{B.2.2})$$

Utilizzando le (1.1.3) e le (2.1.1) si trovano subito le leggi di trasformazione da  $(\vec{p}, E)$  a  $(\vec{p}', E')$ :

$$p'_x = \gamma_v (p_x - \beta_v E/c) \quad ; \quad p'_y = p_y \quad ; \quad p'_z = p_z \quad ; \quad E' = \gamma_v (E - \beta_v c p_x) \quad (\text{B.2.3})$$

e le inverse:

$$p_x = \gamma_v (p'_x + \beta_v E'/c) \quad ; \quad p_y = p'_y \quad ; \quad p_z = p'_z \quad ; \quad E = \gamma_v (E' + \beta_v c p'_x) \quad (\text{B.2.4})$$

Dalle (2.2.3) e (2.2.4) segue subito l'invariante relativistico:

$$E^2 - c^2 p^2 = E'^2 - c^2 p'^2 = m^2 c^4 \quad (\text{B.2.5})$$

### B.3 Estensione delle leggi di conservazione alle collisioni elastiche “puntiformi”

Con il termine “collisione elastica” si indica una collisione nella quale, a parte le energie di massa di riposo delle particelle, tutta l’energia compare nella forma di energia cinetica sia prima che dopo l’urto. Si fa l’ipotesi che negli urti elastici si conservino sia l’impulso che l’energia cinetica. Si suppone inoltre che le particelle urtanti conservino la loro identità durante la collisione e che pertanto le loro masse di riposo siano le stesse sia prima che dopo l’urto.

Se l’energia cinetica totale è conservata durante l’urto, poiché per ciascuna particella si ha  $E = T + mc^2$ , anche la somma delle energie totali delle due particelle è conservata nell’urto.

Inizieremo con il verificare che, con le definizioni date precedentemente per la massa, l’energia e l’impulso, ammettere la conservazione dell’impulso e dell’energia nell’urto elastico di particelle “puntiformi” è in accordo con la relatività ristretta.

Supponiamo che nel sistema di riferimento  $\Sigma$  una particella libera di massa di riposo  $m_1$ , impulso  $\vec{p}_1$  ed energia totale  $E_1$ , urti, in un punto, con un’altra particella libera di massa di riposo  $m_2$ , impulso  $\vec{p}_2$  ed energia totale  $E_2$  e che, dopo la collisione, le due particelle siano di nuovo libere ed abbiano impulsi  $\vec{p}_3$  e  $\vec{p}_4$  ed energie totali  $E_3$  e  $E_4$  rispettivamente. Scriveremo le ipotizzate leggi di conservazione, in  $\Sigma$ , come segue:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4 = \vec{p} = \text{costante} \quad (\text{B.3.1})$$

con  $\vec{p}$  impulso totale delle due particelle in  $\Sigma$ . In componenti si ha:

$$p_{1x} + p_{2x} = p_{3x} + p_{4x} = p_x = C_1 \quad (\text{B.3.2})$$

$$p_{1y} = \quad \quad \quad = p_y = C_2 \quad (\text{B.3.3})$$

$$p_{1z} = \quad \quad \quad = p_z = C_3 \quad (\text{B.3.4})$$

e, per la conservazione dell’energia:

$$E_1 + E_2 = E_3 + E_4 = C_4 \quad (\text{B.3.5})$$

$$\gamma_1 m_1 + \gamma_2 m_2 = \gamma_3 m_3 + \gamma_4 m_4 = E/c^2 \quad (\text{B.3.6})$$

La (2.3.6) esprime la conservazione delle masse relativistiche. Nel caso che le particelle non cambino natura è ovviamente:  $m_3 = m_1$  e  $m_4 = m_2$ .

Usando le equazioni (2.2.3) per le trasformazioni delle componenti dell’impulso di “una particella singola” per passare da  $\Sigma$  a  $\Sigma'$  si ottiene:

$$p'_x = p'_{1x} + p'_{2x} = \gamma_v(p_{1x} - \beta_v E_1/c) + \gamma_v(p_{2x} - \beta_v E_2/c)$$

e quindi

$$p'_x = \gamma_v(p_x - \beta_v E/c) \quad (\text{B.3.7})$$

prima dell'urto nel punto dell'urto e

$$p'_x = p'_{3x} + p'_{4x} = \gamma_v [p_{3x} + p_{4x} - \beta_v (E_3 + E_4)/c] = \gamma_v (p_x - \beta_v E/c) \quad (\text{B.3.8})$$

dopo l'urto nel punto dell'urto. Analogamente si ottiene:

$$p'_y = p'_{1y} + p'_{2y} = p'_{3y} + p'_{4y} = p_y \quad (\text{B.3.9})$$

$$p'_z = p'_{1z} + p'_{2z} = p'_{3z} + p'_{4z} = p_z \quad (\text{B.3.10})$$

Le (2.3.7) ÷ (2.3.10) mostrano che l'impulso totale è conservato anche in  $\Sigma'$ . Analogamente si verifica che anche in  $\Sigma'$  vale la conservazione dell'energia:

$$E' = E'_1 + E'_2 = E'_3 + E'_4 \quad (\text{B.3.11})$$

o, equivalentemente, delle masse relativistiche:

$$\gamma'_1 m_1 + \gamma'_2 m_2 = \gamma'_3 m_3 + \gamma'_4 m_4 \quad (\text{B.3.12})$$

## B.4 Collisioni elastiche relativistiche e sistema di riferimento di impulso nullo

La situazione fisica prima e dopo l'urto in un sistema  $\Sigma$ , nel quale supporremo la massa  $m_2$  inizialmente a riposo, e che chiameremo sistema L (del Laboratorio) e in un sistema  $\Sigma'$ , nel quale ipotizzeremo nullo l'impulso totale prima dell'urto e che chiameremo sistema C (sistema del centro di massa a bassa velocità e più in generale sistema di impulso totale nullo), è mostrata nella fig. B.4.1 a) e b).

Supporremo all'inizio che  $\Sigma'$  si muova con generica velocità  $v$  rispetto a  $\Sigma$  e vedremo che valore deve assumere  $v$  per realizzare la condizione di impulso nullo in  $\Sigma'$ .

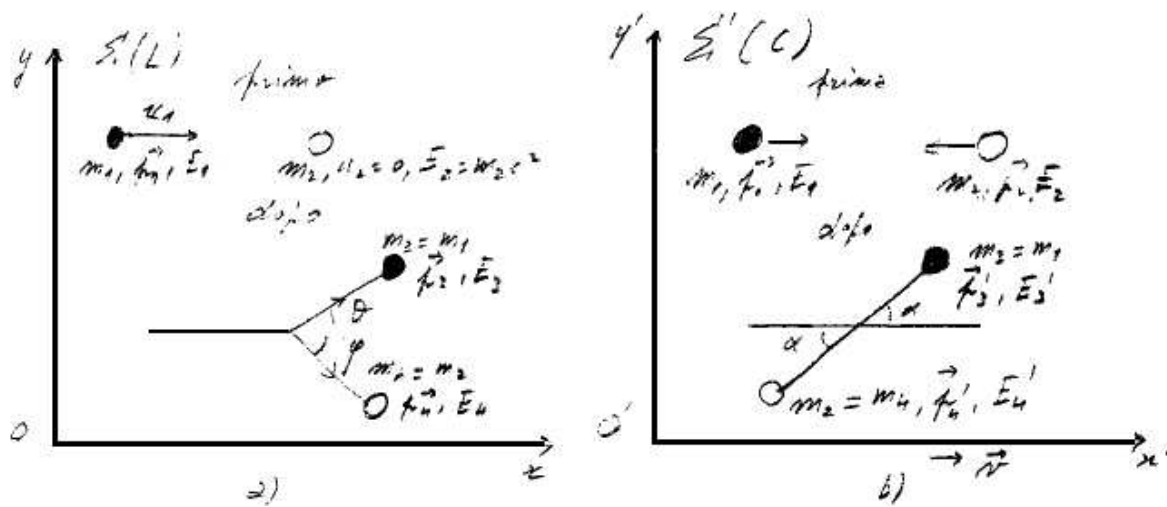


Figura B.4.1:

Nel sistema L, prima della collisione si ha:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + 0 = \vec{p}_1 \quad \text{impulso totale} \quad (\text{B.4.1})$$

$$E = E_1 + E_2 = \gamma_1 m_1 c^2 + m_2 c^2 \quad (\text{B.4.2})$$

dalle leggi di trasformazione (B.2.3) del quadrivettore impulso-energia si ricava, nel sistema C:

$$p'_x = \gamma_v (p_x - \beta_v E/c) \quad ; \quad p'_y = 0 \quad ; \quad p'_z = 0 \quad (\text{B.4.3})$$

con  $E = E_1 + E_2 = \gamma_1 m_1 c^2 + m_2 c^2$ . Perché in C l'impulso totale sia nullo, deve essere:

$$p_x - \beta_v E/c = 0 \quad \rightarrow \quad \beta_v = \frac{cp_x}{E} = \frac{cp_1}{E_1 + E_2} = \frac{c\gamma_1 m_1 u_1}{\gamma_1 m_1 c^2 + m_2 c^2}$$

ossia

$$\beta_v = \frac{v}{c} = \frac{\gamma_1 m_1 u_1}{\gamma_1 m_1 c + m_2 c} \quad \text{e} \quad v = \frac{\gamma_1 m_1 u_1}{\gamma_1 m_1 + m_2} \quad (\text{B.4.4})$$

e con qualche breve calcolo:

$$\gamma_v = \frac{\gamma_1 m_1 + m_2}{(m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 \gamma_1 m_1)} = \frac{\gamma_1 m_1 + m_2}{W} \quad (\text{B.4.5})$$

con

$$W^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 \gamma_1 m_1 \quad (\text{B.4.6})$$

Si può allora subito determinare l'impulso della particella di massa di riposo  $m_1$  nel sistema C prima dell'urto:

$$\begin{aligned} p'_1 &= \gamma_v (p_1 - \beta_v E_1/c) = \frac{\gamma_v}{c} (cp_1 - \beta_v E_1) = \frac{\gamma_v}{c} \left( cp_1 - \frac{cp_1 E_1}{\gamma_1 m_1 c^2 + m_2 c^2} \right) = \\ &= \gamma_v p_1 \left( \frac{\gamma_1 m_1 c^2 + m_2 c^2 - E_1}{\gamma_1 m_1 c^2 + m_2 c^2} \right) = \frac{\gamma_1 m_1 + m_2}{W} \frac{p_1 m_2 c^2}{\gamma_1 m_1 c^2 + m_2 c^2} = \frac{m_2 p_1}{W} \end{aligned}$$

ossia per l'impulso della particella urtante nel sistema di riferimento di impulso nullo

$$p'_1 = \frac{m_2}{W} p_1 \quad (\text{B.4.7})$$

La particella di massa di riposo  $m_2$  ha impulso di uguale entità e direzione ma verso opposto.

NOTA: Sono di interesse due casi particolari di sistema C:

1)  $m_1 = m_2 = m$  (urto elettrone-elettrone)

segue

$$\beta_v = \frac{\gamma_1 m u_1}{(\gamma_1 m + m)c} = \frac{\gamma_1}{(\gamma_1 + 1)} \beta_{u_1}$$

nel caso ultrarelativistico  $\gamma_1 \gg 1$  e  $\beta_v = \beta_{u_1}$ , ambedue le particelle muovono l'una verso l'altra con velocità molto prossima a  $c$ . Nel caso classico  $\gamma \rightarrow 1$  e  $\beta_v \rightarrow (1/2)\beta_{u_1}$  ossia  $v = u_1/2$ .

2)  $m_1 \gg m_2$  (urto ione-elettrone)

si ha

$$\beta_v = \frac{\gamma_1 m_1}{(\gamma_1 m_1 + m_2)} \beta_{u_1} = \frac{1}{(1 + \frac{m_2}{\gamma_1 m_1})} \beta_{u_1}$$

per  $\gamma_1 m_1 \gg m_2$  si ha  $\beta_v \sim (1 - m_2/\gamma_1 m_1)\beta_{u_1}$ .

Ritorniamo ora a discutere le modalità dell'urto nel sistema L:

dopo l'urto la particella di massa di riposo  $m_1$  si muove ad un angolo  $\theta$  rispetto alla sua direzione iniziale mentre la massa  $m_2$  viaggia in direzione  $\phi$ .

L'applicazione della legge puntuale della conservazione dell'impulso totale fornisce:

$$\vec{p}_1 + 0 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4 \quad (\text{B.4.8})$$



e in componenti:

$$p_1 = p_3 \cos \theta + p_4 \cos \phi \quad (\text{B.4.9})$$

$$0 = p_3 \sin \theta - p_4 \sin \phi \quad (\text{B.4.10})$$

mentre la legge di conservazione dell'energia fornisce:

$$E_1 + E_2 = E_3 + E_4$$

e anche

$$c(p_1^2 + m_1^2 c^2)^{1/2} + m_2 c^2 = c(p_3^2 + m_1^2 c^2)^{1/2} + c(p_4^2 + m_2^2 c^2)^{1/2} \quad (\text{B.4.11})$$

Se si suppone di conoscere le masse di riposo, l'impulso della particella incidente prima dell'urto e che la particella urtata sia inizialmente ferma nel sistema L, si vede che le leggi di conservazione consentono di scrivere tre condizioni per le quattro quantità incognite  $p_3$ ,  $p_4$ ,  $\theta$  e  $\phi$ .

Occorre quindi assegnare una di tali quattro quantità perché il problema diventi determinato.

Per esempio, se si assegna l'angolo  $\theta$  di scattering della particella incidente e si sviluppa il calcolo, si trova:

$$p_3 = p_1 \frac{(m_1^2 c^2 + m_2 E_1) \cos \theta + (E_1 + m_2 c^2)(m_2^2 - m_1^2 \sin^2 \theta)^{1/2}}{(E_1/c + m_2 c)^2 - p_1^2 \cos^2 \theta} \quad (\text{B.4.12})$$

e

$$E_3 = \frac{(m_2 c^2 + E_1)(m_2 E_1 + m_1^2 c^2) + c^2 p_1^2 \cos \theta (m_2^2 - m_1^2 \sin^2 \theta)^{1/2}}{(E_1/c + m_2 c)^2 - p_1^2 \cos^2 \theta} \quad (\text{B.4.13})$$

$$p_4^2 = p_1^2 + p_3^2 - 2p_1 p_3 \cos \theta \quad (\text{B.4.14})$$

Alternativamente, ed è questo il caso di maggiore utilità per il seguito, si possono esprimere le grandezze in funzione dell'angolo  $\phi$  del rinculo, ottenendo:

$$p_4 = p_1 \frac{2m_2(E_1 + m_2 c^2) \cos \phi}{(E_1/c + m_2 c)^2 - p_1^2 \cos^2 \phi} \quad (\text{B.4.15})$$

$$E_4 = m_2 c^2 + \frac{2p_1^2 \cos^2 \phi m_2 c^2}{(E_1/c + m_2 c)^2 - p_1^2 \cos^2 \theta} \quad (\text{B.4.16})$$

$$p_3^2 = p_1^2 + p_4^2 - 2p_1 p_4 \cos \phi \quad (\text{B.4.17})$$

In particolare, la (B.4.16) può essere utilizzata per calcolare l'energia cinetica massima trasferibile al rinculo in un urto centrale, e cioè con  $\phi = 0$ .

$$\begin{aligned}
T_{4max}(\phi = 0) &= E_4(\phi = 0) - m_2c^2 = \frac{2p_1^2m_2c^2}{(E_1/c + m_2c)^2 - p_1^2} = \\
&= \frac{2p_1^2m_2c^2}{(E_1/c)^2 + m_2^2c^2 + 2m_2E_1 - (E_1/c)^2 + m_1^2c^2} \cdot \frac{c^2}{c^2} = \\
&= c^2 \frac{2p_1^2m_2c^2}{m_2^2c^4 + 2m_2c^2\gamma_1m_1c^2 + m_1^2c^4} = \\
&= \frac{2p_1^2m_2}{m_2^2 + m_1^2 + 2m_2\gamma_1m_1} = [\text{Notazione Jackson}] = \frac{2p_1^2m_2}{W^2} \quad (\text{B.4.18})
\end{aligned}$$

Come al solito sono interessanti due casi:

1)  $m_1 \gg m_2$  e  $\gamma_1 \ll m_1/m_2$  (urto ione-elettrone)

$$T_{4max} = \frac{2\gamma_1^2m_1^2\beta_1^2c^2m_2}{m_1^2} = 2m_2c^2\gamma_1^2\beta_1^2 \quad (\text{B.4.19})$$

e utilizzando la (A.1.6b);

$$T_{4max} = 2m_2c^2 \left[ \frac{T_1}{m_1c^2} \left( \frac{T_1}{m_1c^2} + 2 \right) \right] \quad (\text{B.4.20})$$

Applichiamo la (B.4.20) al caso dell'urto protone-elettrone ( $m_1 = m_p \sim 2 \cdot 10^3 m_2 = 2 \cdot 10^3 m_e$ ,  $m_e c^2 \sim 0.5 \text{ MeV}$ ,  $m_p \sim 1 \text{ GeV}$ ) si ottiene la seguente tabella di valori:

$T_p$	$t_p = \gamma - 1$	$T_{emax}$
1 MeV	$10^{-3}$	2 keV
10 MeV	$10^{-2}$	20 keV
100 MeV	$10^{-1}$	200 keV
1 GeV	$10^0$	3 MeV
10 GeV	$10^1$	120 MeV
100 GeV	$10^2$	10 GeV

Nell'ultimo caso riportato in tabella, diventano preminenti altri fenomeni come l'eccitazione del protone.

2)  $m_1 = m_2$  (urto elettrone-elettrone)

In questo caso si ha

$$T_{4max} = \frac{2\gamma_1^2m_1^2\beta_1^2c^2m_1}{m_1^2 + m_1^2 + 2\gamma_1m_1^2} = \frac{2\gamma_1^2\beta_1^2m_1c^2}{2 + 2\gamma_1} = \frac{\gamma_1^2\beta_1^2m_1c^2}{\gamma_1 + 1} = m_1c^2 \frac{(\gamma_1 - 1)(\gamma_1 + 1)}{\gamma_1 + 1} = m_1c^2(\gamma_1 - 1)$$

e per l'urto elettrone-elettrone

$$\gamma_1 - 1 = T_e/m_e c^2 \quad e \quad T_{emax} = m_e c^2 (T_e/m_e c^2)$$

cioè, tutta l'energia cinetica dell'elettrone incidente può essere trasferita all'elettrone bersaglio.

Nel caso di particelle indistinguibili si preferisce considerare la simmetria e porre  $T_{emax} = T_e/2$ .

## C Il campo elettromagnetico di una carica in moto rettilineo uniforme

Questo paragrafo riproduce il paragrafo 11.10 di Jackson (“Transformation of electromagnetic fields”, pag.552-555).

Dati i sistemi  $\Sigma$  e  $\Sigma^*$  come in fig.C.1, le componenti del campo e.m. esistente in un certo punto e ad un certo tempo  $(x, y, z, t)$  in  $\Sigma$  sono collegate a quelle misurate nello stesso punto-tempo che in  $\Sigma^*$  ha coordinate  $(x^*, y^*, z^*, t^*)$  a loro volta collegate dalle trasformazioni di Lorentz a quelle di  $\Sigma$ .

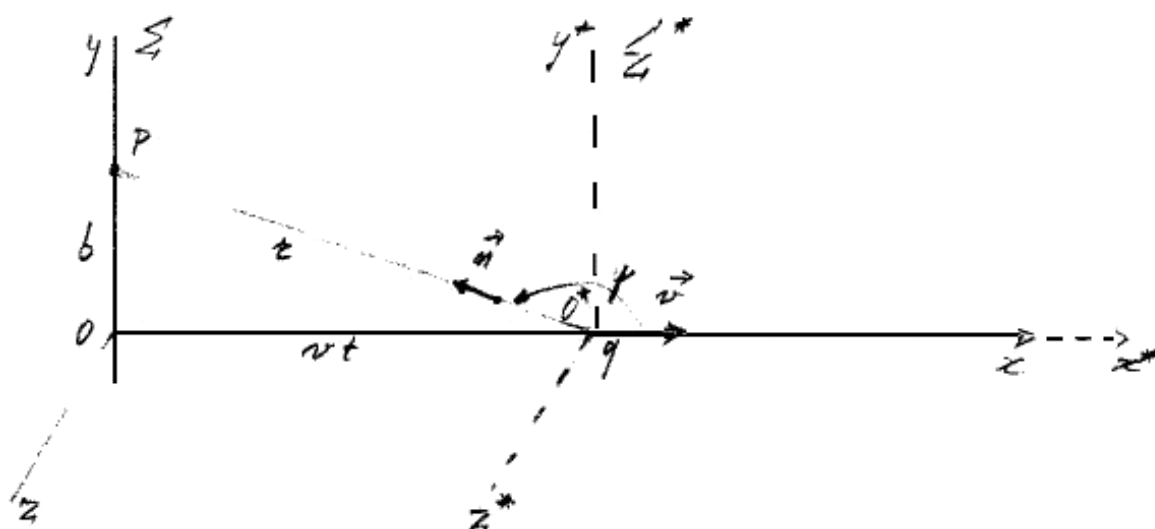


Figura C.1:

Le leggi di trasformazione delle componenti del campo e.m. nei due sistemi di riferimento sono le seguenti:

$$\begin{aligned} E_{x^*} &= E_x & B_{x^*} &= B_x \\ E_{y^*} &= \gamma(E_y - \beta B_z) & B_{y^*} &= \gamma(B_y + \beta E_z) \\ E_{z^*} &= \gamma(E_z + \beta B_y) & B_{z^*} &= \gamma(B_z - \beta E_y) \end{aligned} \quad (C.1)$$

Le inverse si ottengono, come al solito, scambiando le quantità con indice e senza indice e ponendo  $-\beta$  al posto di  $\beta$ .

Come esempio di applicazione delle (C.1) determiniamo i campi misurati da un osservatore che si trova nel punto  $P(0, b, 0)$  in  $\Sigma$  quando una carica puntiforme  $q$  si muove in linea retta con velocità  $v$ .

Supponiamo che la carica si trovi a riposo nell'origine del sistema  $\Sigma^*$  e che si muova lungo l'asse delle  $x$ . Supponiamo anche che al tempo  $t = t^* = 0$  le origini dei due sistemi di riferimento coincidano e che la carica  $q$  sia quindi alla minima distanza  $b$  dall'osservatore

in  $P$ .

Nel sistema  $\Sigma^*$  al successivo generico tempo  $t^*$  il punto di osservazione  $P$  ha coordinate  $x^* = -vt^*$ ,  $y^* = b$ ,  $z^* = 0$  e quindi la distanza fra  $q$  e  $P$  risulta:

$$r^* = [b^2 + (vt^*)^2]^{1/2}$$

Nel sistema  $\Sigma^*$  le componenti del campo della carica puntiforme  $q$  in  $P$  sono:

$$\begin{aligned} E_{x^*} &= -\frac{qvt^*}{r^{*3}} & E_{y^*} &= \frac{qb}{r^{*3}} & E_{z^*} &= 0 \\ B_{x^*} &= 0 & B_{y^*} &= 0 & B_{z^*} &= 0 \end{aligned} \quad (C.2)$$

A questo punto è necessario esprimere tali componenti del campo in termini delle coordinate del sistema  $\Sigma$ . Si nota subito che l'unica trasformazione necessaria è quella del tempo che in generale è:  $t^* = \gamma(t - \beta x/c)$ . Ma, per il punto  $P$ , che in  $\Sigma$  ha coordinata  $x = 0$ , si ha:  $t^* = \gamma t$ . Quindi le componenti del campo diverse da zero in  $\Sigma^*$ , ed espresse tramite le coordinate spaziotemporali di  $\Sigma$ , sono:

$$E_{x^*} = -\frac{q\gamma vt}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}} \quad ; \quad E_{y^*} = \frac{qb}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}} \quad (C.3)$$

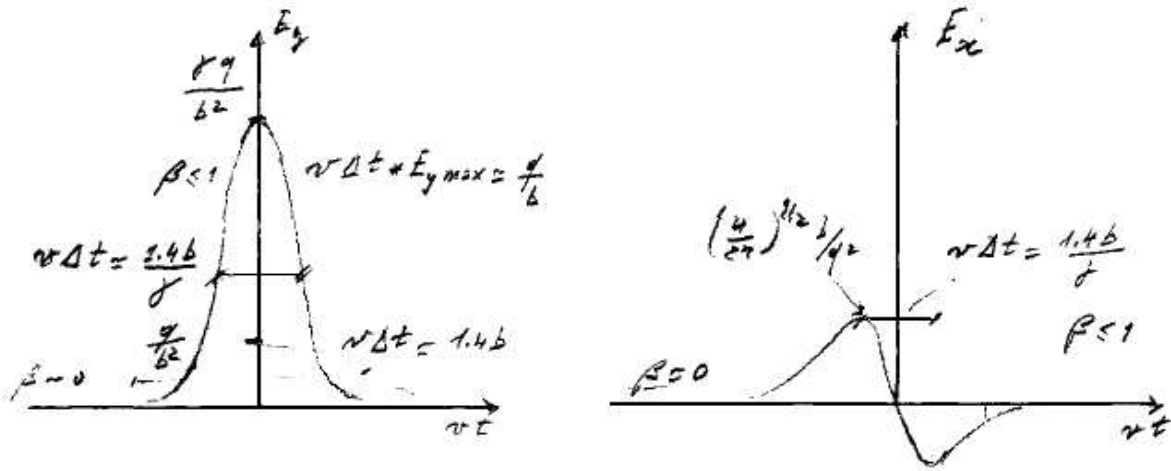


Figura C.2:

Infine, usando le trasformazioni inverse delle (C.1), si determinano le componenti del campo e.m. misurate dall'osservatore  $P$  in  $\Sigma$ :

$$\begin{aligned} E_x &= E_{x^*} = -\frac{q\gamma vt}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}} \\ E_y &= \gamma E_{y^*} = \frac{\gamma qb}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}} \\ B_z &= \gamma \beta E_{y^*} = \beta E_y \end{aligned} \quad (C.4)$$

Nella fig.C.2 sono riportate le componenti del campo elettrico, così come le misura l'osservatore  $P$  al passare del tempo, nei due casi  $\beta \rightarrow 0$  ( $\gamma \rightarrow 1$ ) e  $\beta \rightarrow 1$  ( $\gamma \rightarrow \infty$ ). Per  $\beta \rightarrow 1$

questo campo diventa un'onda impulsiva nella quale  $B_z$  e  $E_y$  sono ortogonali e di uguale intensità e diminuisce la durata dell'impulso nella proporzione:

$$\Delta t \simeq \frac{1.5 b}{\gamma\beta c} \quad (\text{C.5})$$

## D Cinematica relativistica: relazioni fra impulso ed energia cinetica e variabili cinematiche $\beta$ , $\gamma$

I seguenti appunti sono tratti da “An introduction to the theory of relativity”, W.G.V. Rosser, London - Butterworths 1964, pagg. 179 e seguenti.

Definizioni:  $\beta = u/c$  ;  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$  ;  $m =$  massa a riposo

$$\text{impulso : } \quad \vec{p} = \gamma m \vec{u} \quad [(5.28) \text{ pag.180}] \quad (D.1)$$

$$\text{energia cinetica : } \quad T = \gamma m c^2 - m c^2 = (\gamma - 1) m c^2 \quad [(5.37) \text{ pag.183}] \quad (D.2)$$

$$\text{energia totale : } \quad E = T + m c^2 = \gamma m c^2 \quad [(5.40) \text{ pag.184}] \quad (D.3)$$

Relazione fra impulso e energia totale

Dal modulo quadro della (D.1):

$$\begin{aligned} \vec{p} \cdot \vec{p} &= \gamma^2 m^2 u^2 \quad ; \quad p^2 c^2 = \gamma^2 m^2 u^2 c^2 \\ p^2 c^2 + m^2 c^4 &= \gamma^2 m^2 u^2 c^2 + m^2 c^4 = \frac{m^2 u^2 c^2}{1 - \beta^2} + m^2 c^4 = \frac{m^2 c^4}{1 - \beta^2} \\ p^2 c^2 + m^2 c^4 &= \gamma^2 m^2 c^4 = (\gamma m c^2)^2 = [\text{dalla (4.3)}] = E^2 \\ E^2 &= p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad [(5.41) \text{ pag.185}] \end{aligned} \quad (D.4)$$

Relazione fra impulso e  $\beta\gamma$

Quadrandolo la (D.3) e sostituendo nella (D.4) si ricava:

$$(T + m c^2)^2 = T^2 + 2 m c^2 T + m^2 c^4 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad \rightarrow \quad p^2 c^2 = T^2 + 2 m c^2 T \quad (D.5)$$

Dividendo la (D.5) per  $m^2 c^4$ :

$$\begin{aligned} \frac{p^2 c^2}{m^2 c^4} &= \frac{T^2}{m^2 c^4} + 2 \frac{m c^2}{m^2 c^4} T = [\text{utilizzando la (4.2)}] = (\gamma - 1)^2 + 2(\gamma - 1) \\ \frac{p^2}{m^2 c^2} &= \gamma^2 - 2\gamma + 1 + 2\gamma - 2 = \gamma^2 - 1 = \frac{1}{1 - \beta^2} - 1 = \frac{1 - 1 + \beta^2}{1 - \beta^2} = \beta^2 \gamma^2 \\ \frac{p}{m c} &= \beta \gamma \quad \quad \quad \underline{\text{relazione generale}} \\ p &= \beta \gamma \frac{m c^2}{c} \quad \rightarrow \quad \text{misura dell'impulso in GeV/c} \end{aligned} \quad (D.6)$$

Data la scala “universale  $\beta\gamma$ ”, questa può essere trasformata in scala di impulso di ciascuna particella tramite la (D.6). Nota la massa della particella, per es. in  $GeV$ , le unità di misura “naturali” dell’impulso diventano (massa di riposo della particella in  $GeV$ )/ $c$ . Esempi di simili trasformazioni sono riportate nei grafici di fig.27.1 e seguenti del “Review of Particle Physics”, Journal of Physics G, Vol.33, July 2006, pag. 258 e seguenti.

Ricordando che:  $1 \text{ a.m.u.} = 1/N_A g = 1.660566 \cdot 10^{-24} g = 0.931502 GeV$

si ha che le masse di alcune particelle sovente incontrate sono:

$m_e$	0.511 MeV	$m_\alpha$	3.727409 GeV
$m_p$	0.938280 GeV	$m_{\pi^\pm}$	0.139567 GeV
$m_n$	0.939573 GeV	$m_{\pi^0}$	0.134974 GeV
$m_d$	1.875628 GeV	$m_{\mu^\pm}$	0.105659 GeV

### Relazione fra energia cinetica e $\beta\gamma$

La trasformazione della scala  $\beta\gamma$  in energia cinetica è semplice ad alta energia mentre diventa abbastanza inutilmente complicata per energie cinetiche non relativistiche. Infatti la relazione semplice è fra  $T$  e  $\gamma$ , (relazione (D.2)) che qui riportiamo  $T = (\gamma - 1)mc^2$ , ed espressa l'energia cinetica in unità di energia di massa  $mc^2$  come  $t = T/mc^2$  porta a  $t = \gamma - 1$

Per esprimere  $T$  in termini di  $\beta\gamma$  si può utilizzare la definizione di  $\gamma$ :

$$\gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2} \quad ; \quad \gamma^2 - \gamma^2\beta^2 = 1 \quad ; \quad \gamma^2\beta^2 = \gamma^2 - 1 = (\gamma - 1)(\gamma + 1) = (\gamma - 1)(\gamma - 1 + 2) = t(t + 2)$$

ossia

$$t^2 + 2t - \gamma^2\beta^2 = 0$$

e quindi

$$t = (1 + \gamma^2\beta^2)^{1/2} - 1 \tag{D.7}$$

$$T = [(1 + \gamma^2\beta^2)^{1/2} - 1]mc^2 \tag{D.8}$$

La relazione (D.7) è facile da usare e utile per  $\beta\gamma \gg 1$ , nel qual caso  $t \rightarrow \beta\gamma \rightarrow \gamma$  e cioè la scala  $\beta\gamma$  diventa una scala universale (indipendente dalla particella) di energia cinetica ridotta, espressa cioè in unità di massa di riposo.

Si vede però che già per  $\beta\gamma = 10$  si ha  $t \simeq 9$ , cioè, nel porre  $t = \beta\gamma$  si sovrastima  $t$  del 10%, mentre per  $\beta\gamma = 1$  è  $t = 0.41$ . Quindi, di fatto, per  $\beta\gamma < 10$ , per avere un'accuratezza migliore del 10 % è necessario calcolare l'energia cinetica tramite la (D.8), come è riportato a titolo di esempio in corsivo nella fig. 27.1 che mostra il  $dE/dx$  di un  $\mu^+$  in Cu per  $\beta\gamma$  da  $10^{-3}$  a  $10^6$ .