

Nello Taccetti

RIVELATORI

di

RADIAZIONE IONIZZANTE

Indice

1	Moto di cariche e correnti indotte	4
1.1	Vettore di Poynting e flussi di energia	4
1.2	Teorema di reciprocità di Green dell'elettrostatica	6
1.3	Teorema di Ramo	9
1.4	Limitazioni e generalizzazioni del Teorema di Ramo	10
1.5	Presenza di carica spaziale	13
1.6	Teorema di Ramo derivato dal caso generale	16
1.7	Correnti e cariche indotte dal moto di una coppia elettrone-ione in un condensatore piano in vuoto	16
2	Rivelatori a gas	23
2.1	Camere di ionizzazione	23
2.2	Contatori proporzionali	26
3	Rivelatori a semiconduttore planari al Silicio	33
3.1	Giunzioni p-n utilizzate come rivelatori di radiazioni ionizzanti	33
3.2	Contatti ohmici. Distribuzioni di carica e campi elettrici	37
3.3	Rivelatori Si(Li) (rivelazione di X)	41
3.4	Rivelatori con densità di carica di volume costante	42
3.5	Rivelatori con densità di carica di volume variabile linearmente	50
4	Rivelatori a semiconduttore coassiali Hp-Ge (true coaxial)	51
4.1	Campo elettrico e velocità di deriva	51
4.2	Segnali di corrente generati dal moto di una coppia lacuna-elettrone	54
4.3	Rivelatore HpGe tipo ν ($N_D = 6 \cdot 10^9 \text{ cm}^{-3}$)	56
5	Linee di trasmissione	59
5.1	Equazione di propagazione. Costanti distribuite e onde viaggianti	59
5.2	Linee di trasmissione senza perdite	62
5.3	Studio di linee particolari	64
5.4	Coefficiente di riflessione in tensione di una linea	68
6	Amplificatori formatori	70
6.1	Classificazione degli amplificatori	70
6.2	Reazione negativa in bassa frequenza - Caso ideale	72
6.3	Reazione negativa in situazioni reali di bassa frequenza	73
6.4	Formazione lineare dei segnali	77
6.4.1	Alcune premesse tecniche di analisi	77
6.5	Base-Line Restoration (BLR)	81
7	Conversione analogico-digitale	85
7.1	Memoria analogica	85
7.2	Digitalizzazione	86

8	Rumore elettrico	88
8.1	Considerazioni preliminari	88
8.2	Descrizione del rumore termico in frequenza	89
8.3	Descrizione del rumore granulare in frequenza	90
8.4	Rapporto “segnale/rumore” di un preamplificatore di carica	90
8.5	Il filtro CR-RC	96
9	PIXE	100
9.1	Considerazioni generali	100
9.2	Preamplificatore di carica con feedback resistivo	102
9.3	Preamplificatore di carica con POF (Pulsed Optical Feedback)	102
9.4	Amplificatori-formatori	104
9.5	Pile-up	105
9.5.1	Pile-up nel preamplificatore di carica	105
9.5.2	Pile-up nell’amplificatore-formatore	105
9.5.3	Azione dei convertitori analogico-digitali. PUR generale	106
9.6	Preamplificatori con POF. Trattamento del segnale di reset	108

1 Moto di cariche e correnti indotte

Alcuni preliminari di elettromagnetismo e di elettrostatica.

1.1 Vettore di Poynting e flussi di energia

La conservazione dell'energia elettromagnetica, in forma puntuale nel vuoto, si esprime, utilizzando i vettori \vec{E} ed \vec{H} , come segue (Sistema Internazionale):

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \right] = \vec{J} \cdot \vec{E} + \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{H}) \quad (1.1.1)$$

con:

$w = (1/2)\epsilon_0 E^2 + (1/2)\mu_0 H^2$ Jm^{-3} densità di energia del campo elettromagnetico

$\vec{S} = \vec{E} \wedge \vec{H}$ $Jm^{-2}s^{-1}$ vettore di Poynting: flusso istantaneo di energia attraverso una superficie unitaria perpendicolare al vettore medesimo

$\vec{J} \cdot \vec{E}$ Wm^{-3} dissipazione e generazione di energia (interazione campo e.m. \leftrightarrow materia)

Prima di procedere nelle applicazioni della (1.1.1) è utile ricordare che, per esempio, la densità di energia elettrostatica w può essere espressa sia tramite le caratteristiche delle sorgenti [$w_e(\text{sorgenti}) = (1/2)\rho V$ con ρ densità volumica di carica], sia tramite il campo elettrostatico generato da tali sorgenti [$w_e(\text{campo}) = (1/2)\epsilon_0 E^2$]. Ovviamente, punto per punto dello spazio, le due densità sono diverse e tuttavia, quando integrate su tutto lo spazio (si intende che le sorgenti siano fisiche e quindi di dimensioni finite), generano lo stesso valore dell'energia elettrostatica E_e , ossia:

$$E_e = \int_{\text{sorgenti}} \frac{1}{2} \rho V \, dV = \int_{\infty} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \, dV \quad (1.1.2)$$

Analogamente, i termini di dissipazione e generazione di energia possono essere associati alle "resistenze" e alle sorgenti ($\int_{\text{vol}} \nu \pm \vec{J} \cdot \vec{E} \, dV$), oppure si possono pensare trasferiti dal campo elettromagnetico alle resistenze, o dalle sorgenti al campo elettromagnetico, come ($\int_{\text{sup } S} \pm \vec{S} \cdot \vec{n} \, dS$).

Analizziamo un esempio per familiarizzarci con questa ultima affermazione limitandoci a situazioni stazionarie o quasi-stazionarie, anche se la maggiore utilità del vettore di Poynting si ha nello studio di casi "dinamici".

Consideriamo per primo il caso, mostrato in fig.1.1.1, di una resistenza R cilindrica, omogenea, percorsa da corrente continua I . La d.d.p. è $V = RI$ e la dissipazione $W = VI$.

All'interno della resistenza e nelle sue immediate vicinanze (continuità della componente parallela del campo elettrico) c'è un campo elettrico \vec{E} parallelo al conduttore. La corrente "cilindrica" genera un campo \vec{H} ortogonale a \vec{E} e il vettore di Poynting \vec{S} è diretto radialmente, dentro il conduttore.

Come sappiamo, una resistenza dissipa energia. La presente analisi mostra che si può pensare che tale energia arrivi alla resistenza tramite i campi, dallo spazio esterno.

I campi, in questo caso, sono indipendenti dal tempo ma, tuttavia, il fenomeno può essere interpretato come se ci fosse un continuo flusso di energia che entra "lateralmente"

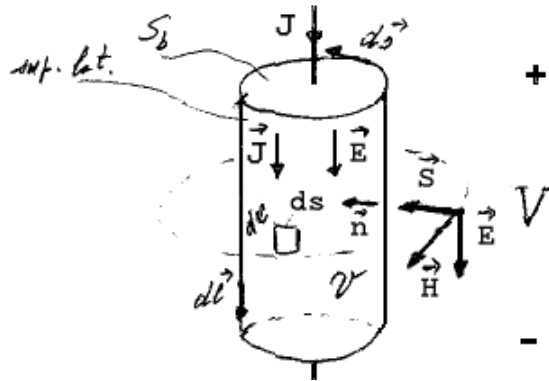


Figura 1.1.1:

dallo spazio circostante nella resistenza. Detta \vec{n} la normale entrante alla superficie laterale della resistenza, si ha:

$$\begin{aligned} \int_{sup\ lat} \vec{S} \cdot \vec{n} \, dS &= \int_{sup\ lat} (\vec{E} \wedge \vec{H}) \cdot \vec{n} \, dS = \int_{sup\ lat} EH \, dl \, dS = \\ &= (El)(HS) = [\text{dalle proprietà di circuitazione dei due campi}] = VI \quad (1.1.3) \end{aligned}$$

Ovviamente, si ha anche (S_b superficie di base della resistenza cilindrica):

$$\int_{vol\ res} \vec{J} \cdot \vec{E} \, dV = \int_{vol\ res} JE \, dS_b \, dl = JE S_b l = (El)(JS_b) = VI \quad (1.1.4)$$

Come secondo esempio si suggerisce di studiare il comportamento di una F.E.M “cilindrica” che schematizziamo come la resistenza, salvo che al suo interno \vec{J} ed \vec{E} hanno verso opposto (fig.1.1.2). È facile verificare che con ambedue i metodi, anche in questo caso, si

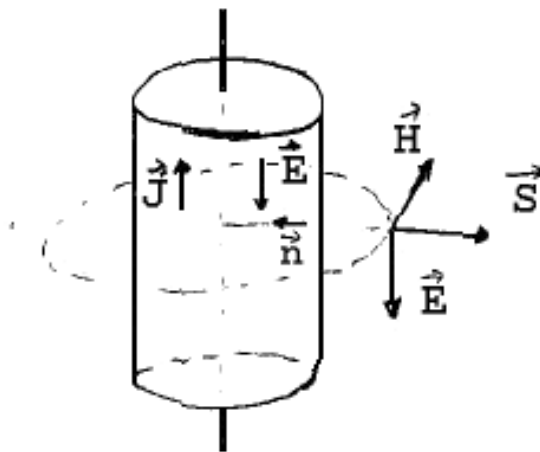


Figura 1.1.2:

ottiene lo stesso valore $-VI$ per il flusso di potenza uscente (il segno - è caratteristico del

generatore).

Per cercare di rendersi conto di come l'energia si possa pensare trasferita dal generatore alla resistenza attraverso lo spazio esterno, e non attraverso i fili di collegamento, possiamo pensare che il generatore agisca su coppie di cariche “virtuali”, una positiva e una negativa, separandole e inviandole una in un verso e l'altra in verso opposto nel circuito (ricordarsi che in ogni caso i generatori non creano cariche ma si limitano a separare cariche positive e negative esattamente dello stesso ammontare: in molti casi sono spostati solo elettroni creando così un difetto ed un eccesso di identico valore). La coppia si ritrova dentro la resistenza dove si ricongiunge. All'inizio, quando le due cariche sono molto vicine fra loro nel generatore, il loro campo, quello di un dipolo elettrico, è localizzato essenzialmente fra di loro e così quindi l'energia. Poi, man mano che le due cariche si separano, le linee di forza dei campi ad esse associati si espandono, uscendo dal generatore fino ad invadere gran parte dello spazio attorno al circuito: nello stesso tempo l'energia si distribuisce nello spazio diluendosi (la densità di energia ovviamente diminuisce). Poi, quando le cariche si ricongiungono nella resistenza, anche il loro campo si concentra in essa e con il campo l'energia associata che nella resistenza si degrada in energia termica. La teoria di Maxwell ci porta a conclusioni non molto intuitive per quanto riguarda i flussi di energia. I materiali conduttori di corrente appaiono tali per il moto delle cariche elettriche ma non per l'energia. L'energia sembra preferire il fluire tramite gli isolanti elettrici: il vuoto e i dielettrici. I conduttori di corrente non “conducono” energia ma piuttosto la degradano in energia disordinata.

1.2 Teorema di reciprocità di Green dell'elettrostatica

Dato un sistema di N cariche puntiformi fisse, la generica delle quali sarà indicata con q_i , l'espressione della sua energia elettrostatica è:

$$E_e = \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq i} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \left[\sum_{j \neq i} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{q_j}{r_{ij}} \right] = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i \quad (1.2.1)$$

dove φ_i è il potenziale generato nella posizione occupata dalla carica q_i da parte delle altre $N - 1$ cariche.

Consideriamo ora un secondo sistema di cariche ottenuto dal primo sostituendo le cariche q_i con le cariche Q_i di diverso valore ma nelle stesse posizioni. In ognuno dei due casi si può scrivere:

potenziale nella posizione della i -esima carica generato dall'insieme $\{q_j\}$:

$$\varphi_i = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{r_{ij}} \quad (1.2.2)$$

potenziale nella posizione della i -esima carica generato dall'insieme $\{Q_j\}$:

$$\Phi_i = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \sum_{j \neq i} \frac{Q_j}{r_{ij}} \quad (1.2.3)$$

Se si moltiplica la (1.2.2) per Q_i e la (1.2.3) per q_i e si somma sull'indice "i" si ottiene il teorema di reciprocità di Green (la verifica, per esempio per $N = 3$, è immediata: vedere nota seguente):

$$\sum_{i=1,N} Q_i \varphi_i = \sum_{i=1,N} q_i \Phi_i \quad (1.2.4)$$

Nel caso che le cariche si trovino su conduttori, si possono raccogliere nelle sommatorie quelle che si trovano sullo stesso conduttore e quindi allo stesso potenziale, cosicché seguita a valere la formula (1.2.4) dove q_i diventa la carica complessiva dell'i-esimo conduttore e si somma sugli N conduttori.

NOTA:

Verifica dell'eguaglianza di Green per $N = 3$.

In questo caso i potenziali φ_i sono:

$$\varphi_1 = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \left(\frac{q_2}{r_{12}} + \frac{q_3}{r_{13}} \right) \quad ; \quad \varphi_2 = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \left(\frac{q_1}{r_{12}} + \frac{q_3}{r_{23}} \right) \quad ; \quad \varphi_3 = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \left(\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}} \right)$$

Analogamente, i potenziali Φ_i sono:

$$\Phi_1 = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \left(\frac{Q_2}{r_{12}} + \frac{Q_3}{r_{13}} \right) \quad ; \quad \Phi_2 = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \left(\frac{Q_1}{r_{12}} + \frac{Q_3}{r_{23}} \right) \quad ; \quad \Phi_3 = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \left(\frac{Q_1}{r_{13}} + \frac{Q_2}{r_{23}} \right)$$

Quindi:

$$\sum_{i=1,3} Q_i \varphi_i = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \left(\frac{Q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{Q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{Q_2 q_1}{r_{12}} + \frac{Q_2 q_3}{r_{23}} + \frac{Q_3 q_1}{r_{13}} + \frac{Q_3 q_2}{r_{23}} \right)$$

Il punto essenziale è che la precedente espressione è simmetrica nelle cariche q_i e Q_i (questa proprietà è indipendente dal numero di termini), per cui invece di fattorizzare rispetto alle Q_i , come nella formula iniziale, si può fattorizzare rispetto alle q_i :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1,3} Q_i \varphi_i &= q_1 \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \left(\frac{Q_2}{r_{12}} + \frac{Q_3}{r_{13}} \right) + q_2 \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \left(\frac{Q_1}{r_{12}} + \frac{Q_3}{r_{23}} \right) + q_3 \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \left(\frac{Q_1}{r_{13}} + \frac{Q_2}{r_{23}} \right) = \\ &= q_1 \Phi_1 + q_2 \Phi_2 + q_3 \Phi_3 = \sum_{i=1,3} q_i \Phi_i \end{aligned}$$

Seguono due esempi di applicazione del teorema di reciprocità di Green, preliminari al teorema di Ramo.

Esempio 1

Prima configurazione di un sistema di 4 conduttori: il primo conduttore a tensione φ_1 e gli altri tre a tensione di riferimento (fig.1.2.1).

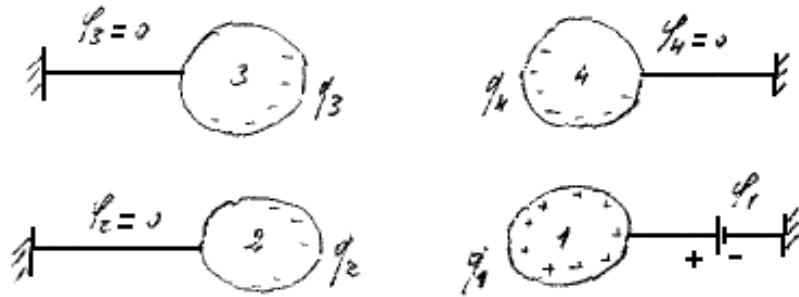


Figura 1.2.1:

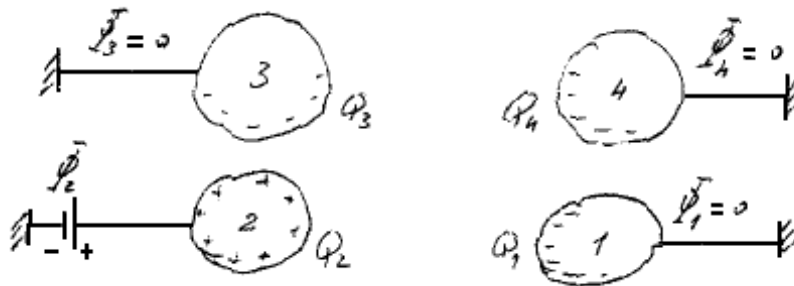


Figura 1.2.2:

Seconda configurazione: secondo conduttore a tensione Φ_2 e gli altri tre a tensione di riferimento (fig.1.2.2), in geometria identica a quella della prima configurazione.

Applicando il teorema di reciprocità (1.2.4), si ottiene:

$$Q_1\varphi_1 + Q_2\varphi_2(=0) + Q_3\varphi_3(=0) + Q_4\varphi_4(=0) = q_1\Phi_1(=0) + q_2\Phi_2 + q_3\Phi_3(=0) + q_4\Phi_4(=0)$$

e quindi:

$$Q_1\varphi_1 = q_2\Phi_2 \quad \text{se si fa } \varphi_1 = \Phi_2 \quad \text{segue} \quad Q_1 = q_2 \quad (1.2.5)$$

Le (1.2.5) esprimono la “reciprocità”.

Esempio 2

Applicazione del teorema di reciprocità di Green al caso di una carica puntiforme e più conduttori di forma e geometria fissa. Le notazioni di fig.1.2.3 e fig.1.2.4 sono analoghe a quelle dell’esempio precedente.

Prima configurazione: il sistema è costituito da 4 conduttori e da una carica puntiforme $+q$. Tutti i conduttori sono tenuti a tensioni fisse rispetto al riferimento tramite i corrispondenti generatori di tensione (eventualmente nulli).

Seconda configurazione: la carica $+q$ ha assunto valore nullo e il primo conduttore è tenuto ad un nuovo potenziale Φ_1 , mentre gli altri conduttori sono tenuti al potenziale di

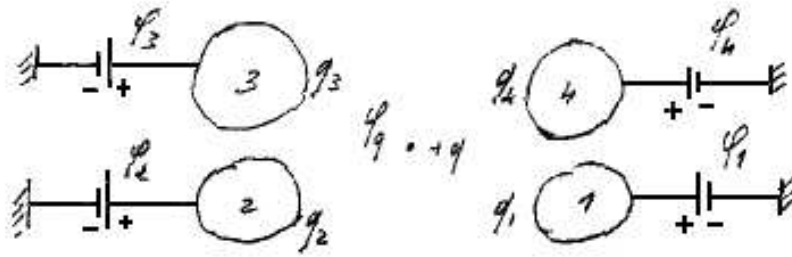


Figura 1.2.3:

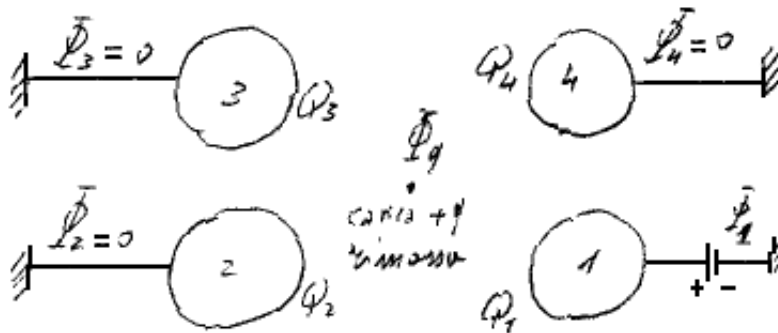


Figura 1.2.4:

riferimento (che prendiamo di valore nullo).

Teorema di Green:

$$0 \cdot \varphi_q + Q_1 \varphi_1 + Q_2 \varphi_2 + Q_3 \varphi_3 + Q_4 \varphi_4 = q \Phi_q + q_1 \Phi_1 + q_2 \Phi_2 (= 0) + q_3 \Phi_3 (= 0) + q_4 \Phi_4 (= 0)$$

ossia:

$$\sum_{i=1,4} Q_i \varphi_i = q \Phi_q + q_1 \Phi_1 \quad (1.2.6)$$

1.3 Teorema di Ramo

Con riferimento al risultato (1.2.6), facilmente generalizzabile ad un sistema di N conduttori (elettrodi), quello che interessa è come varia nel tempo la carica q_1 sull'elettrodo 1 quando la carica puntiforme $+q$ si muove. Se si deriva la (1.2.6) rispetto al tempo si trova che al primo membro φ_i sono i potenziali costanti dei conduttori (per effetto dell'azione dei generatori) nella prima configurazione, mentre Q_i sono le cariche statiche sui conduttori nella seconda configurazione ($q = 0$). In definitiva si ha (passando direttamente al caso di N conduttori):

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1,N} Q_i \varphi_i \right) = 0 = q \frac{d\Phi_q}{dt} + \frac{dq_1}{dt} \Phi_1 = q \frac{d\Phi_q}{dt} + i_1 \Phi_1 \quad (1.3.1)$$

Si osserva poi che Φ_q varia in quanto varia la posizione di q , ossia:

$$\frac{d\Phi_q[x(t), y(t), z(t)]}{dt} = \frac{\partial\Phi_q}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial\Phi_q}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial\Phi_q}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = -E_{qx}v_x - E_{qy}v_y - E_{qz}v_z = -\vec{v} \cdot \vec{E}_q$$

e quindi:

$$i_1 = \frac{1}{\Phi_1} q \vec{v} \cdot \vec{E}_q \quad (1.3.2)$$

dove \vec{E}_q è il campo elettrico creato dai conduttori nel punto in cui si trova la carica q , in assenza della medesima.

Nei casi pratici Φ_1 è la tensione V di un elettrodo rispetto ad un altro di riferimento, oppure la tensione V di una armatura di un rivelatore rispetto all'altra, e si scrive quindi:

$$i = \frac{1}{V} q \vec{v} \cdot \vec{E}_q \quad (1.3.3)$$

dove \vec{E}_q è il campo elettrico in assenza della carica q . Le equazioni (1.3.2) e (1.3.3) costituiscono il Teorema di Ramo.

1.4 Limitazioni e generalizzazioni del Teorema di Ramo

La formulazione (1.3.3), dovuta a Ramo [Proc.I.R.E. 27(1939)584], può essere ritrovata con considerazioni più generali che, da un lato, ne chiariscono i limiti mentre, dall'altro, ne estendono l'applicabilità anche al caso dei rivelatori a semiconduttore (e più in generale in presenza di carica spaziale).

Per gli argomenti sviluppati in questo paragrafo ci riferiamo ai lavori di C.K.Jen [1, 2] e ai lavori di G.Cavalleri et al. [3, 4].

[1] C.K. Jen "On the induced current and energy balance in electronics", Proceedings of the I.R.E. (Institute of Radio Engineering) pag.345, June 1941

[2] C.K. Jen "On the energy equation in electronics at ultra-high frequencies", Proceedings of the I.R.E. pag.464, August 1941

[3] G. Cavalleri et al. "On the induced charge in semiconductor detectors" N.I.M. 21 (1963) 177

[4] G. Cavalleri et al. "Extension of Ramo's theorem as applied to induced charge in semiconductor detectors" N.I.M. 92 (1971) 137

È usuale considerare la corrente che fluisce in un elettrodo di un tubo elettronico come il numero di cariche che l'elettrodo riceve (emette) dallo (nello) spazio circostante nell'unità di tempo. Questo modo di pensare si applica bene tutte le volte che il tempo di transito delle cariche fra gli elettrodi è trascurabile rispetto alle più rapide variazioni di corrente (di tensione) utilizzate per eccitare il sistema. Tuttavia, a frequenze sufficientemente elevate, il tempo di transito non è più trascurabile e in questi casi il precedente punto di vista risulta non applicabile.

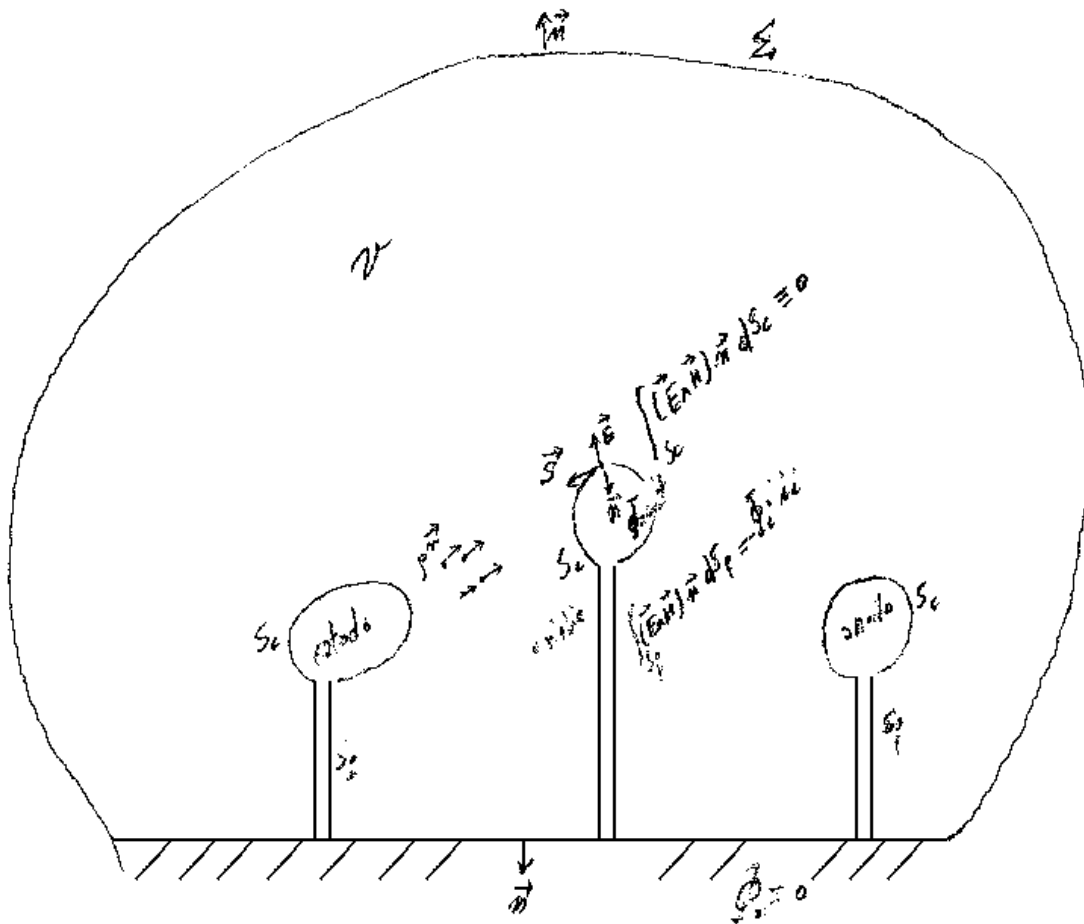


Figura 1.4.1:

Per iniziare, consideriamo un sistema di N elettrodi conduttori in vuoto come mostrato in fig.1.4.1. Ciascun conduttore, il generico dei quali indicheremo con "i", è tenuto a potenziale fisso Φ_1 rispetto ad un elettrodo conduttore di riferimento il potenziale del quale sarà individuato con Φ_0 (che sarà preso nullo tutte le volte che risulterà conveniente).

Di norma uno dei conduttori costituisce un emettitore di elettroni (catodo), mentre gli altri sono elettrodi di controllo dell'intensità e della struttura geometrica del campo elettrico (griglie, deflettori), oppure elettrodi di raccolta della corrente (anodi).

Applichiamo la conservazione dell'energia al sistema costituito dagli N elettrodi e da una superficie di chiusura Σ che racchiude il sistema dei conduttori. Indichiamo con \vec{n} la normale entrante nella superficie S_c dei conduttori ed uscente dalla superficie di chiusura Σ .

Utilizzando il S.I., la conservazione dell'energia e.m. in forma puntuale è:

$$-\operatorname{div}(\vec{E} \wedge \vec{H}) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \right) + \rho \vec{v} \cdot \vec{E} \quad (1.4.1)$$

Integriamo la (1.4.1) in tutto il volume V delimitato dalle superfici S_c dei conduttori (e delle loro eventuali connessioni con il conduttore di riferimento) e dalla superficie Σ di chiusura. Applicando il Teorema della divergenza al primo membro della (1.4.1) si ottiene:

$$\begin{aligned} - \int_{S_f} (\vec{E} \wedge \vec{H}) \cdot \vec{n} \, dS - \int_{S_c} (\vec{E} \wedge \vec{H}) \cdot \vec{n} \, dS - \int_{\Sigma} (\vec{E} \wedge \vec{H}) \cdot \vec{n} \, dS = \\ = - \int_V \rho \vec{v} \cdot \vec{E} \, dV + \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} \right) \int_V (\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) \, dV \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

Gli integrali a primo membro rappresentano il flusso di energia attraverso le corrispondenti superfici. Consideriamo il secondo integrale: siccome $(\vec{E} \wedge \vec{H})$ è perpendicolare ad \vec{E} e siccome \vec{E} è supposto perpendicolare al conduttore ($\Phi = \text{costante}$), il vettore di Poynting risulta tangente al conduttore e pertanto $(\vec{E} \wedge \vec{H}) \cdot \vec{n} = 0$. Perciò l'integrazione sulle superfici S_c degli elettrodi produce risultato nullo. Viceversa, l'integrazione sulle superfici S_f dei fili perfettamente conduttori (che possono contenere dei generatori che per semplicità supporremo cilindrici) che collegano gli elettrodi al conduttore di riferimento (fig.1.4.2), risulta in generale diversa da zero, come precedentemente discusso. Per l' i -esimo elettrodo

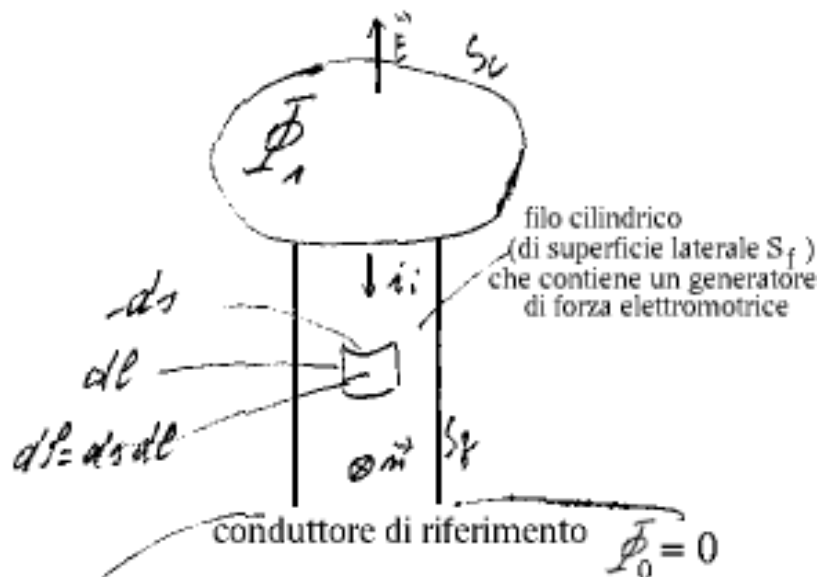


Figura 1.4.2:

si ha [vedi (1.1.3)]:

$$\left[\int_{S_f} (\vec{E} \wedge \vec{H}) \cdot \vec{n} \, dS \right]_i = \left[\int_{S_f} EH \, ds \, dl \right]_i = -\Phi_i i_i \quad (1.4.3)$$

(dove il segno meno è stato inserito perchè sono generatori) e quindi per il sistema di N elettrodi

$$\sum_{i=1,N} []_i = - \sum_{i=1,N} \Phi_i i_i \quad (1.4.4)$$

ove i_i è la corrente che scorre nell' i -esimo elettrodo ed è collegata dall'equazione di continuità alla variazione della carica elettrica sull'elettrodo per effetto dell'induzione delle cariche in moto nello spazio circostante.

In definitiva, combinando la (1.4.2) e la (1.4.4) si ottiene:

$$\int_{\Sigma} (\vec{E} \wedge \vec{H}) \cdot \vec{n} dS + \int_{\mathcal{V}} \rho \vec{v} \cdot \vec{E} d\mathcal{V} + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} (\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) d\mathcal{V} = \sum_{i=1,N} \Phi_i i_i \quad (1.4.5)$$

La (1.4.5) si rilegge come segue: il secondo membro è la potenza istantanea messa a disposizione dai generatori che definiscono le tensioni degli elettrodi. Il primo termine a primo membro è l'energia irraggiata, il secondo termine è collegato alla variazione nel tempo dell'energia cinetica della carica spaziale mobile e il terzo termine è la variazione nel tempo dell'energia del campo e.m..

Se la lunghezza d'onda associata all'eccitazione del sistema è molto più grande delle dimensioni lineari del sistema in oggetto, il termine radiativo risulta trascurabile, così come risulta trascurabile l'energia associata al campo magnetico tutte le volte che non siano stati introdotti specifici dispositivi induttivi e/o sostanze ferromagnetiche (valide per tutti i rivelatori che considereremo).

In queste ipotesi, valide per tutti i rivelatori che considereremo, la (1.4.5) diventa:

$$\int_{\mathcal{V}} \rho \vec{v} \cdot \vec{E} d\mathcal{V} + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\varepsilon_0 \int_{\mathcal{V}} \vec{E} \cdot \vec{E} d\mathcal{V}) = \sum_{i=1,N} \Phi_i i_i$$

ed eseguita la derivata sotto il segno di integrale, si ha:

$$\sum_{i=1,N} \Phi_i i_i = \int_{\mathcal{V}} \left[\rho \vec{v} + \varepsilon_0 \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \right] \cdot \vec{E} d\mathcal{V} \quad (1.4.6)$$

1.5 Presenza di carica spaziale

Con riferimento alla fig.1.5.1, supponiamo ora, per includere il caso dei rivelatori a semiconduttore e la carica spaziale mobile generata da una particella che ha interagito con il rivelatore, che il campo \vec{E} macroscopico all'interno del rivelatore si possa porre nella forma (principio di sovrapposizione lineare):

$$\vec{E} = \vec{E}_e + \vec{E}_s + \vec{E}_m \quad (1.5.1)$$

dove \vec{E}_e è il campo degli elettrodi, portati alle loro effettive tensioni, in assenza di qualunque distribuzione di carica di volume (a parte quella dovuta alla polarizzazione del

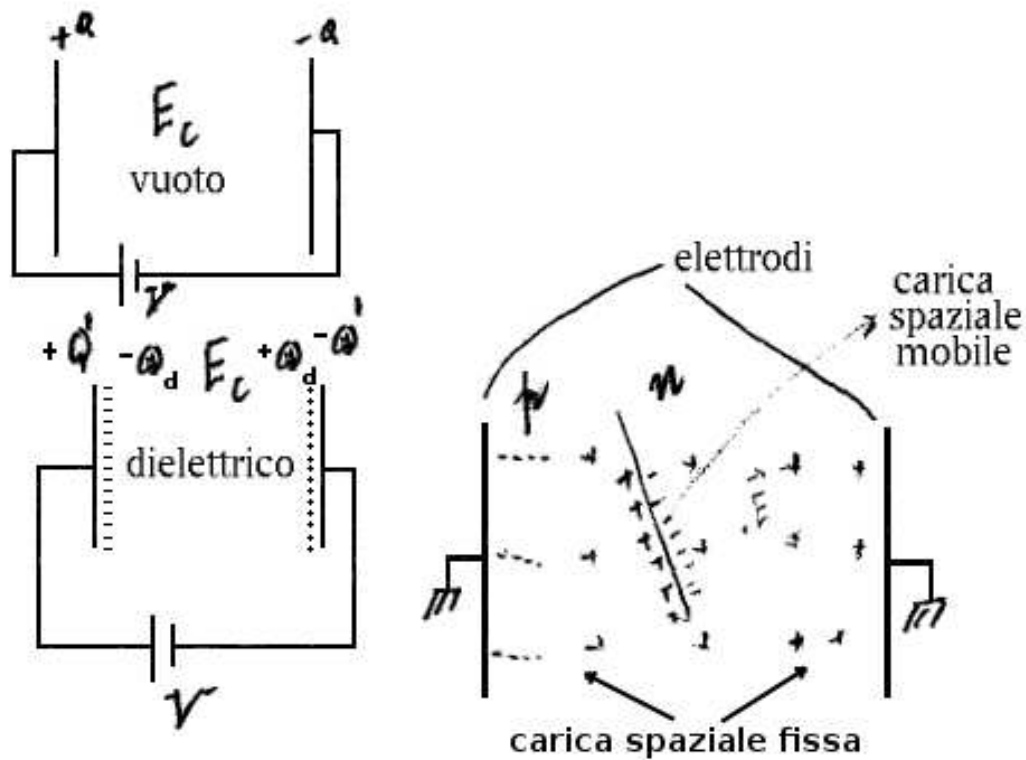


Figura 1.5.1:

dielettrico che supporremo però generi cariche puramente superficiali), \vec{E}_s è il campo generato dalla densità di carica spaziale fissa ρ_s e \vec{E}_m è il campo generato dalla densità di cariche in movimento ρ_m . I campi \vec{E}_e e \vec{E}_m devono essere calcolati con gli elettrodi tenuti al potenziale di riferimento (per semplicità a potenziale nullo) ma tenendo conto delle cariche di polarizzazione da essi indotte nel dielettrico e delle cariche indotte sugli elettrodi. Nel caso quasi stazionario, nel quale ci siamo posti, i campi sopramenzionati sono supposti derivabili dai corrispondenti potenziali scalari Φ_e , Φ_s e Φ_m per i quali valgono le condizioni:

$$\Phi_e = \Phi_i \quad \text{sull'i-esimo elettrodo}$$

$$\Phi_s = \Phi_m = 0 \quad \text{su tutti gli elettrodi.}$$

Per chiarezza di procedura, applichiamo il principio di sovrapposizione lineare nel seguente modo (un po' artificioso):

1) consideriamo il caso fittizio nel quale gli elettrodi sono a tensione nulla rispetto al riferimento, ma sono viceversa presenti le cariche spaziali ρ_s e ρ_m , queste ultime con le loro velocità effettive \vec{v} (questo nonostante il supposto valore nullo dei potenziali degli elettrodi, che sono viceversa necessari per avere una regione di svuotamento, e quindi una ρ_s , nel caso dei rivelatori a semiconduttore a giunzione p-n o a barriera di superficie e che partecipano, di norma in maniera essenziale, a determinare la velocità effettiva della

densità di carica spaziale mobile ρ_m). Per queste distribuzioni di carica la (1.4.6) diventa:

$$\sum_{i=1,N} \Phi_i i_i = \int_{\mathcal{V}} (\vec{E}_s + \vec{E}_m) \cdot \left[\rho \vec{v} + \varepsilon_0 \left(\frac{\partial(\vec{E}_s + \vec{E}_m)}{\partial t} \right) \right] d\mathcal{V} = 0 \quad (1.5.2)$$

2) Applicando la (1.4.6) al caso completo e ricordando che $\partial \vec{E}_e / \partial t = 0$ e $\partial \vec{E}_s / \partial t = 0$ perché si tratta di campi statici, si ottiene:

$$\sum_{i=1,N} \Phi_i i_i = \int_{\mathcal{V}} \left[\rho_m \vec{v} + \varepsilon_0 \left(\frac{\partial \vec{E}_m}{\partial t} \right) \right] \cdot \vec{E}_e d\mathcal{V} \quad (1.5.3)$$

3) Consideriamo il contributo associato al secondo termine a secondo membro della (1.5.3) (cioè la corrente di spostamento associata al campo creato dalle cariche mobili) che, per funzioni fisiche (well-behaved), può essere riscritto come (tenuto conto che \vec{E}_e non dipende dal tempo):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\mathcal{V}} \varepsilon_0 \vec{E}_m \cdot \vec{E}_e d\mathcal{V} \right) \quad (1.5.4)$$

Consideriamo l'integrale:

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathcal{V}} \varepsilon_0 \text{grad } \Phi_m \cdot \vec{E}_e d\mathcal{V} = (\text{dalla identità vettoriale } \vec{\nabla} \cdot (a \vec{v}) = \vec{\nabla} a \cdot \vec{v} + a \vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \\ & = - \int_{\mathcal{V}} \text{div}(\varepsilon_0 \Phi_m \vec{E}_e) d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \Phi_m \text{div}(\varepsilon_0 \vec{E}_e) d\mathcal{V} = - \int_S \varepsilon_0 \Phi_m \vec{E}_e \cdot \vec{n} dS + \int_{\mathcal{V}} \Phi_m \text{div}(\varepsilon_0 \vec{E}_e) d\mathcal{V} \end{aligned}$$

Il primo integrale è nullo a tutti i tempi perché $\Phi_m = 0$ sulle superfici di contorno; anche il secondo integrale è nullo a tutti i tempi perché $\text{div}(\varepsilon_0 \vec{E}_e) = \rho_e = 0$, essendo nulla la carica di volume associata ai campi generati dagli elettrodi in ipotesi di dielettrico omogeneo e isotropo. Il risultato finale è pertanto:

$$\sum_{i=1,N} \Phi_i i_i = \int_{\mathcal{V}} \rho_m \vec{v} \cdot \vec{E}_e d\mathcal{V} \quad (1.5.5)$$

Dalla (1.5.5) è possibile calcolare la corrente indotta su ogni elettrodo quando le tensioni sugli altri elettrodi sono mantenute costanti al potenziale di riferimento. Di fatto, in base al principio di sovrapposizione lineare, se tutti gli elettrodi sono tenuti a potenziale zero rispetto al riferimento salvo l'i-esimo, che supponiamo trovarsi al potenziale Φ_i rispetto al riferimento, si ha subito:

$$i_i = (1/\Phi_i) \int_{\mathcal{V}} \rho_m \vec{v} \cdot \vec{E}_{ei} d\mathcal{V} \quad (1.5.6)$$

dove \vec{E}_{ei} è il vettore campo elettrico in ogni punto dello spazio dovuto al fatto che l'i-esimo conduttore è a potenziale Φ_i rispetto al riferimento mentre gli altri conduttori sono a potenziale nullo rispetto al riferimento.

1.6 Teorema di Ramo derivato dal caso generale

Nel caso di una singola carica puntiforme (elettrone, ione) “ q ” in moto fra gli elettrodi, il volume di integrazione della (1.5.6) può essere preso come una minuscola sferetta attorno ad essa. In tale sferetta il campo \vec{E}_{ei} è costante, e siccome anche la velocità \vec{v} è “istantaneamente” costante, si ha:

$$\int_{\mathcal{V}} \rho_m (\vec{v} \cdot \vec{E}_{ei}) d\mathcal{V} = (\vec{v} \cdot \vec{E}_{ei}) \int_{\mathcal{V}} \rho_m d\mathcal{V} = q\vec{v} \cdot \vec{E}_{ei} \quad (1.6.1)$$

e quindi, il Teorema di Ramo derivato dal caso generale:

$$i_i = (1/\Phi_i) q\vec{v} \cdot \vec{E}_{ei} \quad (1.6.2)$$

Si rimarca che \vec{E}_{ei} è il campo dell’elettrodo rispetto al resto del sistema di elettrodi preso come riferimento, mentre \vec{v} è quella generata dal campo elettrico locale totale: $\vec{E}_e + \vec{E}_s + \vec{E}_m$. Riguardo a questo secondo punto si usa distinguere due casi:

1. è il caso più usuale e al quale si cerca di ricondursi, nel quale l’effetto della carica spaziale mobile è trascurabile: il campo che si considera per il calcolo della velocità della carica spaziale mobile è perciò $\vec{E}_e + \vec{E}_s$
2. è il caso di forte carica spaziale che va trattato di volta in volta e che spesso ammette solo soluzioni parziali.

1.7 Correnti e cariche indotte dal moto di una coppia elettrone-ione in un condensatore piano in vuoto

Eseguiamo ora un’analisi dettagliata dell’andamento nel tempo della corrente e della carica a seguito del moto di una coppia ione-elettrone creata a distanza x_0 dall’elettrodo di raccolta nel caso di un condensatore piano, le cui armature sono tenute ad una d.d.p. V da un generatore di tensione.

Iniziamo con il considerare un caso particolare che serve per chiarire concetti di importanza primaria nella successiva analisi del funzionamento di rivelatori planari e coassiali, ovvero in geometria planare e cilindrica.

1) Moto di una carica positiva lungo una linea di forza fra due elettrodi piani tenuti a d.d.p. V come mostrato nelle fig.1.7.1, 1.7.2 e 1.7.3. Notare che le cariche presenti sugli elettrodi, dovute al generatore di tensione, non sono mostrate.

Nella situazione iniziale il campo di dipolo della carica $+q$ e della carica indotta $-q$ si richiude su sé stesso e al limite ($+q$ infinitamente vicina all’elettrodo 1 di fig.1.7.1) non dà contributo all’esterno.

2) nella fig.1.7.2 è mostrato il verso del moto della carica positiva (corrente i) che si sta trasferendo dall’elettrodo 2 all’elettrodo 1 tramite il circuito esterno. Dal punto di vista delle cariche sugli elettrodi in questa fase vale la relazione, conseguente dal Teorema di Gauss e dall’invarianza relativistica della carica elettrica, : $-q_1 - q_2 = -q$.

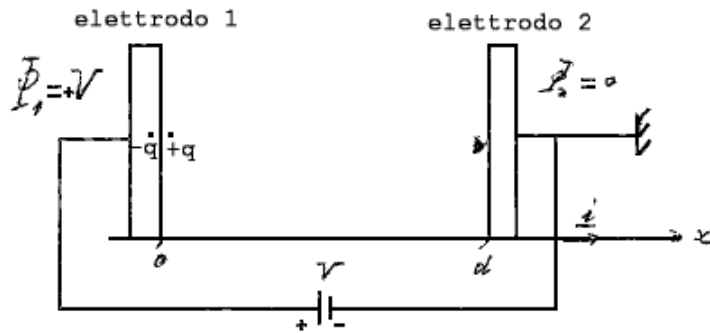


Figura 1.7.1:

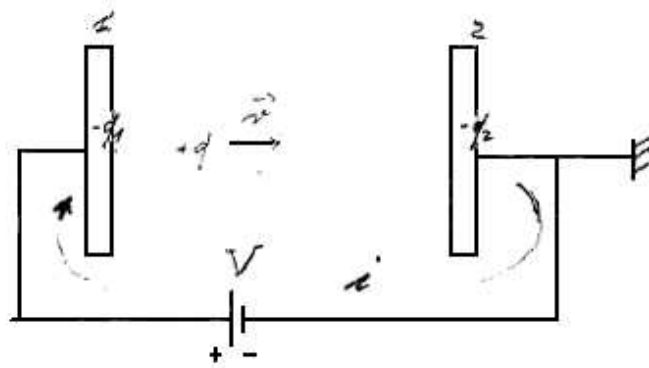


Figura 1.7.2:

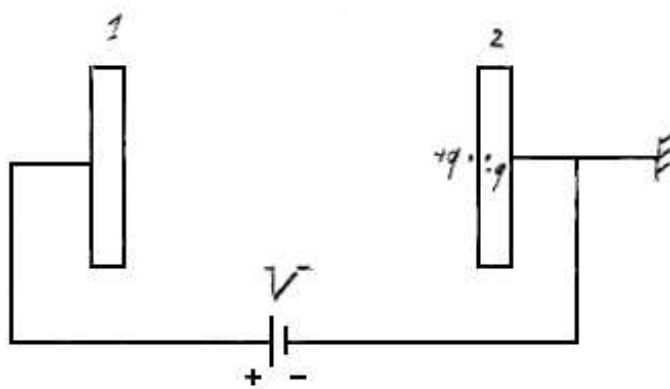


Figura 1.7.3:

3) la situazione finale, mostrata nella fig.1.7.3, è analoga alla situazione iniziale. Durante il passaggio dalla situazione iniziale a quella finale, nel circuito esterno, dall'elettrodo 2 all'elettrodo 1, è fluita una corrente di carica positiva di valore totale pari a $+q$. Riassumendo:

Situazione iniziale:	$q_{\text{elettrodo 1}} = -q$	$q_{\text{elettrodo 2}} = 0$	
Transitorio:	$= -q_1$	$= -q_2$	con $-q_1 - q_2 = -q$
Situazione finale:	$q_{\text{elettrodo 1}} = 0$	$q_{\text{elettrodo 2}} = -q$	

NOTA:

L'analisi successiva riguarda la carica (ione) $+q$ in moto dall'elettrodo 1 all'elettrodo 2 e la carica da essa indotta sugli elettrodi medesimi (senza che tale carica di induzione abbia importante influenza sul moto dello ione) e che il moto dello ione dipenda solo dal campo dovuto al generatore di tensione. Questo discorso non è esatto e di questo ci si può rendere conto con l'esempio riportato in fig.1.7.4.

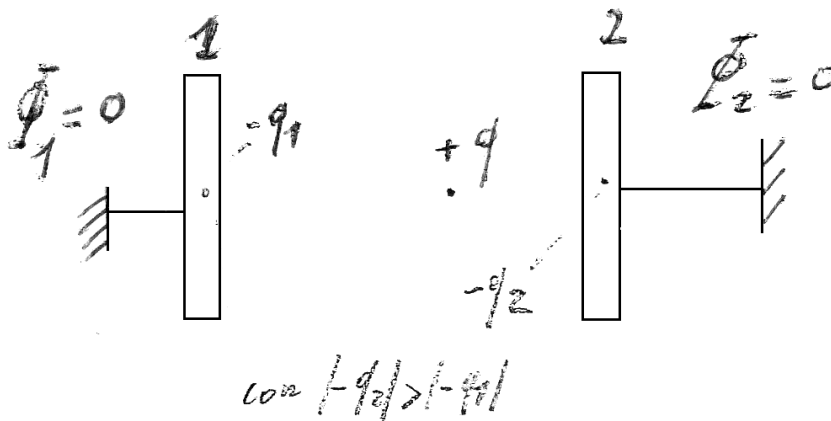


Figura 1.7.4:

La situazione rappresentata in figura mostra uno ione che, sollecitato dalle cariche di induzione sugli elettrodi si sposta, accelerando, verso l'elettrodo al quale è più vicino e questo nonostante che il campo elettrico applicato, calcolato come V/d , risulti nullo perché V è nullo.

Un esempio realistico:

nell'esempio di fig.1.7.4 supponiamo che sia $d = 1 \text{ mm}$ e la d.d.p. applicata 160 V .

$$E_e = \frac{1.6 \cdot 10^2 \text{ V}}{10^{-3} \text{ m}} = 1.6 \cdot 10^5 \text{ Vm}^{-1} \rightarrow \frac{\sigma}{\epsilon_0} = 1.6 \cdot 10^5 \text{ Vm}^{-1}$$

$$\sigma = \epsilon_0 \cdot 1.6 \cdot 10^5 \text{ Cm}^{-2} = 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 1.6 \cdot 10^5 \text{ Cm}^{-2} \simeq 1.4 \cdot 10^{-6} \text{ Cm}^{-2}$$

Su ogni cm^2 si trova quindi una carica pari a $1.4 \cdot 10^{-6} \text{ Cm}^{-2} \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 1.4 \cdot 10^{-10} \text{ C}$, corrispondente a $1.4 \cdot 10^{-10} \text{ C} / 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \simeq 10^9$ cariche elettroniche per cm^2 .

Una particella di 1 MeV genera in S circa $(10^6 \text{ eV}) / (3.6 \text{ eV/coppia}) = 3 \cdot 10^5$ coppie totali che inducono differentemente sugli elettrodi (a seconda della distanza tra di esse), tenendo anche conto della costante dielettrica del mezzo.

L'analisi quantitativa, dettagliata, del moto della coppia ione-elettrone creati alla distanza x_0 dall'elettrodo 1 di raccolta della carica fa riferimento alla fig.1.7.5 e usa le seguenti

grandezze e definizioni:

ione:	massa	m_i
	carica	$q_i = e$
	velocità iniziale	$[(dx_i/dt) \vec{i}]_{t=0} = \vec{v}_i(t=0) = 0$
	posizione iniziale	$x_i(t=0) \vec{i} = x_0 \vec{i}$

elettrone:	massa	m_e
	carica	$q_e = -e$
	velocità iniziale	$[(dx_e/dt) \vec{i}]_{t=0} = \vec{v}_e(t=0) = 0$
	posizione iniziale	$x_e(t=0) \vec{i} = x_0 \vec{i}$

Campo elettrico degli elettrodi: $\vec{E} = (V/d) \vec{i}$
(In questo caso è anche il campo che determina univocamente la velocità \vec{v} .)

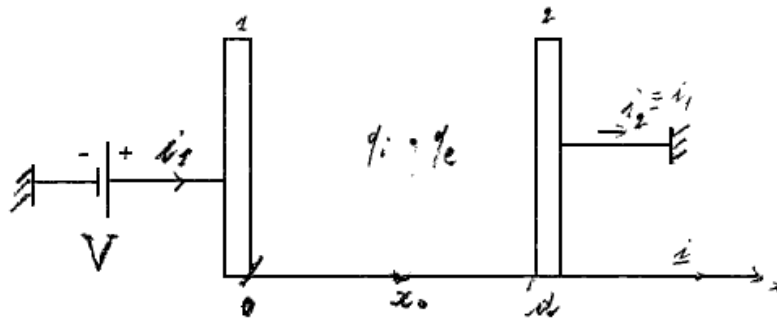


Figura 1.7.5:

Equazione di moto dello ione:

$$\left(\frac{d^2 x_i}{dt^2}\right) \vec{i} = \left(\frac{d}{dt}\right) \left(\frac{dx_i}{dt}\right) \vec{i} = \left(\frac{q_i V}{m_i d}\right) \vec{i} = \left(\frac{e V}{m_i d}\right) \vec{i}$$

Integrando rispetto al tempo fra l'istante iniziale $t = 0$ e il generico tempo t , si ottiene la velocità dello ione al tempo t (tenuto conto che la velocità iniziale dello ione è supposta nulla):

$$\left(\frac{dx_i}{dt}\right) \vec{i} = \left(\frac{e V}{m_i d}\right) t \vec{i}$$

Integrando ancora una volta rispetto al tempo e tenuto conto della condizione iniziale sulla posizione si ottiene l'equazione oraria:

$$(x_i(t) - x_0) \vec{i} = \frac{1}{2} \left(\frac{e V}{m_i d}\right) t^2 \vec{i} = \frac{e}{d} \frac{V}{2m_i} t^2 \vec{i}; \quad t^2 = (x_i(t) - x_0) \frac{2dm_i}{eV} \quad (1.7.1)$$

Il tempo di transito t_i dello ione da $x_i(0) \vec{i} = x_0 \vec{i}$ a $x_i(t_i) \vec{i} = d \vec{i}$, si ottiene, dalla (1.7.1):
 $(d - x_0) = (1/2)(eV/m_i d)t_i^2$ e quindi $t_i = [(2m_i d/eV)(d - x_0)]^{1/2}$.

Il massimo tempo di transito lo si ha quando $x_0 = 0$ ed è dato da $t_{i \max} = (2m_i/eV)^{1/2} d$.

[Determiniamo ad esempio il tempo di transito per elettroni (protoni) nel caso in cui $d = 2 \text{ cm}$, $x_0 = 1 \text{ cm}$ e $V = 100 \text{ V}$. Ricordando che $m_e = 9 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ($m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$), si ricava

$$t_{e(i)} = (m)^{1/2} \left[\frac{2 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{1.6 \cdot 10^{-19}} \frac{10^{-2}}{10^2} \right]^{1/2} = (m)^{1/2} [2.5 \cdot 10^{13}]^{1/2} = 5 \text{ ns} \quad (200 \text{ ns})$$

L'elettrone impiega quindi un tempo pari a circa 1/40 di quello del protone e circa 1/400 di quello di uno ione (singolo carico) di massa 100.]

Applichiamo ora il Teorema di Ramo per determinare la corrente $i_{1i}(t)$ all'elettrodo 1, associata al moto dello ione:

$$i_{1i}(t) = \frac{1}{V} e \left[\left(\frac{dx_i}{dt} \right) \vec{i} \right] \cdot \vec{E} = \frac{1}{V} e \left(\frac{eV}{m_i d} \right) t \vec{i} \cdot \left(\frac{V}{d} \right) \vec{i} = \left(\frac{e^2 V}{m_i d^2} \right) t$$

Per la variazione della carica indotta all'elettrodo nel dt si ha:

$dq_{1i}(t) = (e^2 V / m_i d^2) t dt$ e integrando:

$$q_{1i}(t) - q_{1i}(0) = \frac{e^2 V}{2 m_i d^2} t^2 \quad (1.7.2)$$

La (1.7.2) stabilisce l'andamento parabolico della carica in funzione del tempo. Utilizzando la (1.7.1) si può correlare l'andamento della carica con la posizione assunta dallo ione:

$$q_{1i}(t) - q_{1i}(0) = \frac{e}{d} (x_i(t) - x_0) \quad (1.7.3)$$

Le (1.7.2) e (1.7.3) valgono per $0 < t < t_i$ e per $x_0 < x_i < d$.

Il valore finale di carica raccolta (per tempi $t > t_i$), dovuta al moto dello ione, si ottiene per $x_i = d$ ed è:

$$q_{1i}(t > t_i) - q_{1i}(0) = \frac{e}{d} (d - x_0) \quad (1.7.4)$$

L'andamento di $i_{1i}(t)$ in funzione del tempo è riportato nella fig.1.7.6, figura destra della parte a).

Il contributo dell'elettrone si determina con procedura analoga:

$$\left(\frac{d^2 x_e}{dt^2} \right) \vec{i} = \left(\frac{d}{dt} \right) \left(\frac{dx_e}{dt} \right) \vec{i} = \left(\frac{q_e V}{m_e d} \right) \vec{i} = - \left(\frac{e V}{m_e d} \right) \vec{i}$$

Integrando rispetto al tempo, fra l'istante iniziale, quando la velocità dell'elettrone è nulla, e il generico tempo di volo, si ottiene la corrispondente velocità:

$$\left(\frac{dx_e}{dt} \right) \vec{i} = - \left(\frac{e V}{m_e d} \right) t \vec{i}$$

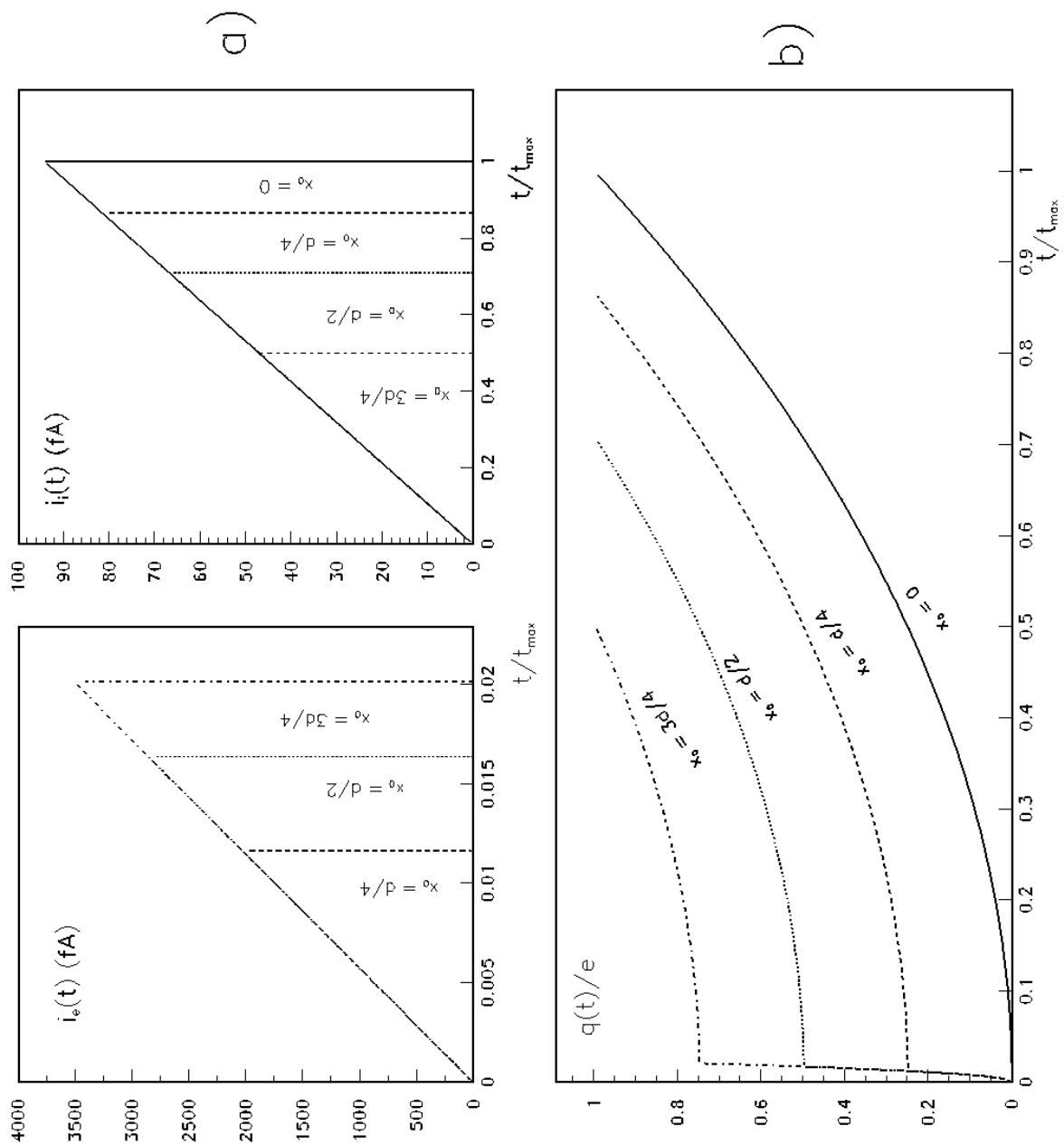


Figura 1.7.6: Correnti elettronica e ionica (parte a) e carica indotta (parte b) nel caso di $d = 10 \text{ cm}$ e $V = 500 \text{ V}$

e di nuovo per integrazione si ottiene l'equazione oraria, tenuto conto che all'istante iniziale anche l'elettrone occupa la posizione $x_0\vec{i}$:

$$(x_e(t) - x_0)\vec{i} = -\frac{1}{2} \left(\frac{eV}{m_e d} \right) t^2 \vec{i} \quad (1.7.5)$$

Il tempo di transito t_e dell'elettrone, da $x_e(0)\vec{i} = x_0\vec{i}$ a $x_e(t_e)\vec{i} = 0$, si ottiene dalla (1.7.1) $-x_0 = -(1/2)(eV/m_e d)t_e^2$ e quindi $t_e = [(2m_e d/eV)x_0]^{1/2}$.

Applichiamo di nuovo il Teorema di Ramo per determinare la corrente di induzione $i_{1e}(t)$ all'elettrodo 1, associata al moto dell'elettrone:

$$i_{1e}(t) = \frac{1}{V}(-e) \left[\left(\frac{dx_e}{dt} \right) \vec{i} \right] \cdot \vec{E} = \frac{1}{V}(-e) \left(-\frac{eV}{m_e d} \right) t \vec{i} \cdot \left(\frac{V}{d} \right) \vec{i} = \left(\frac{e^2 V}{m_e d^2} \right) t$$

Per la carica indotta sull'elettrodo nel dt si ha $dq_{1e}(t) = (e^2 V/m_e d^2)t dt$ e integrando:

$$q_{1e}(t) - q_{1e}(0) = \frac{e^2 V}{2m_e d^2} t^2 \quad (1.7.6)$$

La (1.7.6) stabilisce l'andamento parabolico della carica in funzione del tempo.

Utilizzando la (1.7.5) si può correlare l'andamento della carica con la posizione assunta dall'elettrone:

$$q_{1e}(t) - q_{1e}(0) = \frac{e}{d} (x_0 - x_e(t)) \quad (1.7.7)$$

Le (1.7.6) e (1.7.7) valgono per $0 < t < t_e$ e per $x_0 > x_e > 0$. Il valore finale di carica raccolta (quindi per tempi $t > t_e$), dovuta al moto dell'elettrone, si ha per $x_e = 0$:

$$q_{1e}(t > t_e) - q_{1e}(0) = \frac{e}{d} x_0 \quad (1.7.8)$$

Anche l'andamento di $i_{1e}(t)$ in funzione del tempo è riportato nella fig.1.7.6 parte a), figura sinistra. La corrente totale all'elettrodo 1 risulta:

$$i_1(t) = i_{1i}(t) + i_{1e}(t) = \left(\frac{e^2 V}{d^2} \right) \left[\frac{t}{m_i} + \frac{t}{m_e} \right] \quad (1.7.9)$$

dove il primo termine vale per $t < t_i$ e il secondo per $t < t_e$. La carica totale all'elettrodo 1 risulta $q_1(t) = [q_{1i}(t) - q_{1i}(0)] + [q_{1e}(t) - q_{1e}(0)] = [q_{1i}(t) + q_{1e}(t)] - [q_{1i}(0) + q_{1e}(0)]$; tenuto conto che $q_{1i}(0) + q_{1e}(0) = 0$, si ha:

$$q_1(t) = \left(\frac{e^2 V}{2d^2} \right) \left[\frac{t^2}{m_i} + \frac{t^2}{m_e} \right] \quad (1.7.10)$$

Anche i due termini della (1.7.10) hanno le stesse limitazioni sui tempi della (1.7.9). Infine, anche la carica totale può essere messa in funzione delle posizioni acquisite dallo ione e dall'elettrone:

$$q_1(t) = \left(\frac{e}{d} \right) [(x_i(t) - x_0) + (x_0 - x_e(t))] \quad (1.7.11)$$

La (1.7.10) è riportata nella fig.1.7.6, parte b).

2 Rivelatori a gas

2.1 Camere di ionizzazione

Per uno studio generale di tali tipi di rivelatore e per i loro impieghi più comuni si rimanda a Knoll [Chapter 5 “Ionization Chambers”] dove, in particolare, sono trattati i seguenti argomenti: a) processi di ionizzazione nei gas, b) moto e raccolta delle cariche prodotte. Qui ci limitiamo a discutere la formazione dei segnali di corrente in tali camere.

Nel seguito ci limitiamo al caso della corrente prodotta da una coppia ione-elettrone generata nel gas della camera a distanza x_0 dall’elettrodo di raccolta che si trova a potenziale V rispetto all’altro elettrodo. La fig.2.1.1 mostra uno schema semplificato della camera dove sono riportate le principali grandezze e il sistema di riferimento utilizzato.

Le ipotesi principali sono le seguenti:

campo elettrico costante: $\vec{E} = (V/d) \vec{i}$,

velocità dello ione e dell’elettrone costanti:

$$\vec{v}_i = v_i \vec{i} = \mu_i(E/p) \vec{i} \quad ; \quad \vec{v}_e = -v_e \vec{i} = -\mu_e(E/p) \vec{i}$$

nelle precedenti espressioni μ_i e μ_e sono le mobilità che caratterizzano il moto viscoso, mentre p è la pressione del gas della camera.

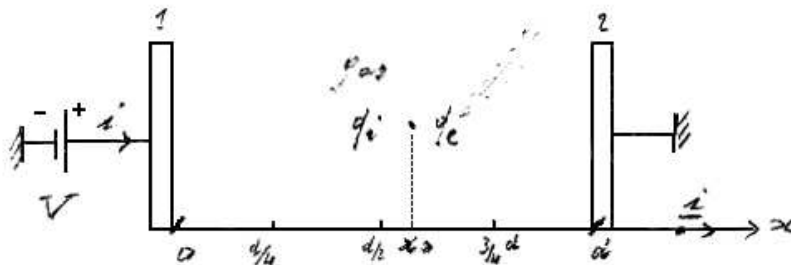


Figura 2.1.1:

La mobilità rimane abbastanza costante per un notevole campo di valori di E e di p ed è simile per ioni positivi e negativi in uno stesso gas. Valori usuali di mobilità ioniche, per gas di numero atomico medio, sono attorno a $10 \text{ m}^2 \text{ Pa V}^{-1} \text{ s}^{-1}$. Per esempio, a pressione atmosferica (10^5 Pa) e con un campo elettrico di 10^4 V m^{-1} , si ottengono velocità di deriva degli ioni di $\sim 1 \text{ m s}^{-1}$. Per attraversare un rivelatore di 1 cm occorrono quindi circa 10 ms . Gli elettroni liberi, che hanno una massa oltre $2000 \div 20000$ volte minore di quella degli ioni, hanno corrispondentemente tempi di transito $\sim 1000 \div 10000$ volte più piccoli, ovvero nell’ambito dei microsecondi. In taluni gas, come il metano, o in misture di Argon e metano, si possono raggiungere per gli elettroni velocità di saturazione attorno a 10^5 m s^{-1} . Nei gas nobili, viceversa, la velocità degli elettroni seguita ad aumentare con il campo elettrico.

Moto dello ione e sua corrente indotta:

$$(dx_i/dt) \vec{i} = v_i \vec{i}$$

Integrando rispetto al tempo e tenendo conto delle condizioni iniziali, si ottiene l’equazione

oraria:

$$(x_i(t) - x_0)\vec{i} = v_i t \vec{i} \quad (2.1.1)$$

Il tempo di transito dello ione è

$$t_i = (d - x_0)/v_i$$

che, per $x_0 = 0$, raggiunge il valore massimo:

$$t_{i \max} = d/v_i$$

Il Teorema di Ramo fornisce il seguente risultato per la corrente dovuta al moto dello ione:

$$i_i(t) = \frac{1}{V} e v_i \vec{i} \cdot \vec{E} = \frac{1}{V} e v_i \frac{V}{d} = \frac{e}{d} v_i \quad (\text{corrente costante}) \quad (2.1.2)$$

Integrando ancora una volta rispetto al tempo si determina l'andamento della carica raccolta all'elettrodo, a seguito del moto dello ione:

$$q_i(t) - q_i(0) = \frac{e}{d} v_i t \quad (\text{andamento lineare}) \quad (2.1.3)$$

e utilizzando la (2.1.1):

$$q_i(t) - q_i(0) = \frac{e}{d} [x_i(t) - x_0] \quad (2.1.4)$$

Moto dell'elettrone e sua corrente indotta:

$$(dx_e/dt) \vec{i} = -v_e \vec{i}$$

Integrando rispetto al tempo e tenendo conto delle condizioni iniziali, si ottiene l'equazione oraria:

$$(x_e(t) - x_0)\vec{i} = -v_e t \vec{i} \quad (2.1.5)$$

Il tempo di transito dell'elettrone è:

$$t_e = x_0/v_e$$

Il Teorema di Ramo fornisce il seguente risultato per la corrente dovuta al moto dell'elettrone:

$$i_e(t) = \frac{1}{V} (-e)(-v_e \vec{i}) \cdot \vec{E} = \frac{1}{V} e v_e \frac{V}{d} = \frac{e}{d} v_e \quad (\text{corrente costante}) \quad (2.1.6)$$

Integrando ancora una volta rispetto al tempo si determina l'andamento della carica raccolta all'elettrodo, a seguito del moto dell'elettrone:

$$q_e(t) - q_e(0) = \frac{e}{d} v_e t \quad (2.1.7)$$

e utilizzando la (2.1.5):

$$q_e(t) - q_e(0) = \frac{e}{d} [x_0 - x_e(t)] \quad (2.1.8)$$

Un esempio degli andamenti nel tempo delle correnti di ione e di elettrone e della corrente totale è riportato nella fig.2.1.2 parte a), mentre nella parte b) sono riportati gli andamenti della carica totale indotta corrispondente.

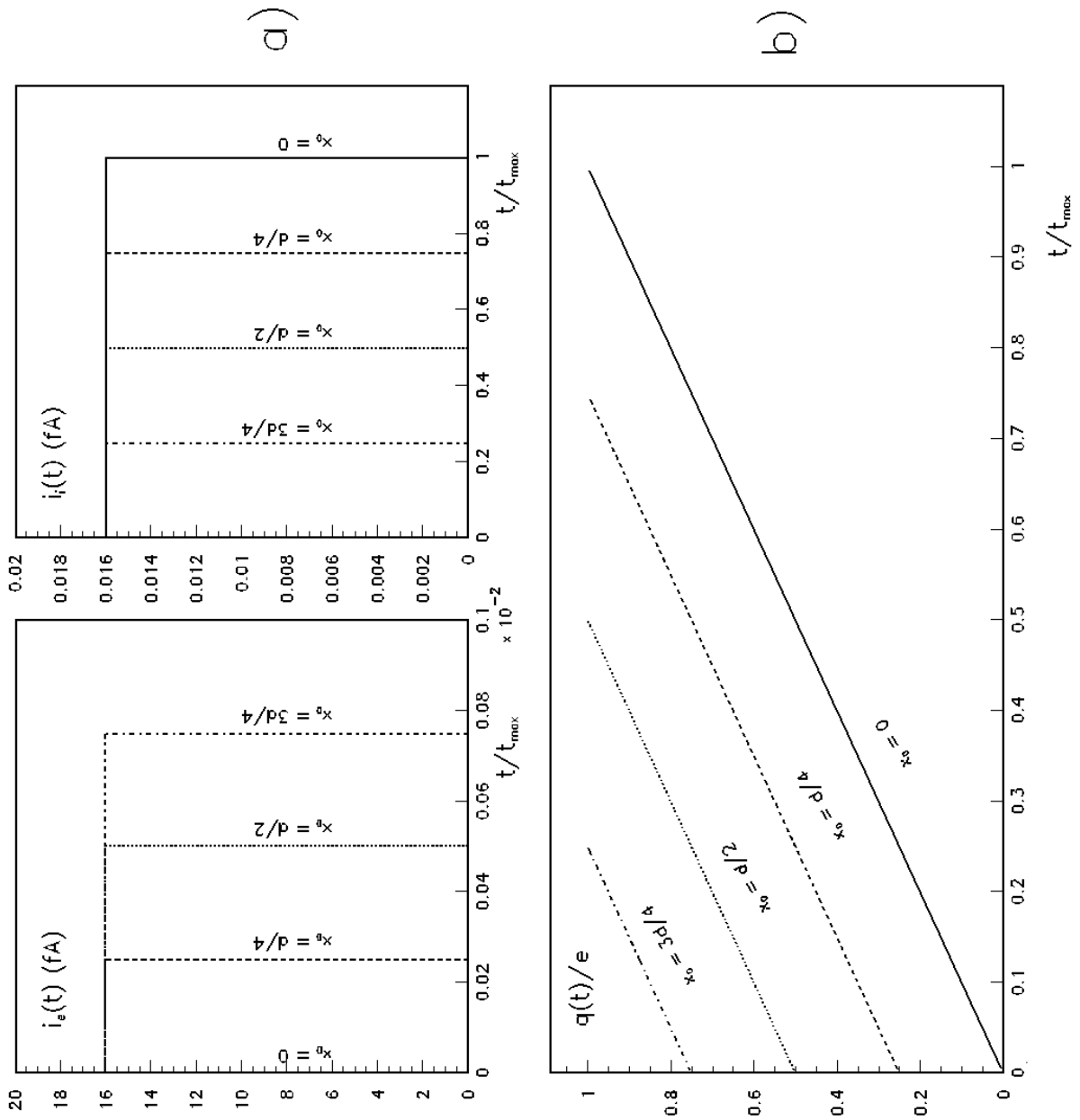


Figura 2.1.2: Correnti elettronica e ionica (parte a) e carica indotta (parte b) nel caso di $d = 1 \text{ cm}$ e $V = 100 \text{ V}$

Da quanto detto a proposito delle mobilità, si evince che di norma, durante il tempo di transito dell'elettrone (x_0/v_e), che si colloca nell'ambito dei microsecondi, predomina la componente di corrente dell'elettrone, mentre nel tempo successivo di raccolta dello ione $(d - x_0)/v_i$, che è nell'ambito dei millisecondi, permane la corrispondente corrente.

Come mostrato nell'esempio di fig.2.1.2, l'andamento della carica raccolta all'anodo in funzione del tempo è quindi approssimativamente una spezzata costituita di due componenti, di pendenza diversa per un fattore circa $10^3 \div 10^4$, l'ampiezza relativa delle quali dipende dalla distanza x_0 dall'elettrodo alla quale si è formata la coppia. In particolare, per valori di x_0 simili a d , il segnale è dovuto al solo moto dell'elettrone e l'impulso di corrente si esaurisce in tempi dell'ordine dei microsecondi, viceversa, per valori di x_0 molto piccoli, il segnale è dovuto al solo moto dello ione e l'impulso di corrente ha durata dell'ordine dei millisecondi.

Basandosi su questi risultati si possono studiare casi più complessi nei quali una particella rilasci nel rivelatore coppie elettrone-ione con densità uniforme (particella al minimo) o variabile (curva di Bragg), e che la traiettoria della particella primaria formi un certo angolo con le linee di forza del campo elettrico. Inoltre è diverso il caso di una particella pesante (traiettoria rettilinea) e di un elettrone (traiettoria spezzata) e ancora diverso quello di una radiazione elettromagnetica (a seconda dell'energia della medesima). Questi risultati sono in parte riportati da Knoll e molti si trovano in letteratura.

2.2 Contatori proporzionali

Sono dei condensatori cilindrici riempiti con differenti tipi di gas a differenti pressioni, a seconda del tipo di utilizzazione. In quasi tutti i casi, il valore tipico delle pressioni è nell'ambito dei $10^2 \div 10^5 Pa$. Nel seguito faremo riferimento a rivelatori di raggi X che operano all'incirca a pressione atmosferica.

I contatori proporzionali sfruttano la dipendenza iperbolica dal raggio del campo elettrico del condensatore cilindrico per ottenere zone, in prossimità dell'elettrodo centrale, nelle quali si possono avere importanti effetti di moltiplicazione delle coppie ione-elettrone.

Un tipico contatore proporzionale per raggi X (per es. Saint Gobain mod. TPX 201-10 Xe: 97% Xe, 3% CO₂, pressione $10^5 Pa$) ha un elettrodo centrale di raggio $r_1 = 25 \mu m$ e raggio interno dell'armatura esterna $r_2 = 1 cm$. Per familiarizzarsi con gli usuali ordini di grandezza dei campi elettrici in gioco facciamo l'esempio di una ddp di 500 V. Si ha:

$$E = V/[r \ln(r_2/r_1)]$$

$$\text{che è massimo per } r = r_1, \quad E(25 \mu m) = (500/6)/25 \cdot 10^{-6} = 3.3 \cdot 10^6 \text{ Vm}^{-1}$$

$$\text{ed è minimo per } r = r_2 : \quad E(1 cm) = (500/6)/10^{-2} = 8.3 \cdot 10^3 \text{ Vm}^{-1}$$

In questi rivelatori l'elettrodo centrale è tenuto positivo e gli elettroni prodotti dalla ionizzazione primaria arrivano in zone di campo elettrico dove possono essi medesimi dar luogo ad ionizzazione: la moltiplicazione inizia quando i campi elettrici sono dell'ordine di 10^6 Vm^{-1} . Il coefficiente di moltiplicazione α (detto anche primo coefficiente di Townsend) aumenta all'aumentare del campo elettrico. Se α fosse costante si avrebbe una moltiplicazione delle coppie (e quindi degli elettroni) del tipo:

$$dn = \alpha n dx \quad \text{e quindi} \quad n = n_0 e^{\alpha x}$$

cioè un accrescimento esponenziale della valanga. Di fatto la moltiplicazione può esse-

re molto più rapida e un singolo elettrone primario può produrne un numero M pari a $10^3 \div 10^6$. Una ragionevole valutazione del coefficiente di moltiplicazione M può essere ottenuta con la formula empirica seguente:

$$\ln M = [V/\ln(r_2/r_1)](\ln 2/\Delta V) \ln [V/pr_1 \ln(r_2/r_1)K] \quad (2.2.1)$$

con V tensione applicata, p pressione del gas, ΔV potenziale di ionizzazione del gas e K una costante tipica del gas pari al valore minimo di E/p per il quale si ha moltiplicazione (per i valori di ΔV e K per differenti gas e miscele vedi Knoll Tab.6.1 pag.173. I parametri di Diethorn per Xe sono $\Delta V \simeq 31.4 V$ e $K \simeq 36.6 Vm^{-1}Pa^{-1}$).

Con i valori dei raggi e della tensione applicata prima riportati si ottiene: $M \simeq 5700$.

Correnti e cariche indotte nei contatori proporzionali

L'ipotesi principale utilizzata per fare i calcoli che seguono è che si studia la risposta ad un elettrone primario che ha liberato la parte preponderante della carica secondaria dopo la moltiplicazione che segue l'ultimo cammino libero medio per urto degli elettroni (si ritiene così di trattare oltre il 90% delle coppie totali create). Le caratteristiche della camera, del gas e il valore della tensione applicata sono quelli già introdotti. Il campo elettrico è supposto uguale a quello degli elettrodi che in prossimità dell'anodo assume i seguenti valori:

$E(25 \mu m) = 12.8 \cdot 10^6 Vm^{-1}$ sulla superficie dell'anodo

$E(35 \mu m) = 9.1 \cdot 10^6 Vm^{-1}$ a $10 \mu m$ di distanza radiale dalla superficie dell'anodo

con un valore medio $\langle E \rangle = 11.0 \cdot 10^6 Vm^{-1}$.

In presenza di un tale campo elettrico medio si può calcolare il libero cammino medio dell'elettrone per avere moltiplicazione:

$$e\Delta V = e \langle E \rangle \langle l \rangle \quad ; \quad \langle l \rangle = \Delta V / \langle E \rangle = 2.8 \mu m$$

Secondo quanto detto si suppone che la carica $\pm Q = \pm Me$ si trovi inizialmente a $\sim 1.5 \mu m$ dall'anodo.

Si possono ora trarre alcune importanti conseguenze basate sul Teorema di Ramo, e per questo si fa riferimento alla fig.2.2.1 dove con r_0 si è indicata la posizione radiale iniziale della carica $\pm Q$ supposta puntiforme.

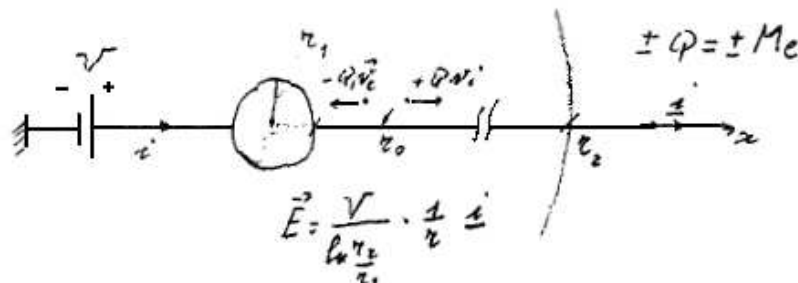


Figura 2.2.1:

Il calcolo della corrente indotta sull'anodo è fatto come di consueto separando il contributo del moto degli elettroni da quello degli ioni.

Per la carica di elettroni $-Q$ si ha ($v_e = \text{costante}$):

$$i_e(t) = (-Q/V)(V/r)[1/\ln(r_2/r_1)] \vec{i} \cdot (-v_e)\vec{i} = (Q/r)v_e[1/\ln(r_2/r_1)] \quad (2.2.2)$$

equazione di moto degli elettroni:

$$r(t) = r_0 - v_e t \quad \text{per } 0 < t < t_e \text{ con } t_e = (r_0 - r_1)/v_e$$

$$\text{segue: } dr = -v_e dt; \quad v_e dt = -dr$$

Gli elettroni fanno un percorso brevissimo e si usa un valore medio di velocità; il loro tempo di transito su $1 \mu m$ può essere determinato conoscendo la mobilità ($\mu_e = 10^3 \mu_i = 10^4 m^2 Pa V^{-1} s^{-1}$), calcolando la velocità ($v_e = 10^4 \cdot 10^7/10^5 = 10^6 m s^{-1}$) e ricavando $t_e = 10^{-6}/10^6 = 1 ps$, ovvero un tempo di raccolta praticamente istantaneo.

Per la carica indotta nell'intervallo di tempo dt si ha

$$dq_e(t) = i_e(t) dt = (Q/r)v_e[1/\ln(r_2/r_1)] dt = -[Q/\ln(r_2/r_1)] (dr/r)$$

$$q_e(t) - q_e(0) = \int_{0,t} i_e(t) dt = - \int_{r_0,r} [Q/\ln(r_2/r_1)] (dr/r) = [Q/\ln(r_2/r_1)] \ln(r_0/r)$$

e la carica totale indotta dagli elettroni è:

$$q_e(\infty) - q_e(0) = [Q/\ln(r_2/r_1)] \ln(r_0/r_1) \quad (2.2.3)$$

Per la carica di ioni Q si ha:

$$i_i(t) = (Q/V)(V/r)[1/\ln(r_2/r_1)] \vec{i} \cdot (v_i)\vec{i} = (Q/r)v_i[1/\ln(r_2/r_1)] \quad (2.2.4)$$

equazione di moto degli ioni:

$$r(t) = r_0 + v_i t \quad \text{per } 0 < t < t_i \text{ con } t_i = (r_2 - r_0)/v_i$$

$$\text{segue: } dr = v_i dt$$

Per la carica indotta nell'intervallo di tempo dt si ha

$$dq_i(t) = i_i(t) dt = (Q/r)v_i[1/\ln(r_2/r_1)] dt = [Q/\ln(r_2/r_1)] (dr/r)$$

$$q_i(t) - q_i(0) = \int_{0,t} i_i(t) dt = \int_{r_0,r} [Q/\ln(r_2/r_1)] (dr/r) = [Q/\ln(r_2/r_1)] \ln(r/r_0)$$

e la carica totale indotta dagli ioni è:

$$q_i(\infty) - q_i(0) = [Q/\ln(r_2/r_1)] \ln(r_2/r_0) \quad (2.2.5)$$

Segue:

$$q_e(\infty) - q_e(0) + q_i(\infty) - q_i(0) = [Q/\ln(r_2/r_1)] \ln(r_0/r_1) + [Q/\ln(r_2/r_1)] \ln(r_2/r_0)$$

ossia:

$$q_e(\infty) + q_i(\infty) = Q$$

Si trova subito che è:

$$q_e(\infty)/Q = [1/\ln(r_2/r_1)] \ln(r_0/r_1) = (\text{con i valori ipotizzati per } r_1, r_2 \text{ e } r_0) = 8.4 \cdot 10^{-3}.$$

Cioè, solo il 1% dell'ampiezza del segnale è dovuto agli elettroni (in tempi dell'ordine dei picosecondi), mentre il 99% è associato al moto degli ioni. E' interessante calcolare il raggio r^* in corrispondenza del quale si forma metà del segnale di ioni:

$$(1/2)[Q/\ln(r_2/r_1)] \ln(r_2/r_0) = [Q/\ln(r_2/r_1)] \ln(r^*/r_0)$$

e quindi:

$$\ln(r_2/r_0)^{1/2} = \ln(r^*/r_0); \quad r^* = r_0(r_2/r_0)^{1/2} \sim 800 \mu m$$

La metà del segnale si forma dopo che gli ioni si sono spostati di $\sim 1 \text{ mm}$.

Per ottenere la corrente dovuta al moto degli ioni in funzione del tempo si osserva che la loro velocità può essere valutata dalla relazione:

$$v_i = \mu(E/p) \text{ con } \mu = 12 \text{ m}^2 \text{PaV}^{-1} \text{s}^{-1}; E = E_0(r_0/r); E_0 = E(26.5 \text{ } \mu\text{m}) = 12 \cdot 10^6 \text{ Vm}^{-1}$$

Posto $v_i = (\mu/p)E_0(r_0/r)$, si ha:

$$dt = dr/v_i = (p/\mu E_0 r_0) r \, dr \text{ e infine:}$$

$$\Delta t = \int_{0,t^*} dt = \int_{r_0,r^*} (p/\mu E_0 r_0) r \, dr = (1/2)(p/\mu E_0 r_0)(r^{*2} - r_0^2)$$

Con $p = 10^5 \text{ Pa}$ si ottiene $\Delta t = 8 \text{ } \mu\text{s}$; per confronto il tempo di attraversamento complessivo degli ioni risulta $\sim 8 \text{ ms}$.

L'ultima equazione, scritta per un generico tempo t a partire dal tempo zero di inizio del moto degli ioni, permette di esprimere la corrente e la carica di ioni in funzione del tempo

$$t = p(r^2 - r_0^2)/2\mu E_0 r_0 \quad (2.2.6)$$

ossia:

$$r^2 = r_0^2 + (2\mu E_0 r_0/p)t \quad (2.2.7)$$

e ancora, più in particolare:

$$t_i = p(r^2 - r_0^2)/2\mu E_0 r_0 \quad \text{e} \quad r_2^2 = r_0^2 + (2\mu E_0 r_0/p)t_i$$

Inoltre. l'equazione (2.2.4) della corrente di ioni, una volta introdotta la velocità $v_i = (\mu E_0 r_0/p)(1/r)$, fornisce:

$$i_i(t)/Q = [\ln(r_2/r_1)]^{-1}(\mu E_0 r_0/p)(1/r^2)$$

e, utilizzando la (2.2.7):

$$\begin{aligned} i_i(t)/Q &= [\ln(r_2/r_1)]^{-1}(\mu E_0 r_0/p)/[r_0^2 + (2\mu E_0 r_0/p)t] = [\ln(r_2/r_1)]^{-1}(\mu E_0/r_0 p)/[1 + (2\mu E_0/r_0 p)t] \\ &= A \frac{1}{1 + t/\tau} \quad (2.2.8) \end{aligned}$$

Nell'esempio numerico la (2.2.8) fornisce $A = 7.85 \cdot 10^6 \text{ As}^{-1}$ e $\tau = 9.2 \text{ ns}$, da cui:

$$i_i(t)/Q = 7.85 \cdot 10^6 / (1 + 1.09 \cdot 10^8 t)$$

Per proseguire l'esempio, si dà una valutazione di Q per un X che produce un fotoelettrone di energia E_x ($\sim 5.9 \text{ keV}$ nel caso della sorgente di ^{55}Fe):

$$Q = (E_x/\varepsilon_{Xe}) \text{ Me}$$

con $\varepsilon_{Xe} = 21.5 \text{ V}$ (Knoll: Table 6.2 pag. 177) si ha:

$$Q = 2.5 \cdot 10^{-13} \text{ C} = 0.25 \text{ pC}$$

e, in definitiva:

$$i_i(t) = 1.96 / (1 + 1.09 \cdot 10^8 t) \text{ } \mu\text{A} \quad \text{per } 0 < t < 8 \text{ ms} \quad (2.2.9)$$

Applicare la (2.2.9) ai tempi brevi, con $\tau \simeq 10 \text{ ns}$, implica una moltiplicazione degli elettroni primari che avviene contemporaneamente e cioè in tempi piccoli rispetto a 10 ns .

Questo non è per niente garantito ed è meglio tenere τ come parametro e aspettarsi valori di τ più lunghi.

Una ulteriore considerazione riguarda il fatto che gli elettroni primari introducono un ritardo dovuto al loro moto di avvicinamento alla zona di moltiplicazione che dipende dal punto di formazione. Per questo motivo, quando la rapidità di risposta sia un rilevante requisito, si scelgono quei gas e quelle miscele (Knoll fig 6.13 pag.184) che consentono, a parità di campo elettrico, la più alta velocità degli elettroni.

Un altro fatto di estremo interesse è che, se le differenze nei tempi di arrivo degli elettroni primari sono trascurabili rispetto al tempo della formazione di una parte significativa del segnale, la forma dei segnali di corrente e di carica che si raccolgono all'anodo è sempre la stessa, ragione per la quale si mantiene proporzionalità fra l'energia rilasciata e l'ampiezza del segnale di carica raccolto anche quando questo venga trattato con costanti di tempo di differenziazione brevi (tipicamente dell'ordine dei microsecondi) rispetto al tempo di transito degli ioni (ovviamente diminuisce l'ampiezza massima del segnale).

Per proseguire l'esempio della rivelazione degli X del ^{55}Fe , si osserva che il contatore proporzionale si comporta, nei riguardi di un integratore di carica (integratore di Miller), come un generatore di corrente di forma tipo (2.2.9) con in parallelo la capacità cilindrica (più quella dei collegamenti) che può essere facilmente misurata. La situazione, nel caso di un preamplificatore di carica tipo 142PC ORTEC, si presenta come mostrato in fig.2.2.2.

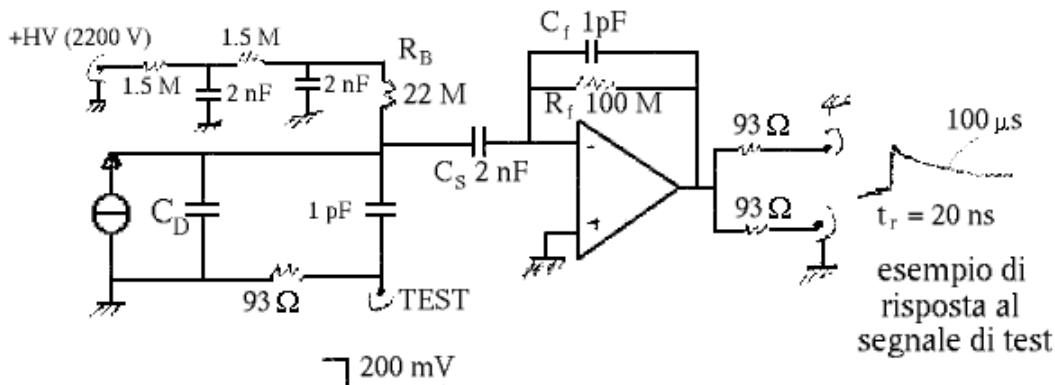


Figura 2.2.2:

Nell'ipotesi di una integrazione perfetta della carica $Q = 0.25 \text{ pC}$ su una capacità $C_f = 1 \text{ pF}$ si avrebbe una tensione di uscita (dovuta praticamente integralmente al moto degli ioni) $V_0 = 250 \text{ mV}$. Siccome l'integratore non è perfetto si tratta la corrente espressa tramite la (2.2.8) con lo schema semplificato mostrato in fig.2.2.3 con i seguenti valori:

$R_B = 22 \text{ M}\Omega$ $C_D = 20 \text{ pF}$ (misurata per rivelatore + cavo di connessione), $C_S = 2 \text{ nF}$, $R_f = 100 \text{ M}\Omega$ $C_f = 1 \text{ pF}$, $\tau = 5 \text{ ns}$, $\tau_f = C_f R_f = 100 \text{ }\mu\text{s}$, $\tau_B = C_D R_B = 440 \text{ }\mu\text{s}$, $\tau^* = (C_S + C_D) R_B = 44.4 \text{ ms}$.

Le funzioni di trasferimento, con riferimento alla fig.2.2.3, sono le seguenti:

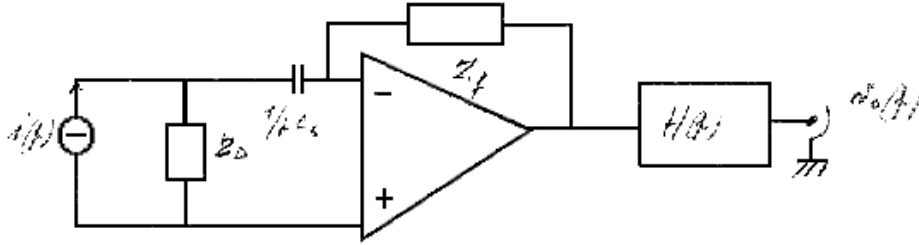


Figura 2.2.3:

$$Z_D = (R_B/pC_D)/(R_B + 1/pC_D) = R_B/(1 + p\tau_B) ; \quad Z_f = (R_f/pC_f)/(R_f + 1/pC_f) = R_f/(1 + p\tau_f)$$

$H(p) = (1 + p\tau)^{-3}$ tiene conto della risposta alla step dell' integratore

$$v_0(p) = -i(p)Z_D Z_f H(p)/(Z_D + 1/pC_S) = -i(p)[pC_S R_B/(1 + p\tau_*)][R_f/(1 + p\tau_f)](1 + p\tau)^{-3}$$

Il risultato del calcolo è mostrato nella fig.2.2.4, assieme alla forma media sperimentale. Le osservazioni sono le seguenti:

- 1) l'ampiezza calcolata differisce del 20% da quella registrata ed è quindi in sostanziale accordo
- 2) la riproduzione dell'andamento temporale delle forme d'onda calcolata e misurata mostra un buon accordo (χ^2 per grado di libertà ~ 1.5)

Tuttavia il tempo caratteristico τ desunto dal fit risulta circa 10 volte maggiore di quello valutato nella (2.2.9). Il valore di τ ottenuto dal fit suggerisce cioè una molteplicità di arrivi di elettroni primari che si svolgono su tempi decisamente superiori al tempo caratteristico τ dell'impulso di corrente generato da ciascun singolo elettrone primario.

Esempio di camera a fili per misure di posizione e tempo di passaggio di ioni pesanti

Superficie attiva: 40 mm · 40 mm

Fili: $r = 10 \mu m$; passo 1 mm

Gap fili-catodo: 3 mm

Gas: eptano (C_7H_{16}); pressione $\sim 3.5 \text{ mbar}$ (350 Pa)

Tensione fili-catodo: 500 V

Moltiplicazione: $\sim 10^3 \div 10^4$

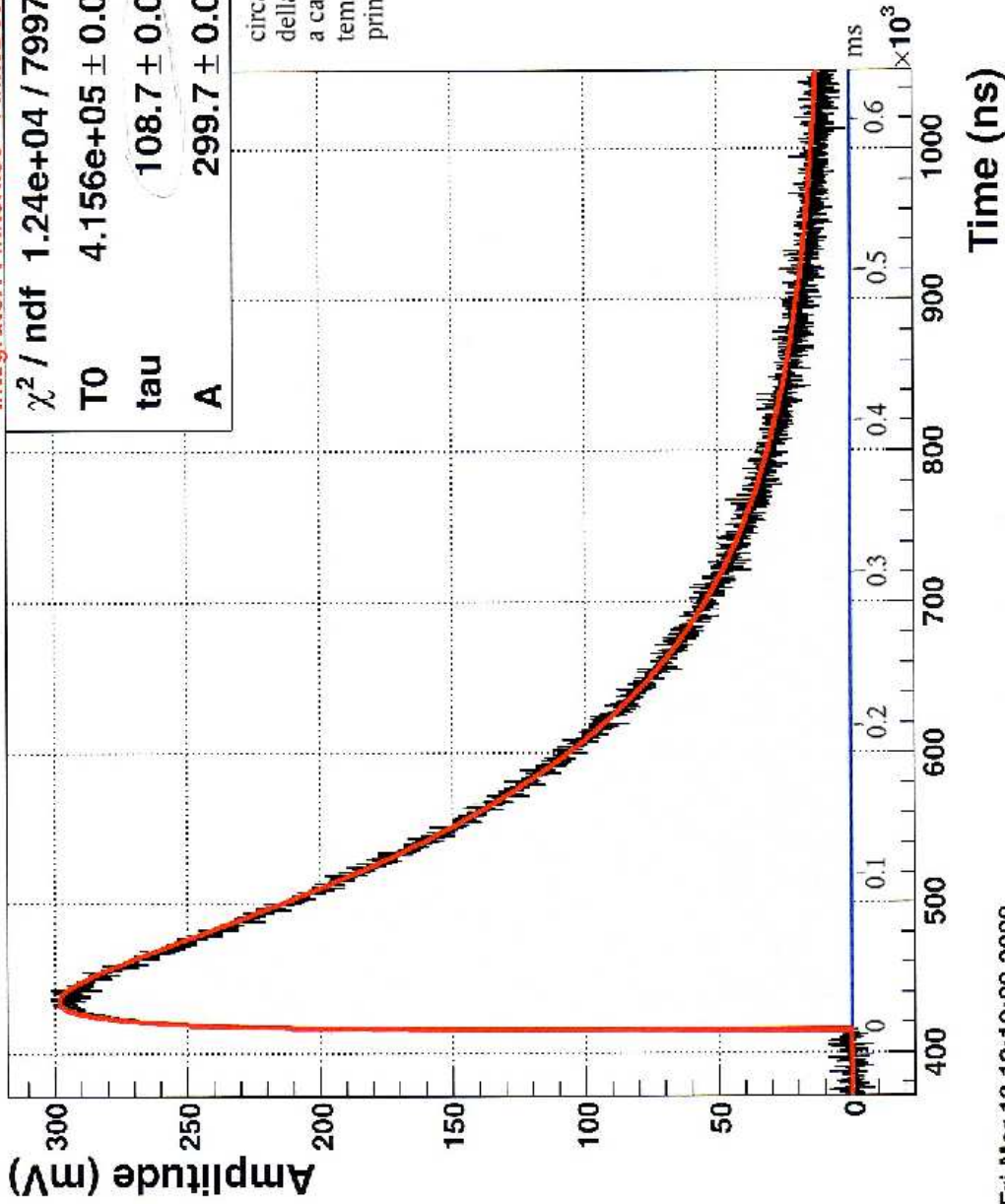
Scope data - [0.00 GS/s]

Current: $1/(1+t/\tau)$

Integrator: FiniteRise - FiniteDecay

χ^2 / ndf	1.24e+04 / 7997
T0	4.156e+05 \pm 0.0
tau	108.7 \pm 0.0
A	299.7 \pm 0.0

circa 10 volte maggiore del τ della formula 2.2.9 (v. testo) a causa della distribuzione dei tempi di arrivo degli elettroni primari



Fri Mar 13 12:19:09 2009

Figura 2.2.4:

3 Rivelatori a semiconduttore planari al Silicio

Per le proprietà del Si e del Ge intrinseci si veda la Tab.11.1, pag.340 di Knoll. Per le velocità di deriva di elettroni e lacune si veda la fig.11.2, pag.341 di Knoll. Sia la tabella che la figura sono riportate per comodità in fondo a queste dispense.

3.1 Giunzioni p-n utilizzate come rivelatori di radiazioni ionizzanti

Nelle considerazioni che seguono si suppone nota la teoria delle bande nei cristalli e il concetto di coppia lacuna-elettrone.

Pur facendo esplicito riferimento ai rivelatori al Silicio, quanto diremo in questo paragrafo e nel successivo si applica anche ai rivelatori al Germanio.

Monocristallo ideale di Silicio puro

Atomi/ cm^3	$5 \cdot 10^{22}$
Densità' intrinseca di portatori (a 300K) cm^{-3}	$1.5 \cdot 10^{10}$
Energia per creare una coppia lacuna-elettrone (a 300 K) eV	3.62
Fattore di Fano medio	0.12

Ripetiamo in forma esplicita il dato della densità dei portatori di carica Silicio a temperatura ambiente:

$$n_i(300K) = p_i(300K) = 1.5 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$$

Monocristallo ideale di Silicio drogato

tipo n: in questo caso i droganti sono atomi sostituzionali del quinto gruppo (Ph, As, atomi donatori in numero di N_D per cm^3) che introducono livelli locali di energia nella banda proibita appena sotto il bordo inferiore della banda di conduzione. Dal punto di vista energetico questi livelli si comportano come una estensione della banda di conduzione in quanto a temperatura ambiente l'elettrone in più passa per effetto termico negli stati permessi e praticamente vuoti (a parte che per i pochi elettroni causati dalla rottura dei legami covalenti del monocristallo per effetto termico) della banda di conduzione del monocristallo; in altri termini, l'elettrone in più è permanentemente slegato dal suo atomo che perciò prende il nome di donatore. Il materiale acquista una conducibilità per elettroni e si dice di tipo n. In questa situazione si ha un numero n_n di elettroni per unità di volume in banda di conduzione uguale al numero degli atomi donatori:

$$n_n = N_D$$

Vale la legge di azione di massa (a temperatura ambiente)

$$n_n p_n = n_i p_i = 2.25 \cdot 10^{20} \text{ cm}^{-6}$$

Una concentrazione di donatori (Ph, As) di $5 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ (in numero: una parte per milione) provoca la seguente situazione:

$$n_n = 5 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}, p_n = 4.5 \cdot 10^3 \text{ cm}^{-3}$$

n_n elettroni nel materiale di tipo n: portatori di maggioranza (in numero pari agli atomi

donatori)

p_n lacune nel materiale di tipo n: portatori di minoranza (fortemente sopresse rispetto al caso intrinseco).

Nel materiale di tipo n (avendo lacune ed elettroni mobilità di deriva e velocità simili) la conduzione è assicurata dagli elettroni, portatori di maggioranza.

tipo p: in questo caso i droganti sono atomi sostituzionali del terzo gruppo (B, Al, atomi accettori in numero di N_A per cm^3) che introducono livelli locali di energia nella banda proibita appena sopra il bordo superiore della banda di valenza. Dal punto di vista energetico, a temperatura ambiente questi livelli si comportano come una estensione della banda di valenza in quanto a temperatura ambiente elettroni dei legami covalenti del monocristallo passano per effetto termico negli stati permessi introdotti da tali atomi (che perciò prendono il nome di atomi accettori) e ivi permangono con una stabilità praticamente identica a quella dei legami covalenti del monocristallo; in altri termini, l'atomo accettore lega stabilmente a sé un elettrone e mette una lacuna a disposizione del cristallo. Tale lacuna si sposta "liberamente" attraverso il cristallo intrappolando via via, nel suo percorso, elettroni dai legami covalenti vicini, dei quali, con la sua presenza, favorisce la rottura. Il materiale acquista una conducibilità per lacune e si dice di tipo p. In questa situazione si ha un numero p_p di lacune per unità di volume in banda di valenza uguale al numero degli atomi accettori:

$$p_p = N_A$$

Vale la legge di azione di massa (a temperatura ambiente)

$$p_p n_p = n_i p_i = 2.25 \cdot 10^{20} \text{ cm}^{-6}$$

Una concentrazione di accettori (B, Al) di $5 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ (in numero: una parte per milione) provoca la seguente situazione:

$$p_p = 5 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}, n_p = 4.5 \cdot 10^3 \text{ cm}^{-3}$$

p_p lacune nel materiale di tipo p: portatori di maggioranza (in numero pari agli atomi accettori)

n_p elettroni nel materiale di tipo p: portatori di minoranza (fortemente soppressi rispetto al caso intrinseco).

Nel materiale di tipo p, avendo lacune ed elettroni mobilità di deriva simili, la conduzione è assicurata dalle lacune, portatori di maggioranza.

Giunzioni p-n asimmetriche

Nella fig.3.1.1 è riportato un caso esemplificativo di drogaggio di Silicio di tipo p e di tipo n utilizzato per realizzare una giunzione asimmetrica.

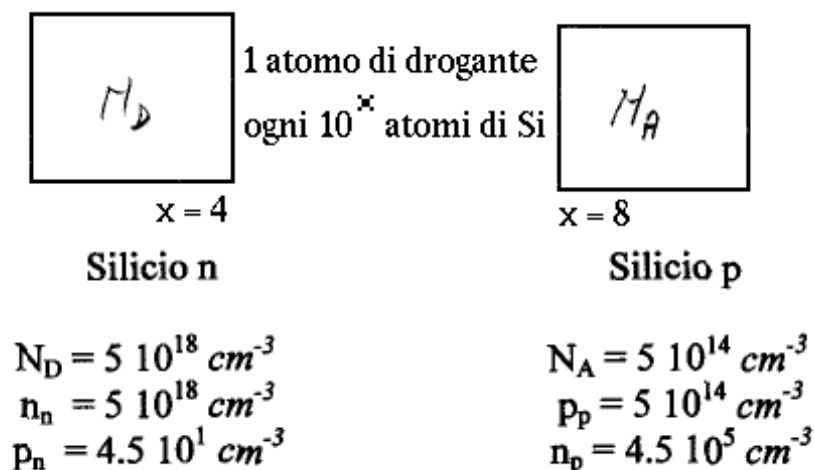


Figura 3.1.1:

La regione di barriera fra tali materiali (detta anche zona di svuotamento), per la conservazione della carica elettrica, si sviluppa nella zona di tipo p, come mostra (con scale non realistiche) la fig.3.1.2.

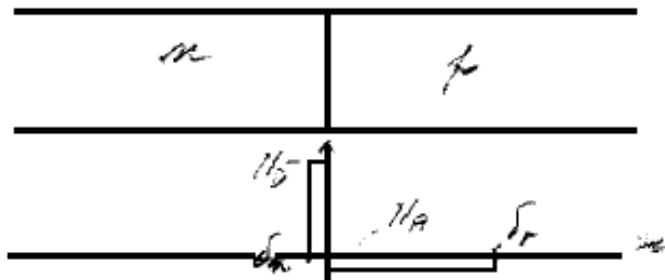


Figura 3.1.2:

Polarizzazione diretta

Analizziamo ora il caso che la giunzione sia polarizzata in maniera diretta. Come mostrato in fig.3.1.3, la corrente è portata dai portatori di maggioranza e siccome le mobilità dei due tipi di portatori sono simili e nel caso dell'esempio gli elettroni del materiale di tipo n sono diecimila volte più numerosi delle lacune del materiale di tipo p, segue che a 10 mA di corrente di elettroni corrisponde una corrente di lacune di 1 μA .

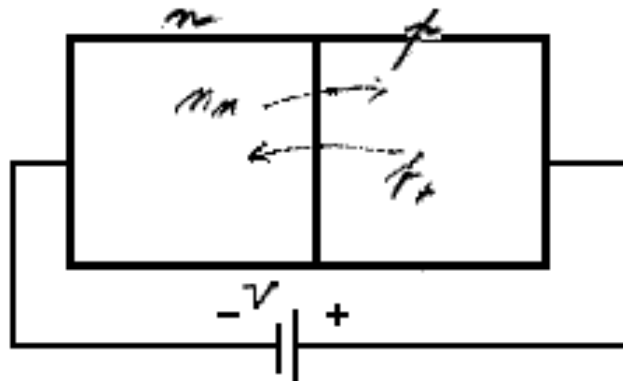


Figura 3.1.3:

Polarizzazione inversa

Nella fig.3.1.4 è mostrato il caso di polarizzazione inversa. La corrente è portata dai portatori di minoranza e siccome gli elettroni del materiale di tipo p sono diecimila volte più numerosi delle lacune del materiale di tipo n si ha che a 10 nA di corrente inversa di elettroni corrisponde una corrente inversa di lacune di 1 pA .

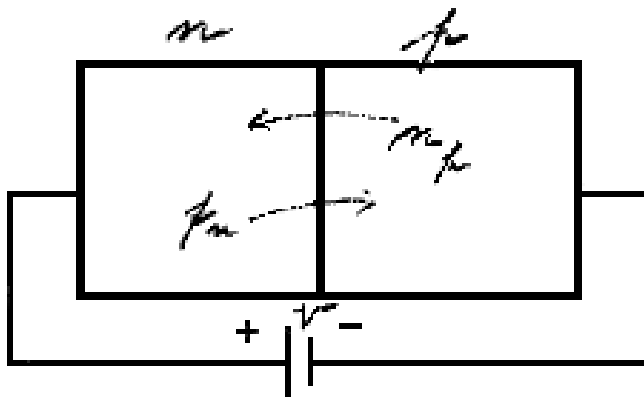


Figura 3.1.4:

Nelle giunzioni p-n utilizzate come rivelatori, la tensione di polarizzazione è inversa e si trova quindi che il valore della corrente inversa è collegato al drogaggio del materiale meno drogato.

Poiché una parte del rumore elettrico è determinato dalle fluttuazioni della corrente inversa del rivelatore e siccome, d'altronde, la condizione di ampia zona di svuotamento (per avere un grande volume sensibile del rivelatore) suggerisce che almeno una delle due zone sia poco o pochissimo drogata, è invalsa la tecnica che subito discuteremo.

Indicheremo con la notazione n^+ , p^+ materiali fortemente drogati ($N_D^+, N_A^+ = 10^{19} \div 10^{20}\text{ cm}^{-3}$), e indicheremo con la notazione ν , π materiali con drogaggio debolissimo ($N_D^\nu, N_A^\pi \leq 10^{12}\text{ cm}^{-3}$).

Siccome i materiali n^+ , p^+ sono praticamente privi di portatori di carica minoritari si realizzano le giunzioni nelle forme mostrate in fig.3.1.5.

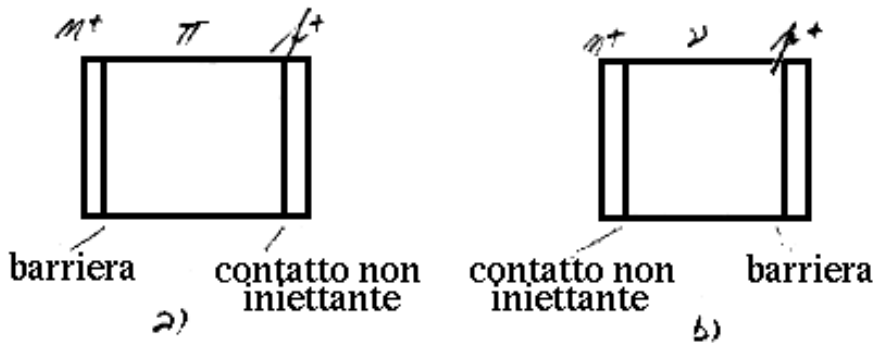


Figura 3.1.5:

Con riferimento alla parte a) della figura, la barriera n^+ π si sviluppa nel materiale π che costituisce il *bulk* del rivelatore mentre la corrente inversa è trascurabile perché la zona p^+ costituisce un contatto non iniettante portatori di carica minoritari (in confronto con il materiale π).

C'è inoltre un notevole vantaggio che sarà subito discusso a proposito dei contatti ohmici, perché tali contatti sono più facilmente realizzabili su materiali semiconduttori fortemente drogati.

3.2 Contatti ohmici. Distribuzioni di carica e campi elettrici

Contatti ohmici

Un contatto, in corrispondenza del quale non si hanno effetti rettificanti e più in generale non-lineari, prende il nome di "contatto ohmico".

Nel caso di rivelatori a semiconduttore, che sono diodi a giunzione p-n di grande area, il termine contatto ohmico è utilizzato per indicare quei contatti che permettono ai portatori di carica di spostarsi liberamente, entrando ed uscendo dal dispositivo senza interferire con il suo modo di operare. E' molto difficile realizzare contatti che non presentino alcun tipo di barriera alla superficie di contatto, ma fortunatamente si riescono a ottenere, senza eccessiva difficoltà, contatti dal comportamento sostanzialmente ohmico non interferente con il funzionamento del rivelatore. Un metodo semplice, e utilizzato tutte le volte che è possibile, per fare piccola la resistenza del contatto è quello di farne grande la superficie. Inoltre, un semplice modello di giunzione, un poco idealizzato, suggerisce che sia possibile ottenere un contatto ohmico scegliendo opportunamente i potenziali di estrazione degli elettroni del metallo e del semiconduttore. Secondo tale modello, nel caso di un semiconduttore di tipo n, per avere un contatto ohmico si richiede che il metallo abbia un potenziale di estrazione minore di quello del semiconduttore, mentre l'opposto deve accadere se il semiconduttore è di tipo p. Sfortunatamente questa ricetta non trova riscontro nella pratica e sperimentalmente si trova che quasi tutti i metalli formano contatti rettificanti con i semiconduttori tutte le volte che la superficie del semiconduttore è in buono

stato, mentre quasi tutti i metalli formano contatti ohmici con gli stessi semiconduttori quando la superficie del semiconduttore è “danneggiata”. In altri termini, è la condizione chimico-fisica delle superfici, piuttosto che la scelta dei materiali, a determinare le proprietà elettriche del contatto. Alcune sperimentate tecniche di pulimentatura, di attacco chimico, di saldatura etc. sono in grado di fornire il risultato voluto. Quasi tutti i contatti ohmici realizzati “danneggiando” la superficie del semiconduttore distruggono localmente la struttura a bande e devono il loro carattere al fatto che in tali zone le possibilità di ricombinazione delle lacune e degli elettroni sono talmente grandi da avere il sopravvento su un qualunque effetto di barriera. La struttura a bande di una superficie lavorata meccanicamente e successivamente pulimentata può essere localmente molto modificata, come mostrato nella fig.3.2.1. Si vede che in questo modo sia elettroni che lacune sono in grado di muoversi liberamente e di ricombinarsi nella zona di barriera perché si è creato nella banda proibita un enorme numero (quasi un continuo) di stati energetici locali permessi.

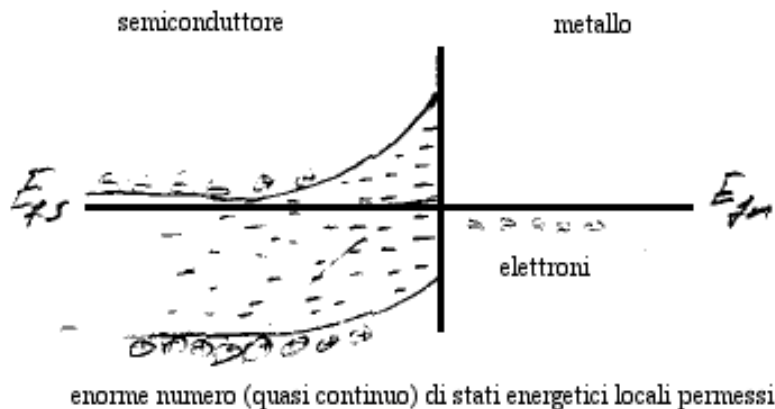


Figura 3.2.1:

Un altro consolidato risultato sperimentale è che la saldatura alla superficie del semiconduttore eseguita con lo stesso metallo utilizzato per drogarlo risulta sempre in un contatto ohmico di ottima qualità, in particolare se il semiconduttore è stato fortemente drogato in superficie. In questi casi non si può escludere la presenza di barriere, che diventano però talmente sottili da essere “liberamente” attraversate per effetto tunnel.

Distribuzioni di carica e campi elettrici

Iniziamo presentando le distribuzioni di carica e i campi elettrici in un condensatore a facce piane e parallele in vuoto e con elettrodi metallici (Cu, Al). I portatori di carica (elettroni di conduzione) sono $\sim 10^{23} \text{ cm}^{-3}$. Nella fig.3.2.2 sono riportate schematicamente le distribuzioni di carica (per semplicità supposte uniformi) ed i campi elettrici che nelle distribuzioni di carica uniformi risultano funzioni lineari dell'ascissa. Si fa notare a questo proposito che la cosa importante non è la precisa distribuzione di carica e la forma precisa del campo elettrico, quanto piuttosto il fatto che sia le distribuzioni di carica che i campi elettrici si esauriscano nei conduttori su distanze dell'ordine di pochi *Angstrom*.

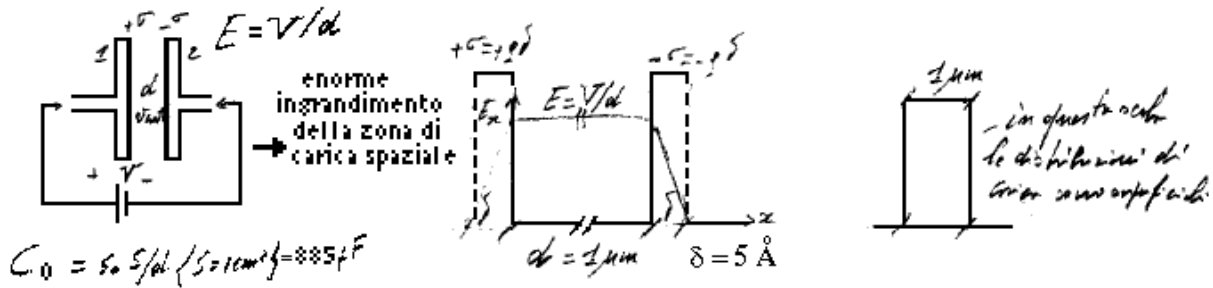


Figura 3.2.2:

Nella fig.3.2.3 è riportata la stessa situazione della fig.3.2.2 salvo il fatto che ora fra le armature del condensatore è presente, come dielettrico, Silicio puro. Rispetto al caso precedente niente cambia salvo il diverso valore della densità di volume degli elettroni in corrispondenza della superficie dei conduttori per compensare la presenza della carica di polarizzazione superficiale dovuta alla presenza del dielettrico (supposto omogeneo e isotropo).

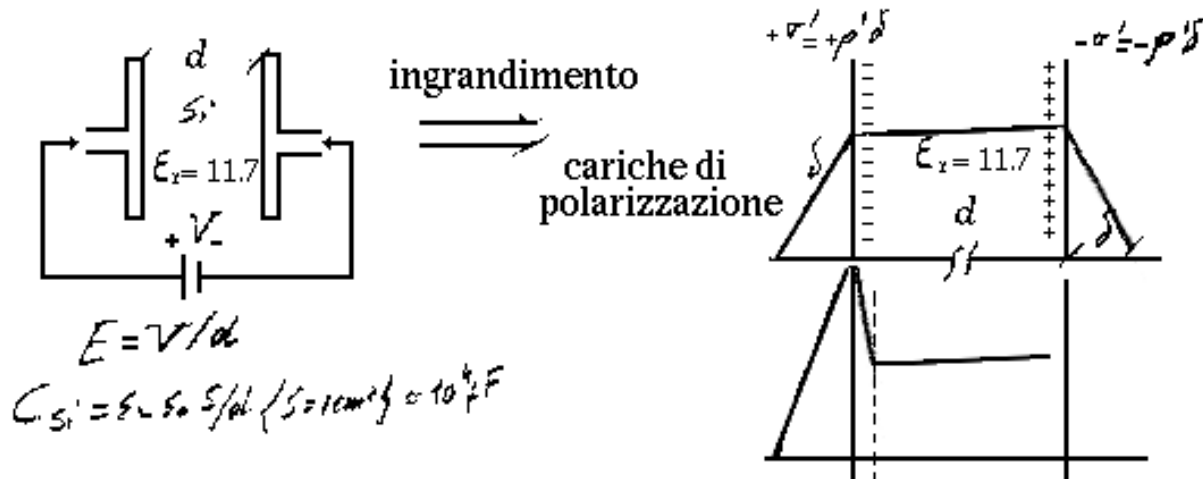


Figura 3.2.3: Nella figura superiore di destra sono stati trascurati i campi di doppio strato provocati dalla polarizzazione del dielettrico (vedi fig. inferiore) perché, svolgendosi in distanze atomiche, risultano trasparenti per effetto tunnel

Presentiamo ora il caso di una giunzione n⁺-p-p⁺ con drogaggi fortemente asimmetrici, come mostrato nella fig.3.2.4.

Le distribuzioni di carica e i campi elettrici sono riportati in funzione dell'ascissa per i seguenti tre casi:

- 1) "svuotamento parziale (partial depletion)" tensione applicata $V < V_d$,
- 2) "svuotamento completo (full depletion)" tensione applicata $V = V_d$,
- 3) "sovrasvuotamento (over depletion)" tensione applicata $V > V_d$.

Nel caso di sovrasvuotamento sono riportate anche le espressioni analitiche dei campi e la verifica delle condizioni di neutralità elettrica.

Infine, nella fig.3.2.5 è riportato il caso dei rivelatori Si(Li) planari, utilizzati per la misura dei raggi X, che mostrano una situazione analoga a quella del condensatore piano.

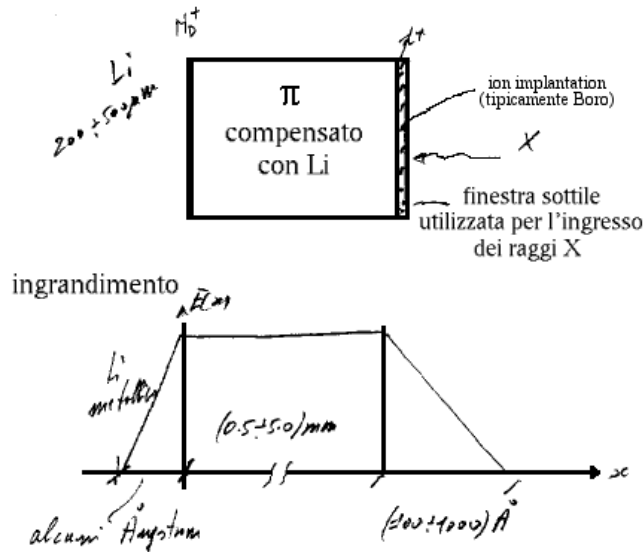


Figura 3.2.5:

3.3 Rivelatori Si(Li) (rivelazione di X)

In questo caso, se si fa l'ipotesi di compensazione perfetta, la densità statica di carica di volume è nulla. Facendo riferimento alla fig.3.3.1, si osserva che sotto l'azione di una qualunque tensione di polarizzazione V il diodo è completamente svuotato e il campo è ovunque costante e pari a V/d con d distanza fra gli elettrodi n^+ e p^+ (gli strati n^+ e p^+ si comportano come gli elettrodi metallici di un condensatore a facce piane e parallele).

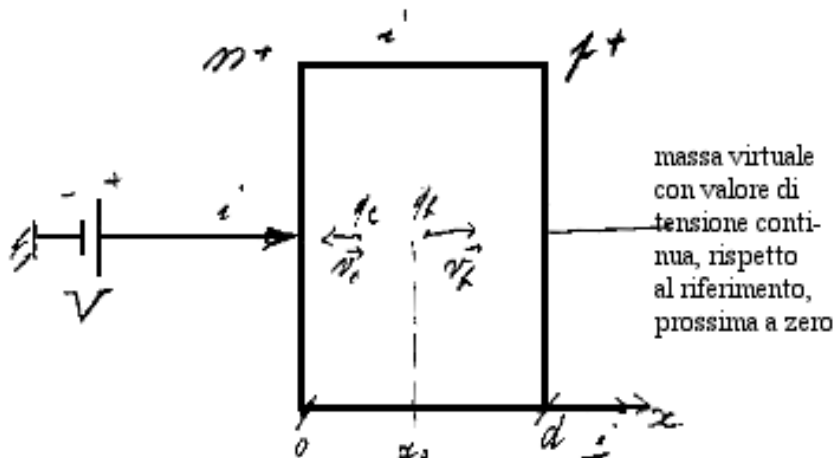


Figura 3.3.1:

La forma dei segnali di corrente e di carica (o di tensione all'uscita di un integratore di Miller), per una coppia lacuna-elettrone generata a distanza x_0 dall'elettrodo n^+ , si ottiene, come di consueto, con il Teorema di Ramo.

Con i campi tipici dei rivelatori ORTEC e CANBERRA ($V/d \sim 2000 \text{ Vcm}^{-1}$) e alla temperatura di 78 K (LN_2), si ha che le velocità degli elettroni e delle lacune sono praticamente saturate attorno ai valori: $v_e = 9 \cdot 10^7 \text{ mm s}^{-1}$ e $v_h = 5 \cdot 10^7 \text{ mm s}^{-1}$, quindi si ha un moto di lacune a velocità costante per un tempo $t_h = (d - x_0)/v_h$, e un moto di elettroni a velocità costante per un tempo $t_e = x_0/v_e$. Si desume pertanto che in un rivelatore di 1 mm di spessore sia:

$$t_{e \text{ max}} = 1/9 \cdot 10^7 \simeq 11 \text{ ns} \quad ; \quad t_{h \text{ max}} \simeq 20 \text{ ns}$$

e in un rivelatore di 5 mm di spessore:

$$t_{e \text{ max}} = 50 \div 60 \text{ ns} \quad ; \quad t_{h \text{ max}} \simeq 100 \text{ ns}$$

Siccome anche in questo caso, il campo elettrico degli elettrodi è $\vec{E} = (V/d) \vec{i}$, per la carica integrata, per tempi t minori di t_e e t_h , si ha (il caso è del tutto analogo a quello della camera di ionizzazione):

$$q(t) = q_e(t) + q_h(t) = (e/d)(v_e t + v_h t)$$

Per tutte le considerazioni successive si può fare riferimento a Knoll (pag.404-405) perché il suo risultato coincide casualmente (perché la densità di carica di volume è nulla) con quello del Teorema di Ramo.

Da un punto di vista pratico, le forme qui discusse valgono direttamente per la PIXE perché domina l'effetto fotoelettrico e un fotoelettrone di 20 keV ha un range in Silicio dell'ordine di $10 \mu\text{m}$.

Si osservi infine che, nel caso della PIXE per quanto i tempi di collezione possano essere relativamente lunghi ($50 \div 100 \text{ ns}$), i preamplificatori associati sono di norma più lenti e per molti di essi i segnali di uscita si presentano di forma costante con tempi di salita di $200 \div 300 \text{ ns}$ determinati dal preamplificatore.

Per valutare gli effetti si può impropriamente utilizzare la legge di composizione quadratica dei tempi di salita (anche se le forme non sono esponenziali). Si vede allora che anche nel caso estremo $t_{h \text{ max}} = 100 \text{ ns}$ e $t_{e \text{ elettronica}} = 200 \text{ ns}$ si ha:

$$t_{\text{totale}} \simeq \sqrt{100^2 + 200^2} \text{ ns} = 230 \text{ ns}$$

e cioè una debole dispersione dei tempi di salita dominata dagli effetti elettronici. Nel caso usuale di $t_{e \text{ elettronica}} = 300 \text{ ns}$ si ha $t_{\text{totale}} = 316 \text{ ns}$.

3.4 Rivelatori con densità di carica di volume costante

Facendo riferimento alla fig.3.4.1, studiamo il campo elettrico in un rivelatore planare con densità di carica di volume costante.

Per fare un caso realistico ci riferiremo ai seguenti valori:

concentrazione massima residua di impurezze: $n(x) = n = 10^{10} \text{ cm}^{-3} = 10^{16} \text{ m}^{-3}$

densità di carica di impurezze: $p(x) = p = 1.6 \cdot 10^{-3} \text{ Cm}^{-3}$

spessore: $d = 5 \text{ mm} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$

costante dielettrica: $\varepsilon = \varepsilon_{rSi} \varepsilon_0 = 10^{-10} \text{ Fm}^{-1}$, $\varepsilon_{rSi} = 11.7$

tensione di polarizzazione: $V = 1000 \text{ V}$

campo elettrico di perfetta compensazione: $V/d = 2 \cdot 10^5 \text{ Vm}^{-1}$

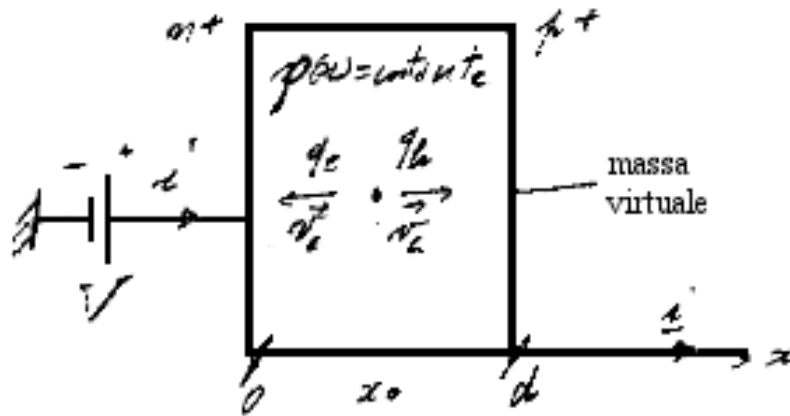


Figura 3.4.1:

Determiniamo il campo elettrico, che risulta funzione lineare della x , a partire dall'equazione unidimensionale della divergenza del campo elettrico:

$$\partial E / \partial x = \rho / \epsilon; \quad dE = (\rho / \epsilon) dx; \quad E(x) - E(0) = (\rho / \epsilon) x; \quad E(x) = E(0) + (\rho / \epsilon) x$$

Per integrazione determiniamo quindi il potenziale, che risulterà funzione quadratica della x :

$$V(x) - V(0) = - \int_{0,x} E(0) dx - (\rho / \epsilon) \int_{0,x} x dx = -E(0) x - (1/2)(\rho / \epsilon) x^2$$

Introduciamo le condizioni ai limiti:

per $x = 0$ si ha $V(0) = V$

per $x = d$ si ha $V(d) = 0$ e quindi: $0 = V - E(0) d - (1/2)(\rho / \epsilon) d^2$, ne segue:

$$E(0) = V/d - (1/2)(\rho / \epsilon) d$$

$$E(x) = V/d - (1/2)(\rho / \epsilon) d + (\rho / \epsilon) x$$

$$E(d) = V/d - (1/2)(\rho / \epsilon) d + (\rho / \epsilon) d = V/d + (1/2)(\rho / \epsilon) d$$

Tenuto conto che, con i dati di partenza si ha:

$$V/d = 2 \cdot 10^5 \text{ Vm}^{-1} \text{ e } (1/2)(\rho / \epsilon) d = 0.4 \cdot 10^5 \text{ Vm}^{-1},$$

si possono trarre le seguenti conclusioni:

- se $\rho > 0$: $E(0) = 1.6 \cdot 10^5 \text{ Vm}^{-1}$ e $E(d) = 2.4 \cdot 10^5 \text{ Vm}^{-1}$ materiale ν (debolmente di tipo n, come in fig.3.4.1)
- se $\rho < 0$: $E(0) = 2.4 \cdot 10^5 \text{ Vm}^{-1}$ e $E(d) = 1.6 \cdot 10^5 \text{ Vm}^{-1}$ materiale π (debolmente di tipo p)
- se $\rho = 0$: $E = V/d = 2 \cdot 10^5 \text{ Vm}^{-1}$

Dai dati di Ottaviani et al., riportati da Knoll, si desume che in questo esempio sia le lacune che gli elettroni hanno i valori di saturazione per le loro velocità e quindi i risultati per le forme di corrente sono uguali al caso di compensazione perfetta. La conseguenza è che le forme dei segnali sono identiche a quelle del rivelatore intrinseco.

Resistività e drogaggio numerico

$$\rho_R = \frac{1}{ne\mu} \Omega m \text{ con } n \text{ in } m^{-3} \text{ e } \mu \text{ in } m^2 V^{-1} s^{-1}$$

Dato ρ_R segue:

per Silicio “n”: $N_D^+ = n = \frac{1}{\rho_R e \mu_e}$ (con $\mu_e(300 K) = 0.135 m^2 V^{-1} s^{-1}$) densità numerica di ioni positivi

per Silicio “p”: $N_A^- = p = \frac{1}{\rho_R e \mu_h}$ (con $\mu_h(300 K) = 0.048 m^2 V^{-1} s^{-1}$) densità numerica di ioni negativi

Si ottengono i seguenti valori:

Resistività ρ_R $k\Omega cm$	Si-n $N_D^+ (cm^{-3})$	Si-p $N_A^- (cm^{-3})$
1	$4.63 \cdot 10^{12}$	$1.3 \cdot 10^{13}$
10	$4.63 \cdot 10^{11}$	$1.3 \cdot 10^{12}$
20	$2.31 \cdot 10^{11}$	$6.5 \cdot 10^{11}$
100	$4.63 \cdot 10^{10}$	$1.3 \cdot 10^{11}$

Esempi

1. Giunzione $p^+ \nu n^+$

$$\rho_R = 10 k\Omega cm \rightarrow N_D^+ \sim 5 \cdot 10^{17} m^{-3}; \rho = N_D^+ e = +8 \cdot 10^{-2} Cm^{-3}$$

$$\varepsilon_{Si} = \varepsilon_{rSi} \varepsilon_0 = 11.7 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} Fm^{-1} = 1.036 \cdot 10^{-10} Fm^{-1}$$

$$d = 500 \mu m = 5 \cdot 10^{-4} m \quad V = 100 V$$

$$E(0) = V/d - (1/2) (\rho/\varepsilon)d = 2 \cdot 10^5 - 2 \cdot 10^5 = 0 Vm^{-1}$$

$$E(d) = V/d + (1/2) (\rho/\varepsilon)d = 2 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^5 = 4 \cdot 10^5 Vm^{-1}$$

100 V è la tensione di svuotamento di questo rivelatore

2. Giunzione $n^+ \pi p^+$

$$\rho_R = 20 k\Omega cm \rightarrow N_A^- \sim 6.5 \cdot 10^{17} m^{-3}; \rho = -N_A^- e = -10.4 \cdot 10^{-2} Cm^{-3}$$

$$d = 300 \mu m = 3 \cdot 10^{-4} m \quad V = 70 V$$

$$E(0) = V/d - (1/2) (\rho/\varepsilon)d = 2.33 \cdot 10^5 + 1.56 \cdot 10^5 = 3.89 \cdot 10^5 Vm^{-1}$$

$$E(d) = V/d + (1/2) (\rho/\varepsilon)d = 2.33 \cdot 10^5 - 1.56 \cdot 10^5 = 0.77 \cdot 10^5 Vm^{-1}$$

$$E(x) = V/d + (1/2) (\rho/\varepsilon)d - (\rho/\varepsilon)x = 3.89 \cdot 10^5 - 1.04 \cdot 10^9 x Vm^{-1}$$

Rivelatori Surface Barrier (ORTEC) (Au Si O₂) $p^+ - \nu - n^+$ (Al)

Rivelatori PIN ($p^+ - \nu - n^+$)(Hamamatsu)

Concentrazione numerica di impurezze: N_D^+

Densità di carica positiva di impurezze: $\rho(n) = +\rho = eN_D^+$

Costante dielettrica $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 \simeq 10^{-10} Fm^{-1}$

Determinazione del campo elettrico

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\rho}{\varepsilon} \rightarrow E(x) = E(0) + \frac{\rho}{\varepsilon} x \rightarrow V(x) = V(0) - E(0) x - \frac{1}{2} \frac{\rho}{\varepsilon} x^2$$

Imponendo le condizioni al contorno $V(0) = 0$ e $V(d) = V$ si ricava infine:

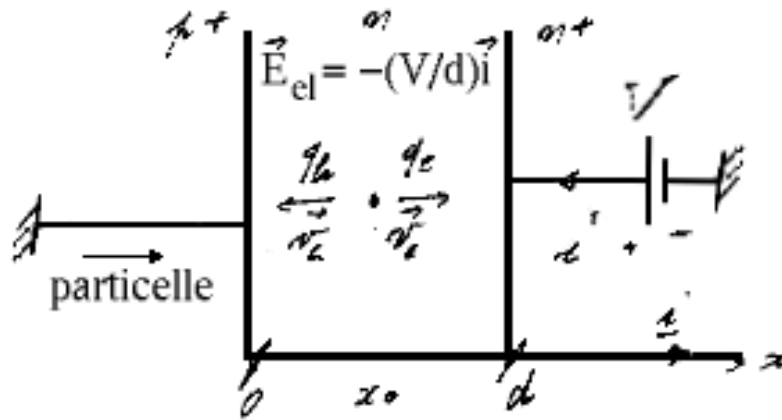


Figura 3.4.2:

$$E(x) = \left(-\frac{V}{d} - \frac{1}{2}\frac{\rho}{\epsilon}d\right) + \frac{\rho}{\epsilon}x = a + bx \quad \text{con} \quad a = -\frac{V}{d} - \frac{1}{2}\frac{\rho}{\epsilon}d \quad \text{e} \quad b = \frac{\rho}{\epsilon}$$

L'andamento del campo elettrico E in funzione di x è mostrato in fig.3.4.3.

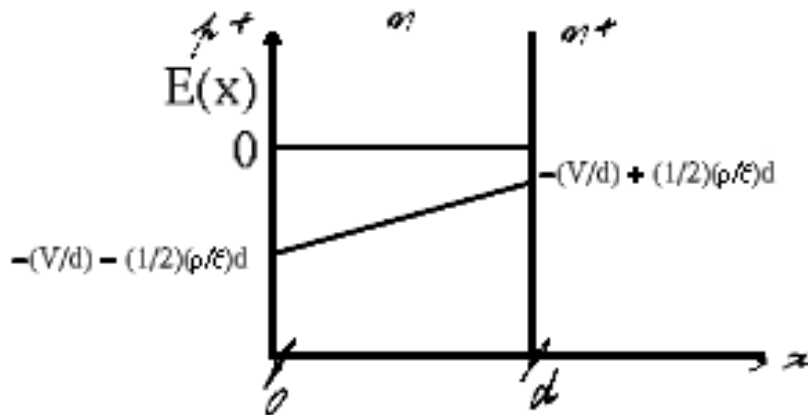


Figura 3.4.3:

Elettroni

$$dt = \frac{dx}{v_e} = \frac{dx}{-\mu_e(a + bx)} = \frac{1}{-\mu_e b} \frac{d(a + bx)}{a + bx} = -\tau_e \frac{d(a + bx)}{a + bx} \quad \text{con} \quad \tau_e = \frac{1}{-\mu_e b}$$

$$\int_0^{t_e} dt = t_e = -\tau_e \int_{a+bx_0}^{a+bx} \frac{dy}{y} = -\tau_e \ln \frac{a + bx}{a + bx_0} \quad \rightarrow \quad e^{-\frac{t}{\tau_e}} = \frac{a + bx_0}{a + bx} \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{b}(a + bx_0)e^{-\frac{t}{\tau_e}}$$

$$i_e(t) = \frac{1}{V}(-e)(v_e \vec{i}) \cdot \left(-\frac{V}{d} \vec{i}\right) = \frac{e}{d} v_e = -\frac{e}{d} \mu_e (a + bx_0) e^{-\frac{t}{\tau_e}} \quad \text{per } 0 < t < \tau_e \ln \frac{a + bx_0}{a + bd}$$

$$q_e(t) - q_e(0) = \int_0^t i_e(t) dt = -\frac{e}{d} \mu_e (a + bx_0) \tau_e \int_0^{\frac{t}{\tau_e}} e^{-\frac{t}{\tau_e}} d\frac{t}{\tau_e} = \left[-\frac{e}{bd}(a + bx_0)\right] [1 - e^{-\frac{t}{\tau_e}}]$$

Lacune

$$dt = \frac{dx}{v_h} = \frac{dx}{\mu_h(a + bx)} = \frac{1}{\mu_h b} \frac{d(a + bx)}{a + bx} = \tau_h \frac{d(a + bx)}{a + bx} \quad \text{con } \tau_h = \frac{1}{\mu_h b}$$

$$\int_0^{t_h} dt = t_h = \tau_h \int_{a+bx_0}^{a+bx} \frac{dy}{y} = \tau_h \ln \frac{a + bx}{a + bx_0} \quad \rightarrow \quad e^{\frac{t}{\tau_h}} = \frac{a + bx}{a + bx_0} \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{b}(a + bx_0) e^{\frac{t}{\tau_h} - \frac{a}{b}}$$

$$i_h(t) = \frac{1}{V}(e)(-v_h \vec{i}) \cdot \left(-\frac{V}{d} \vec{i}\right) = \frac{e}{d} v_h = -\frac{e}{d} \mu_h (a + bx_0) e^{-\frac{t}{\tau_h}} \quad \text{per } 0 < t < \tau_h \ln \frac{a}{a + bx_0}$$

$$q_h(t) - q_h(0) = \int_0^t i_h(t) dt = -\frac{e}{d} \mu_h (a + bx_0) \tau_h \int_0^{\frac{t}{\tau_h}} e^{-\frac{t}{\tau_h}} d\frac{t}{\tau_h} = \left[-\frac{e}{bd}(a + bx_0)\right] [e^{-\frac{t}{\tau_h}} - 1]$$

Concludendo

$$q(t) = \left[-\frac{e}{bd}(a + bx_0)\right] [(1 - e^{-\frac{t}{\tau_e}})(e^{\frac{t}{\tau_h}} - 1)]$$

Esempi

1. Rivelatore Surface Barrier ORTEC ($p^+ \nu n^+$) BA-016-150-1000

Nella sigla 016 indica la risoluzione elettronica in keV, 150 è la superficie sensibile in mm^2 e 1000 indica lo spessore in μm .

$$\rho_R(\text{nominale}) = 130 \Omega m; V (\text{tensione di lavoro}) = 350 V$$

$$C (\text{capacità della superficie attiva}) = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}{d} = \frac{10^{-10} \cdot 150 \cdot 10^{-6}}{10^{-3}} = 15 pF$$

Notare che questa è la capacità associata alla superficie attiva e che il “wafer” è più grande, pertanto ci si deve attendere un valore maggiore della capacità di svuotamento. Per esempio, se il diametro del “wafer” è di 18 mm (diametro attivo $\sim 14 mm$) la capacità passa da 15 pF a 25 pF .

Ci sono due possibilità per valutare la tensione di svuotamento V_D :

a) dalle relazioni $\rho = eN_D^+ = 1/(\rho_R \mu_e)$, con $\mu_e(300 K) = 0.135 m^2 V^{-1} s^{-1}$, e $\rho = 2\varepsilon V_D/d^2$ segue $V_D = d^2/(2\varepsilon_r \varepsilon_0 \rho_R \mu_e) = 275 V$

b) misura della capacità $\{ C = kV^{-n} \rightarrow \ln C = \ln k - n \ln V \}$

Nella successiva tabella sono riportati i valori misurati (nell'ipotesi che $C_{case} \sim 5.5 \text{ pF}$, misurata per un case senza rivelatore):

$V \text{ (V)}$	$C_D + C_{case} \text{ (pF)}$	$C_D \text{ (pf)}$
20	72.5	67
50	52.5	47
200	41.5	36
250	32.5	27
300	30.5	25
350	29.5	24
400	29.5	24

Riportando $\ln C_D$ in funzione di $\ln V$ si ottiene un "corner" per $V_D \simeq 270 \text{ V}$ in sostanziale accordo con il calcolo precedente.

- Calcolo di $a, b, bd/a$

$$a = -(350 + 270)/10^{-3} = -6.2 \cdot 10^5 \text{ Vm}^{-1} \quad b = 540/10^{-6} = 5.4 \cdot 10^8 \text{ Vm}^{-3}$$

$$b/a = -5.4 \cdot 10^8 / 6.2 \cdot 10^5 = -871 \text{ m}^{-1} \quad bd/a = -871 \cdot 10^{-3} = -0.871$$

- Calcolo di τ_e

$$\tau_e = 1/(\mu_e b) = 1/(0.135 \cdot 5.4 \cdot 10^8) = 10 \cdot 10^{-8} / (7.89) = 13.7 \text{ ns}$$

- Calcolo di $t_e (x_0 = 0)$

$$t_e (x_0 = 0) = 13.7 \text{ ns} \cdot \ln 1/[1 + (bd/a)] = 13.7 \text{ ns} \cdot \ln 1/[1 - 0.871] = 28 \text{ ns}$$

- Determinazione del campo elettrico e delle forme dei segnali di corrente e di carica
In fig.3.4.4 sono riportati il campo elettrico e le forme dei segnali di corrente e di carica in condizioni di tensione applicata pari a 350 V.

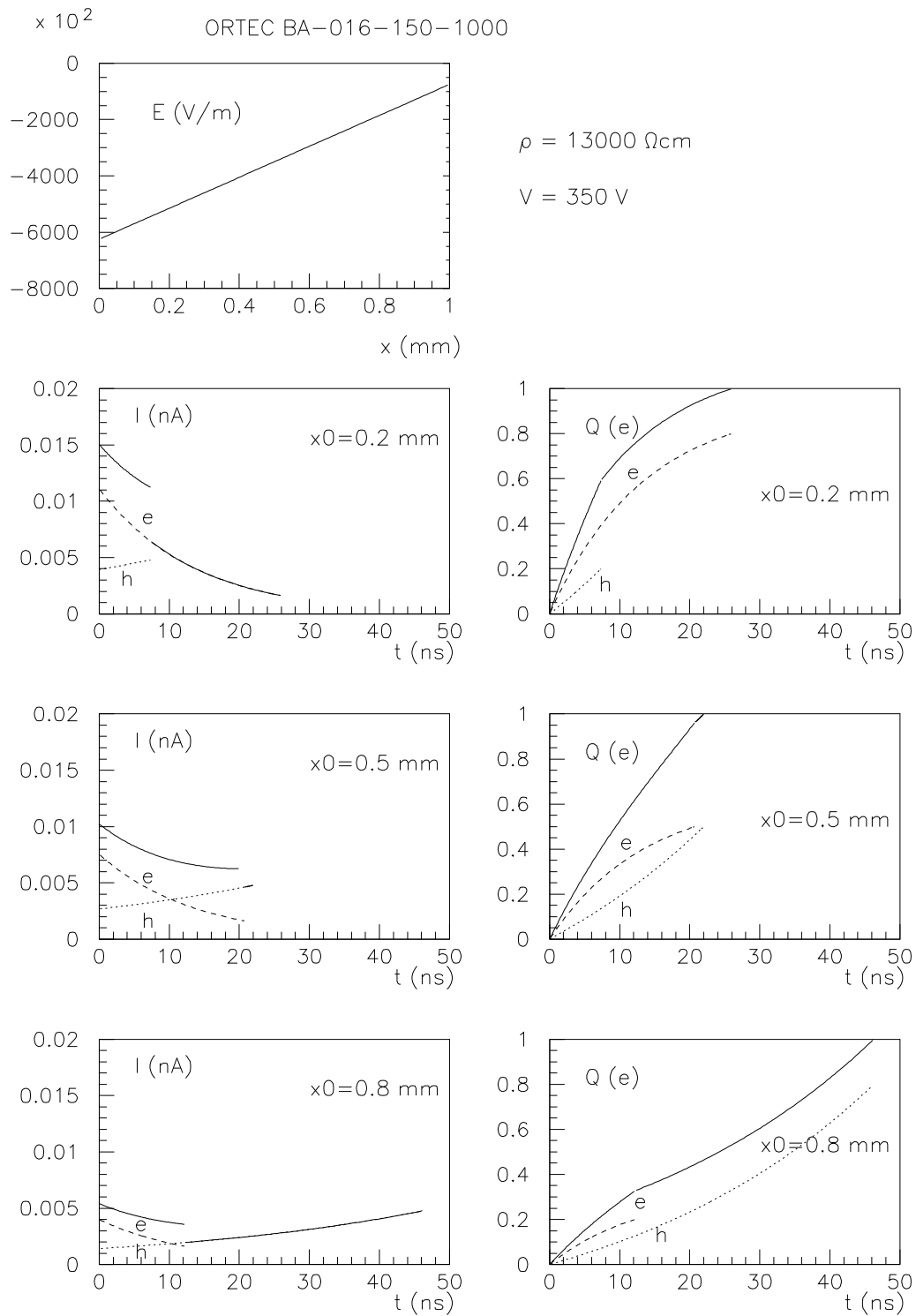


Figura 3.4.4:

2. Rivelatore Surface Barrier ORTEC (p^+vn^+) BA-09-50-1000

V (tensione di lavoro) = 200 V

- Misura di capacità [$C_{misura+connessione} = 32.5 \text{ pF}$, $C_{case} \sim 5.5 \text{ pF}(guess)$]

Nella successiva tabella sono riportati il valori della tensione applicata V , quelli della tensione corretta per la caduta sulla resistenza di polarizzazione ($V_{corr} = V - I_R R_B$ con $R_B \simeq 11 \text{ M}\Omega$, quelli della capacità misurata C_T e quelli della capacità del rivelatore C_D ottenuta sottraendo dalla relazione $C_D = C_T - C_{misura+connessione} - C_{case}$.

V (V)	I_R (nA)	V_{corr}	$\ln V_{corr}$	C_T (pF)	C_D (pF)	$\ln C_D$
24	460	19	2.34	69.5	32	3.46
53.2	550	47.1	3.85	57.5	20	2.99
102.5	610	95.8	4.56	52.0	14.5	2.67
150.7	660	143.4	4.96	49.9	12.4	2.52
200.0	700	192.3	5.26	48.2	10.7	2.37
250	750	241.7	5.59	48.1	10.6	2.36
300	800	291.2	5.67	48.1	10.6	2.36

Riportando $\ln C_D$ in funzione di $\ln V$ si ottiene un “corner” per $V_D \simeq 190 \text{ V}$.

Con tale risultato per la tensione di svuotamento si ottengono i seguenti valori per gli altri parametri:

$$a = -(200 + 190)/10^{-3} = -3.9 \cdot 10^5 \text{ Vm}^{-1} \quad b = 380/10^{-6} = 3.8 \cdot 10^8 \text{ Vm}^{-3}$$

$$b/a = -3.8 \cdot 10^8 / 3.9 \cdot 10^5 = -974 \text{ m}^{-1} \quad bd/a = -974 \cdot 10^{-3} = -0.974$$

$$\tau_e = 1/(\mu_e b) = 1/(0.135 \cdot 3.8 \cdot 10^8) = 19.5 \text{ ns}$$

$$t_e(x_0 = 0) = 19.5 \text{ ns} \cdot \ln 1/[1 + (bd/a)] = 19.5 \text{ ns} \cdot \ln 1/[1 - 0.974] = 71 \text{ ns}$$

3.5 Rivelatori con densità di carica di volume variabile linearmente

Per la geometria e la definizione di alcune grandezze facciamo riferimento alla fig.3.5.1.

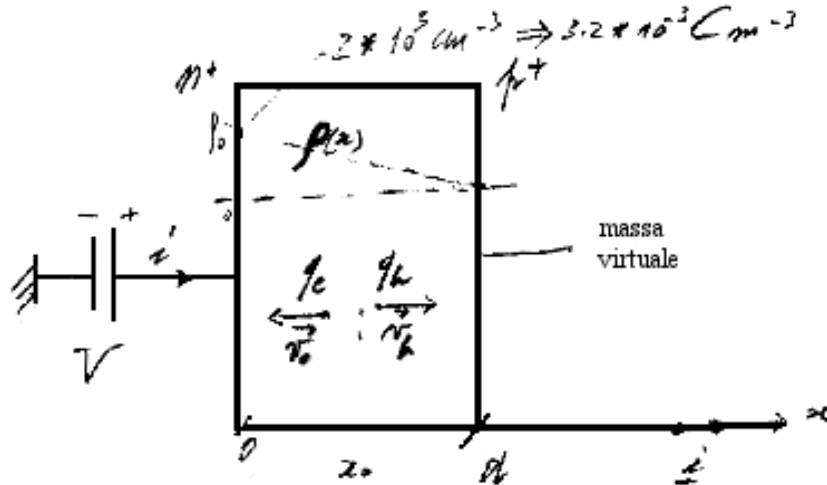


Figura 3.5.1:

Supposta la densità di impurezze del tipo: $\rho(x) = \rho_0(1-x/d)$, l'equazione unidimensionale della divergenza del campo elettrico è:

$$\partial E / \partial x = \rho(x) / \epsilon = \rho_0 / \epsilon - (\rho_0 / \epsilon) (x/d)$$

$$\text{e quindi: } dE = (\rho_0 / \epsilon) dx - (\rho_0 / \epsilon) (x/d) dx$$

$$\text{risulta subito: } E(x) - E(0) = (\rho_0 / \epsilon) x - (1/2)(\rho_0 / \epsilon) (x^2/d) = (\rho_0 / \epsilon) x(1 - x/2d)$$

e per il potenziale:

$$V(x) - V(0) = -\int_{0,x} E(0) dx - (\rho_0 / \epsilon) \int_{0,x} x dx + (1/2)(\rho_0 / \epsilon d) \int_{0,x} x^2 dx = -E(0)x - (1/2)(\rho_0 / \epsilon)x^2 + (1/6)(\rho_0 / \epsilon d) x^3$$

e introducendo la condizione che per $x = 0$ si ha $V(0) = V$, si ottiene:

$$0 = V(d) = V - E(0)d - (1/2)(\rho_0 / \epsilon) d^2 + (1/6)(\rho_0 / \epsilon d) d^3 = V - E(0)d - (1/3)(\rho_0 / \epsilon) d^2$$

$$E(0) = V/d - (1/3)(\rho_0 / \epsilon) d$$

L'espressione finale del campo elettrico è perciò:

$$E(x) = [V/d - (1/3)(\rho_0 / \epsilon)d] + (\rho_0 / \epsilon) x(1 - x/2d)$$

Il valore del campo elettrico in d risulta:

$$E(d) = [V/d - (1/3)(\rho_0 / \epsilon) d] + (\rho_0 / \epsilon) (d/2) = V/d + (1/6)(\rho_0 / \epsilon) d$$

Con concentrazioni di impurezze analoghe a quelle ipotizzate nell'esempio precedente si desume che gli effetti della carica spaziale sull'andamento del campo elettrico nel caso intrinseco ($E_{\text{intrinseco}} = V/d$) sono del tutto trascurabili.

Di nuovo, in questo esempio, le forme di corrente e di carica sono identiche a quelle del rivelatore intrinseco.

4 Rivelatori a semiconduttore coassiali Hp-Ge (true coaxial)

Per le geometrie si veda Knoll pag.391

4.1 Campo elettrico e velocità di deriva

Per la geometria e la definizione delle grandezze di interesse si fa riferimento alla fig.4.1.1, dove è mostrato un rivelatore il cui volume è caratterizzato dalla presenza di impurezze residue di tipo p.

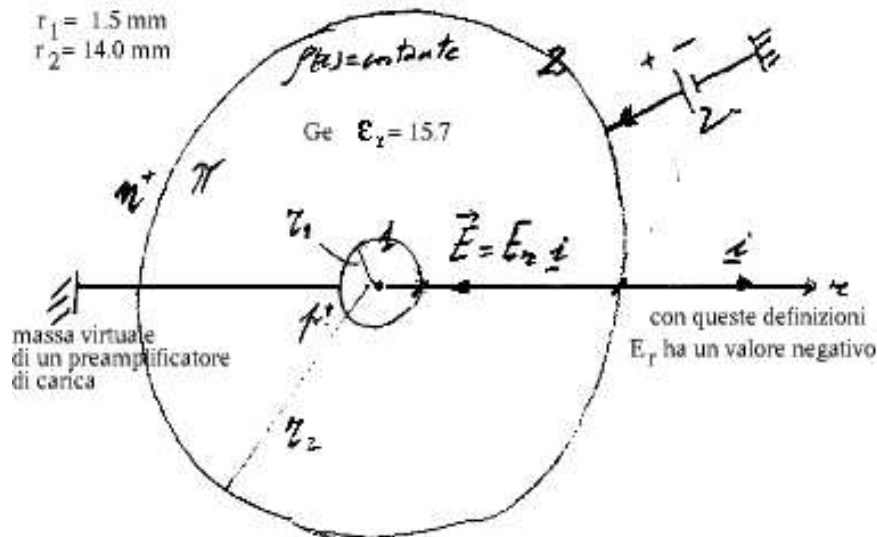


Figura 4.1.1:

Per indicare il livello molto basso di drogaggio di tipo p si parla di materiale di tipo π . Si suppone cioè che le impurezze residue siano ioni fissi negativi (atomi accettori) con densità costante di carica di volume ρ negativa. Si suppone inoltre una simmetria esattamente cilindrica, ossia: $\vec{E} = E_r \vec{i}$. In queste circostanze l'equazione per la divergenza del campo elettrico $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon$ in coordinate cilindriche diventa: (v. per es. Jackson)

$$(1/r)[d(rE_r)/dr] = \rho/\epsilon$$

$$d(rE_r) = (\rho/\epsilon)r dr = (\rho/2\epsilon) d(r^2)$$

integrando fra r_1 , raggio interno, e il generico raggio r , si ha:

$$\int_{r_1, r} d(rE_r) = (\rho/2\epsilon) \int_{r_1, r} d(r^2)$$

$$rE_r - r_1E_{r_1} = (\rho/2\epsilon) (r^2 - r_1^2)$$

pertanto:

$$E_r = (r_1/r)E_{r_1} + (\rho/2\epsilon)(r^2 - r_1^2)/r \quad (4.1.1)$$

Per il potenziale si ha:

$$V(r) - V(r_1) = - \int_{r_1, r} E_r dr = -r_1E_{r_1} \int_{r_1, r} dr/r - (\rho/2\epsilon) \int_{r_1, r} r dr + (\rho/2\epsilon) \int_{r_1, r} (r_1^2/r) dr =$$

$$-r_1 E_{r1} \ln(r/r_1) - (\rho/4\varepsilon)(r^2 - r_1^2) + (\rho/2\varepsilon)r_1^2 \ln(r/r_1)$$

con le seguenti condizioni ai limiti:

$$\text{per } r = r_1: V(r_1) = 0$$

$$\text{per } r = r_2: V(r_2) = -r_1 E_{r1} \ln(r_2/r_1) - (\rho/4\varepsilon)(r_2^2 - r_1^2) + (\rho/2\varepsilon)r_1^2 \ln(r_2/r_1)$$

Segue la d.d.p. applicata:

$$V = V(r_2) - V(r_1) = -r_1 E_{r1} \ln(r_2/r_1) - (\rho/4\varepsilon)(r_2^2 - r_1^2) + (\rho/2\varepsilon)r_1^2 \ln(r_2/r_1)$$

Da questa si determina:

$$E(r_1) = [-V/r_1 \ln(r_2/r_1)] - (\rho/4\varepsilon)(r_2^2 - r_1^2)/r_1 \ln(r_2/r_1) + (\rho/2\varepsilon)r_1 \quad (4.1.2)$$

sostituendo la (4.1.2) nella (4.1.1) si ottiene:

$$E_r = r_1[-(V + (\rho/4\varepsilon)(r^2 - r_1^2))/r_1 \ln(r_2/r_1)](1/r) + (\rho/2\varepsilon)(1/r)(r^2 - r_1^2)$$

e semplificando:

$$E_r = (\rho/2\varepsilon)r + \{-[V + (\rho/4\varepsilon)(r_2^2 - r_1^2)]/\ln(r_2/r_1)\}(1/r) \quad (4.1.3)$$

Si osservi che, con il sistema di riferimento scelto in fig.4.1.1, il potenziale positivo $V(r)$ aumenta dal valore zero al valore massimo passando da r_1 a r_2 , mentre il campo elettrico è negativo (punta oppostamente al versore \vec{i}) e la variazione del suo modulo è più o meno complicata a seconda del valore della tensione applicata.

NOTA:

al contatto $p^+ \pi$, la condizione di svuotamento impone una tensione minima applicata $V \geq V_d$ tale che sia: $E_{r1} \leq 0$. Dalla (4.1.2), posto $E_{r1} \leq 0$, segue:

$$E_{r1} = -(|\rho|/2\varepsilon)r_1 + \{-[V + (|\rho|/4\varepsilon)(r_2^2 - r_1^2)]/\ln(r_2/r_1)\}(1/r_1) \leq 0$$

e con semplici calcoli

$$V \geq V_d = (|\rho|/2\varepsilon)\{(1/2)(r_2^2 - r_1^2) - r_1^2 \ln(r_2/r_1)\} \quad (4.1.4)$$

Si osservi che, nel caso di rivelatori $Ge(Li)$ coassiali, i precedenti risultati si modificano come segue. Nell'ipotesi che la compensazione con Litio sia macroscopicamente esatta si ha $\rho = 0$ e quindi:

$$E_r = -V/r \ln(r_2/r_l) \quad (4.1.5)$$

come previsto per un condensatore cilindrico in vuoto o in un materiale di costante dielettrica costante.

Si ottiene anche l'altro risultato limite, secondo il quale è sufficiente una d.d.p. V comunque piccola per assicurare lo svuotamento completo.

Se nel caso di fig.4.1.1 si invertono gli elettrodi (n^+ elettrodo centrale e p^+ elettrodo periferico), e corrispondentemente la tensione, la tensione $V(r)$ è negativa e passa dal valore zero al massimo valore negativo andando dall'elettrodo interno all'elettrodo esterno; in questo caso il campo elettrico è concorde con il versore \vec{i} . La condizione di svuotamento diventa: $E_{r2} > 0$ e dalla (4.1.3), valutata in r_2 segue:

$$E_{r2} = -(|\rho|/2\varepsilon)r_2 + \{-[V - (|\rho|/4\varepsilon)(r_2^2 - r_1^2)]/\ln(r_2/r_1)\}(1/r_2) \geq 0$$

e con semplici calcoli

$$V \leq V_d^* = (|\rho|/2\varepsilon)[r_2^2 \ln(r_2/r_1) - (1/2)(r_2^2 - r_1^2)] \quad (4.1.6)$$

Studio di un rivelatore reale:

$$\rho = -4 \cdot 10^{16} \text{ m}^{-3} \quad 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} = -6.4 \cdot 10^{-3} \text{ Cm}^{-3}$$

$$r_1 = 1.5 \cdot 10^{-3} \text{ m}; \quad r_2 = 14 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\varepsilon_{Ge} = 15.7$$

con questi valori, dalle (4.1.4) e (4.1.6) si ricava:

$$V_d = 2115 \text{ V} \quad ; \quad V_d^* = -7850 \text{ V}$$

Si trova così che è conveniente che la barriera sia formata sull'elettrodo esterno, in quanto si raggiunge lo svuotamento con una tensione circa 4 volte inferiore.

Utilizzando la configurazione con la barriera sull'elettrodo esterno, valutiamo con la (4.1.3) il campo elettrico a diversi raggi alla tensione di svuotamento di 2115 V e a una tensione di "lavoro" di 3000 V.

$V = 2115 \text{ V} = V_d$	
$r \text{ (mm)}$	$ E_r \text{ (Vmm}^{-1}\text{)}$
1.5	0
3.0	52
6.0	131
9.0	201
12.0	272
14.0	318

Se si confronta con i grafici di velocità a 80 K di Ottaviani et al. (Knoll pag. 342), si ha che per $r = 3 \text{ mm}$ sia le lacune che gli elettroni hanno velocità di circa $6 \cdot 10^7 \text{ mm s}^{-1}$, e che per $r = 14 \text{ mm}$ le velocità di lacune ed elettroni sono di nuovo simili e attorno al valore di saturazione di circa 10^8 mm s^{-1} .

$V = 3000 \text{ V}$	
$r \text{ (mm)}$	$ E_r \text{ (Vmm}^{-1}\text{)}$
1.5	275
3.0	190
6.0	198
9.0	245
12.0	290
14.0	347

Confrontando di nuovo con i grafici di velocità si ha che, indipendentemente da r , le velocità degli elettroni e delle lacune sono sostanzialmente eguali fra loro e prossime al valore di saturazione.

4.2 Segnali di corrente generati dal moto di una coppia lacuna-elettrone

Per applicare il Teorema di Ramo facciamo riferimento alla fig.4.2.1.

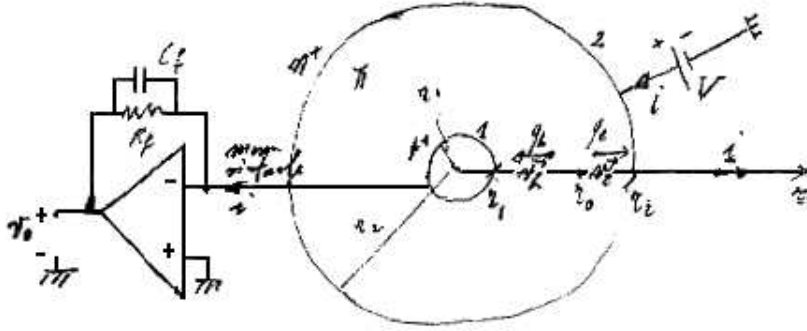


Figura 4.2.1:

Le grandezze di interesse sono riportate di seguito:

lacune:	massa	m_h
	carica	$q_h = e$
	velocita'	$\vec{v}_h = -v_h \vec{i}$
elettroni:	massa	m_e
	carica	$q_e = -e$
	velocita'	$\vec{v}_e = v_e \vec{i}$

campo elettrico degli elettrodi ($V > V_d$):

$$\vec{E} = -\{[V/\ln(r_2/r_1)]/r\} \vec{i}$$

Moto della lacuna a velocità costante e puramente radiale:

$$r_h(t) - r_h(0) = -v_h t \quad (4.2.1)$$

Il tempo di volo t_h della lacuna è:

$$t_h = (r_0 - r_1)/v_h \quad (4.2.2)$$

cioè, nell'intervallo di tempo $0 < t < t_h$, $r_h(t)$ passa da $r_h(0) = r_0$ a r_1 .

Il Teorema di Ramo per la componente di corrente dovuta al moto delle lacune all'elettrodo n^+ , che è stato indicato come elettrodo 2, fornisce:

$$i_{2h}(t) = (1/V)e(-v_h) \vec{i} \cdot \{-[V/\ln(r_2/r_1)]/r_h(t)\} \vec{i} = [ev_h/\ln(r_2/r_1)]/r_h(t) \quad (4.2.3)$$

Integrando rispetto al tempo e tenuto conto della condizione iniziale e della (4.2.1), si ottiene per la carica indotta dal moto delle lacune:

$$\begin{aligned} q_{2h}(t) - q_{2h}(0) &= -\{[ev_h/\ln(r_2/r_1)]/v_h\} \int_{r_0, r_0-v_h t}^{r_1} d(r_0 - v_h t)/(r_0 - v_h t) = \\ &= [e/\ln(r_2/r_1)] \ln[r_0/(r_0 - v_h t)] \quad (4.2.4) \end{aligned}$$

Moto dell'elettrone a velocità costante:

$$r_e(t) - r_e(0) = v_e t \quad (4.2.5)$$

Il tempo di volo t_e dell'elettrone è:

$$t_e = (r_2 - r_0)/v_e \quad (4.2.6)$$

cioè, nell'intervallo di tempo $0 < t < t_e$, $r_e(t)$ passa da $r_e(0) = r_0$ a r_2 .

Il Teorema di Ramo per la componente di corrente all'elettrodo n^+ (2), dovuta al moto dell'elettrone, fornisce:

$$i_{2e}(t) = (1/V)(-e)v_e \vec{i} \cdot \{-[V/\ln(r_2/r_1)]/r_e(t)\} \vec{i} = [ev_e/\ln(r_2/r_1)]/r_e(t) \quad (4.2.7)$$

Integrando rispetto al tempo e tenuto conto della condizione iniziale e della (4.2.5), si ottiene per la carica indotta dal moto dell'elettrone:

$$q_{2e}(t) - q_{2e}(0) = -\{[ev_e/\ln(r_2/r_1)]/v_e\} \int_{r_0, r_0+v_e t}^{r_0+v_e t} d(r_0+v_e t)/(r_0+v_e t) = \\ = [e/\ln(r_2/r_1)] \ln[(r_0+v_e t)/r_0] \quad (4.2.8)$$

Le componenti di corrente (4.2.3) e (4.2.7) e la corrente totale sono riportate nell'esempio

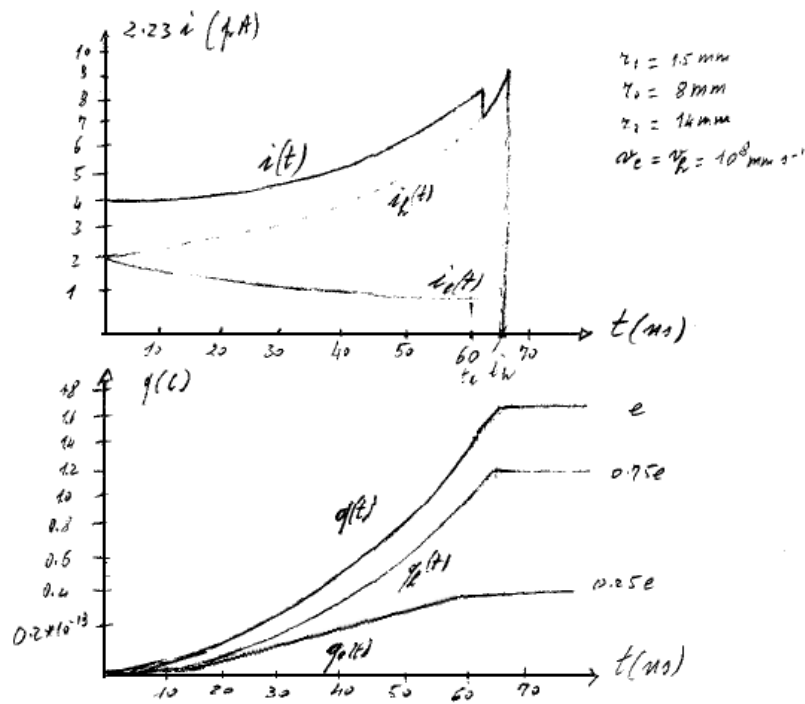


Figura 4.2.2:

di fig.4.2.2 (parte superiore), mentre le corrispondenti componenti di carica (4.2.4) e (4.2.8) e la carica totale sono riportate nella parte inferiore. Il caso ora studiato di un

rivelatore HpGe è per molti aspetti simile a quello dei rivelatori Ge(Li). In particolare, è lo stesso il campo elettrico che interviene nel Teorema di Ramo. Viceversa è sostanzialmente diverso il campo che determina la velocità dei portatori di carica.

Questa differenza può essere più o meno importante a seconda del tipo di portatore ed è in relazione sia all'intensità minima del campo elettrico all'interno del rivelatore che alla temperatura di lavoro (che, tuttavia, con questi tipi di rivelatori è sempre vicina a quella dell'azoto liquido). Da G.Ottaviani, C.Canali, A.Alberigi-Quaranta [IEEE Trans. Nucl. Sci. NS-22(1)192], sia per elettroni che per lacune a 80 K e campi elettrici $> 100 \text{ Vmm}^{-1}$, la velocità è sostanzialmente saturata ad un valore nominale $v_s \sim 10^8 \text{ mm s}^{-1}$.

Tenuto conto di ciò, indipendentemente dal profilo puntuale del campo elettrico, nel caso del rivelatore HpGe da noi studiato, e in ipotesi di moto puramente radiale (per esempio, il rivelatore non deve essere sottoposto a intensi campi magnetici), si hanno i risultati che seguono.

Se, per esempio, $r_0 = 7 \text{ mm}$ (circa a metà strada) si ha un tempo di transito dell'elettrone di circa 70 ns; se, viceversa, $r_0 = r_1$, conta solo il moto degli elettroni e il tempo di transito diventa circa 120 ns. Nel caso che l'interazione della radiazione elettromagnetica avvenga per effetto fotoelettrico ($E_\gamma < 200 \text{ keV}$), siccome un elettrone di tale energia ha un range di $\sim 5 \cdot 10^{-2} \text{ gcm}^{-2}$ in Ge (tenuto conto che la densità del Ge è di 5.32 gcm^{-3} cioè significa $\sim 0.1 \text{ mm}$), si può considerare che tutte le coppie siano create in un punto. E quindi le forme qui analizzate sono direttamente quelle previste.

Se gli eventi di interazione sono multipli (tipicamente uno o due eventi Compton più un fotoelettrico) le forme sono più complicate e non facilmente predicibili nel dettaglio.

4.3 Rivelatore HpGe tipo ν ($N_D = 6 \cdot 10^9 \text{ cm}^{-3}$)

Le dimensioni della sezione (vedi fig.4.3.1) parte coassiale del rivelatore single ended con electrocooling disponibile in laboratorio: $r_1 = 3 \text{ mm}$; $r_2 = 30 \text{ mm}$.

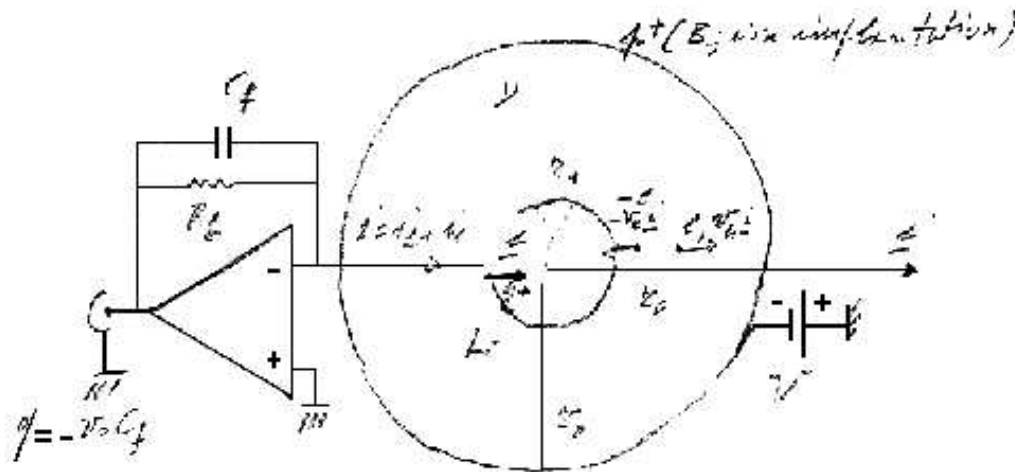


Figura 4.3.1:

Facendo l'ipotesi che il campo elettrico locale

$$\vec{E} = \frac{V}{r} \frac{1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \vec{i}$$

sia ovunque sufficiente per avere velocità saturate e circa uguali, potremo nel seguito considerare v_e e v_h costanti. Il moto dei portatori di carica potrà quindi essere espresso come:

$$\text{moto lacune: } 0 < t < t_h \rightarrow t = (r_2 - r_0)/v_h$$

$$\text{moto elettroni: } 0 < t < t_e \rightarrow t = (r_0 - r_1)/v_e$$

Applicando il Teorema di Ramo otteniamo

$$\begin{cases} i_h(t) = \frac{ev_h}{\ln(r_2/r_1)} \frac{1}{r_0 + v_h t} \\ i_e(t) = \frac{ev_e}{\ln(r_2/r_1)} \frac{1}{r_0 - v_e t} \end{cases}$$

ed inoltre

$$\begin{cases} q_h(t) - q_h(0) = \frac{e}{\ln(r_2/r_1)} \ln \frac{r_0 + v_h t}{r_0} \\ q_e(t) - q_e(0) = \frac{e}{\ln(r_2/r_1)} \ln \frac{r_0}{r_0 - v_e t} \end{cases}$$

Si può infine verificare che

$$q_h(t > t_h) - q_h(0) = \frac{e}{\ln(r_2/r_1)} \ln \frac{r_0 + v_h t_h}{r_0} = \frac{e}{\ln(r_2/r_1)} \ln(r_2/r_0)$$

$$q_e(t > t_e) - q_e(0) = \frac{e}{\ln(r_2/r_1)} \ln \frac{r_0}{r_0 - v_e t_e} = \frac{e}{\ln(r_2/r_1)} \ln(r_0/r_1)$$

$$q_h(t > t_h) + q_e(t > t_e) = \frac{e}{\ln(r_2/r_1)} (\ln(r_2/r_0) + \ln(r_0/r_1)) = e$$

Nella successiva figura sono riportati gli andamenti del campo elettrico per due valori della tensione applicata ($V = V_d$ e $V = -3500$ V) e quelli per le correnti $i_h(t)$ e $i_e(t)$ e per le cariche $q_h(t)$ e $q_e(t)$ per tre diversi valori del raggio al quale viene prodotta la coppia.

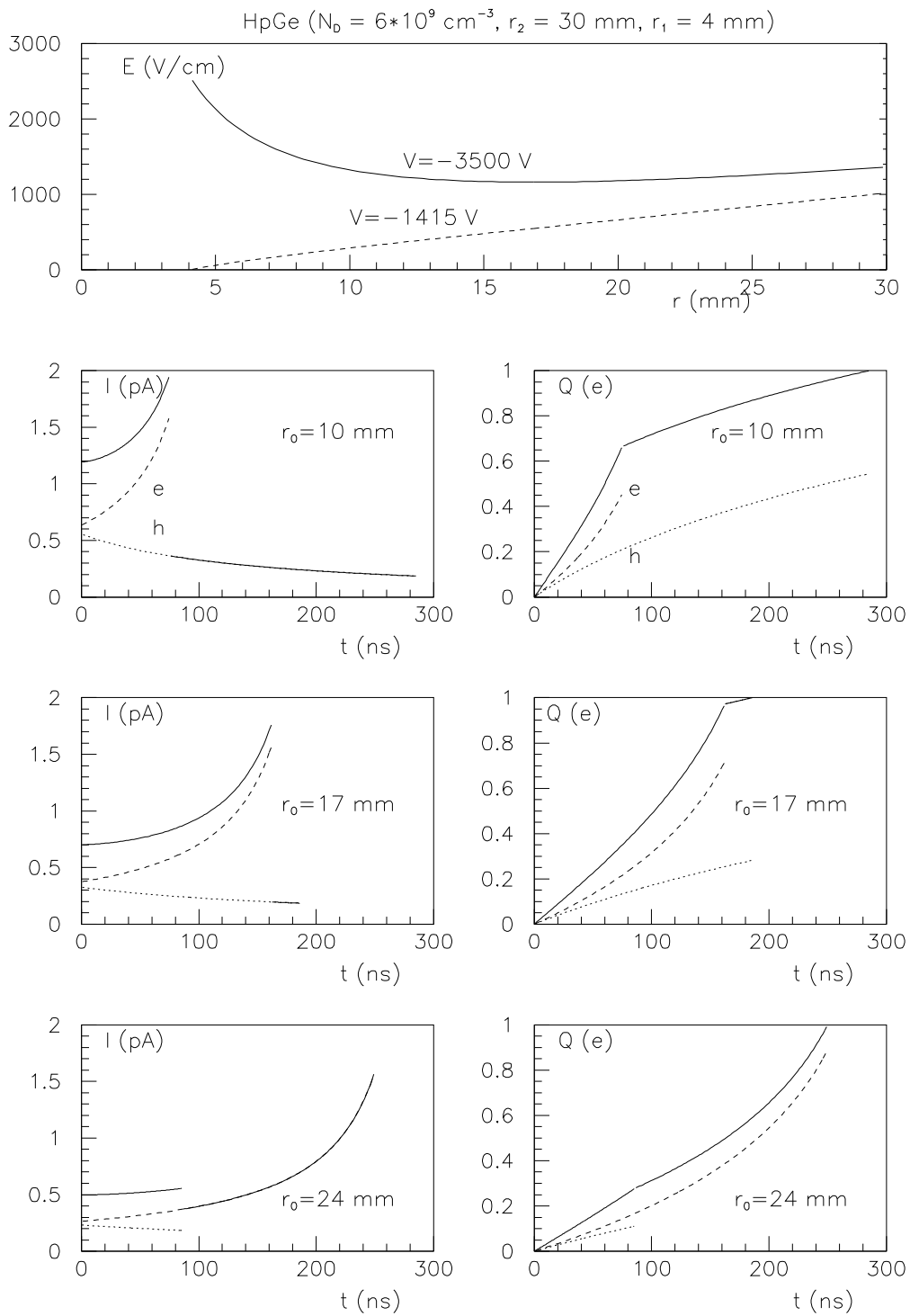


Figura 4.3.2:

5 Linee di trasmissione

Effetti associati alla trasmissione dei segnali fra circuiti e fra componenti all'interno di un circuito.

5.1 Equazione di propagazione. Costanti distribuite e onde viaggianti

Nella fig.5.1.1 è mostrata schematicamente una linea di trasmissione bifilare collegata ad un generatore e ad un "utilizzatore".

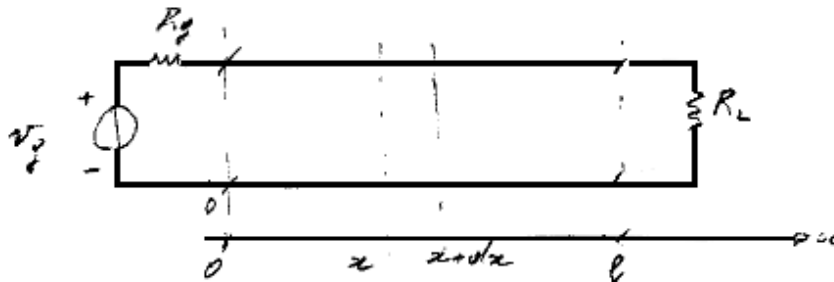


Figura 5.1.1:

Una linea di lunghezza l può essere schematizzata come un "elemento concentrato" ("un punto") tutte le volte che un'onda sinusoidale di tensione (o di corrente), impressa da un generatore ad un suo estremo, si propaga lungo di essa in un tempo trascurabile rispetto ai tempi che occorrono perché l'onda medesima cambi significativamente di valore al generatore, o, equivalentemente, quando la lunghezza d'onda $\lambda = v/f$ sia molto maggiore di l .

Come vedremo, supposta la linea senza perdite, la velocità di propagazione v risulta indipendente dalla frequenza e, per esempio, per un cavo coassiale commerciale tipico come il cavo RG58C/U il tempo che il segnale impiega per percorrerne 1 m è $\sim 5\text{ ns}$.

La variazione massima di un segnale sinusoidale $A_{sen}(2\pi ft)$, è in concomitanza degli zeri: $[(d/dt)A_{sen}(2\pi ft)]_{max} = 2\pi fA$

In corrispondenza, in un intervallo di tempo Δt (piccolo rispetto al periodo $1/f$), si ha quindi una variazione massima: $\Delta A = 2\pi fA\Delta t$.

Se si vuole che nell'intervallo di tempo Δt , $\Delta A/A$ sia minore di un predeterminato valore, occorre che $2\pi f\Delta t$ sia minore di tale valore. Ciò significa che occorre limitare la frequenza e fare: $f < (1/2\pi\Delta t)(\Delta A/A)$.

Se, per esempio, $\Delta t = 5\text{ ns}$ e se un valore massimo accettabile per $\Delta A/A$ è il 10% segue che la frequenza deve essere inferiore a 3 MHz ; se $\Delta A/A$ massima accettabile è lo 0.1%, la massima frequenza deve essere inferiore a 30 kHz .

C'è un'ampia gamma di frequenze per le quali la lunghezza d'onda associata al segnale sinusoidale impresso ($\lambda = v/f$) è eventualmente piccola rispetto alla lunghezza della linea, ma grande rispetto alle sue dimensioni trasversali (tipicamente $\sim 1 \text{ mm}$). A questa gamma di frequenze si adatta la discussione che segue.

Nella fig.5.1.2 sono mostrate le sezioni della geometria dei conduttori e la configurazione dei campi elettrici e magnetici per quattro differenti linee di trasmissione.

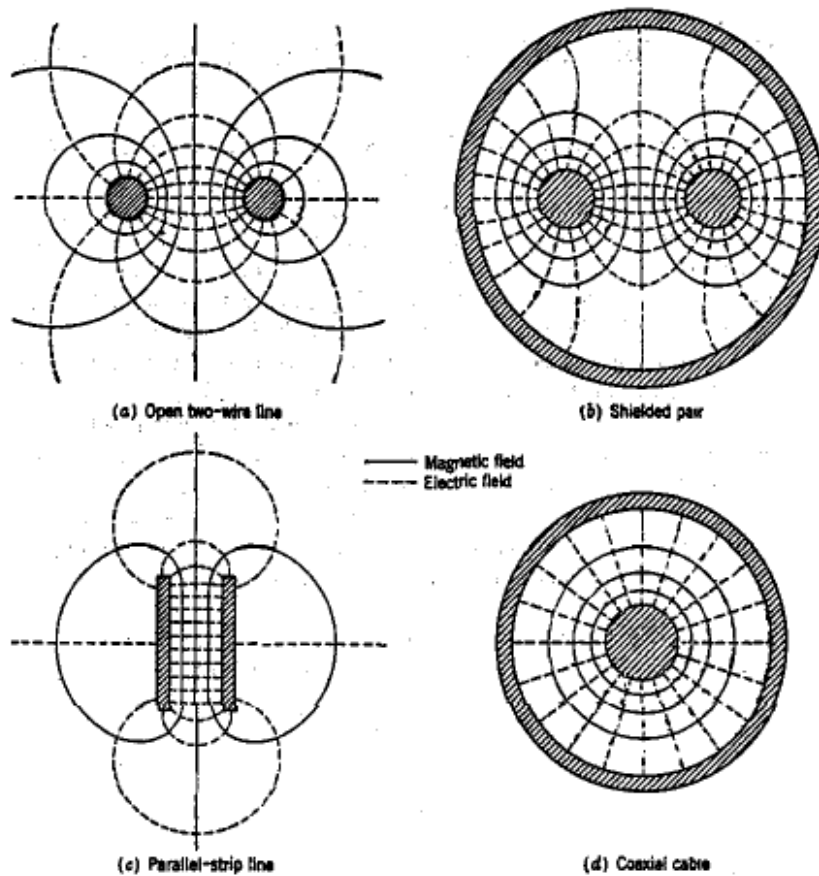


FIG. 1.1. Transverse views of some common types of transmission lines, showing the arrangement of conductors and the configuration of the electric and magnetic fields.

Figura 5.1.2:

La linea bifilare aperta, mostrata nella parte a) della figura è facile da costruire e la sua impedenza può essere variata cambiando la distanza fra i fili. In questo caso, però i campi si estendono nello spazio molto al di là della distanza fra i fili e le perdite di energia per radiazione diventano molto alte alle alte frequenze. Di solito queste linee non sono utilizzate oltre le decine di MHz . Talvolta si possono schermare come mostrato nella parte b) della figura.

La linea mostrata nella parte c) è utile per determinare, con la tecnica delle cariche e correnti immagini, la capacità e l'induttanza dei collegamenti che corrono sopra un piano di massa all'interno di un circuito. In alta frequenza, è una struttura più autoschermante

della linea bifilare.

Come mostrato nella parte d) della figura, una linea di trasmissione coassiale (cavo coassiale) consiste in un tubo conduttore, cilindrico, cavo e di un conduttore concentrico. Il conduttore centrale può essere tenuto in posizione sia da anelli solidi di materiale isolante che da un isolante solido continuo. Di solito l'isolante solido continuo è polietilene, abbastanza flessibile da permettere, nel caso che il conduttore esterno sia realizzato in forma di calza, di avere un cavo pieghevole. Il cavo coassiale è autoschermante e non induce campi nello spazio circostante salvo che, eventualmente, alle terminazioni. Per questo i cavi coassiali sono molto utilizzati in tutto il campo delle radiofrequenze, tipicamente fino a lunghezze d'onda di $\sim 10 \text{ cm}$ (3 GHz), e cioè fino alla regione delle cosiddette microonde.

E' opportuno osservare ulteriormente che quando le lunghezze d'onda da trasferire sono dell'ordine o minori della distanza fra i conduttori (onde millimetriche e micrometriche, normalmente denominate microonde) la schematizzazione di una linea come una sequenza di elementi a parametri concentrati lungo il suo sviluppo (caso che discuteremo fra breve) non è più adeguata e il problema va risolto utilizzando le equazioni di Maxwell e le condizioni al contorno, tenendo conto delle costanti fisiche dei materiali che costituiscono la linea.

Quando la propagazione delle onde elettromagnetiche lungo una linea di trasmissione è analizzata con le equazioni di Maxwell, si trova che il modo di propagazione che analizzeremo nel seguito, e che è stato rappresentato schematicamente in fig.5.1.2, non è l'unico possibile. I risultati che discuteremo si applicano al cosiddetto "modo principale" di trasmissione, nel quale il campo elettrico e il campo magnetico sono perpendicolari fra loro e all'asse della linea che individua anche la direzione di propagazione dei segnali e dell'energia. Questo tipo di onda viaggiante è chiamata "trasversale elettromagnetica o TEM" ed è il solo modo di trasmissione possibile lungo la linea alle frequenze più basse. Quando le frequenze diventano così alte che la corrispondente lunghezza d'onda è comparabile con la distanza fra i conduttori (o più piccola) diventa possibile la trasmissione di altri tipi di onde (TE, TM). Salvo che in casi speciali, questi "modi di trasmissione di ordine superiore" di frequenza più alta sono indesiderati e in definitiva, si cerca di tenere la distanza fra i due conduttori molto più piccola di $(\lambda/4)_{min}$. Per fare un esempio, per $f = 3 \text{ GHz}$ e $v \sim 0.66c$ si ha $\lambda/4 \sim 15 \text{ mm}$, da confrontare con la distanza fra i conduttori in un cavo coassiale tipo RG58C/U, che è $\sim 1 \text{ mm}$.

Si ricorda che il tempo di propagazione delle o.e.m. nel vuoto è $\sim 3.3 \text{ ns m}^{-1}$ e che, sempre nel vuoto, la relazione fra lunghezza d'onda e frequenza è ($\lambda = c/f$):

$f \text{ (MHz)}$	$\lambda \text{ (m)}$
0.1	3000.0 (3 km)
1.0	300.0
10.0	30.0
100.0	3.0
1000.0	0.3 (30 cm)

Fra 10 GHz e 100 GHz si colloca il limite per la descrizione a parametri concentrati dei fenomeni all'interno dei circuiti elettronici macroscopici (distanze tipiche fra i componenti e dimensioni tipiche dei componenti $1 \div 10\text{ mm}$). E' evidente l'interesse alla miniaturizzazione dei circuiti, non solo per una maggiore compattezza dei medesimi e quindi un maggior numero di funzioni attive per unità di superficie, ma anche per le maggiori velocità di operazione così ottenibili.

Nella fig.5.1.3 è riportata la schematizzazione a costanti concentrate di un elemento di linea bifilare compreso fra x e $x + dx$. Le grandezze L , R , C , G che vi compaiono sono definite per unità di lunghezza (per esempio: L è misurata in Hm^{-1} etc).

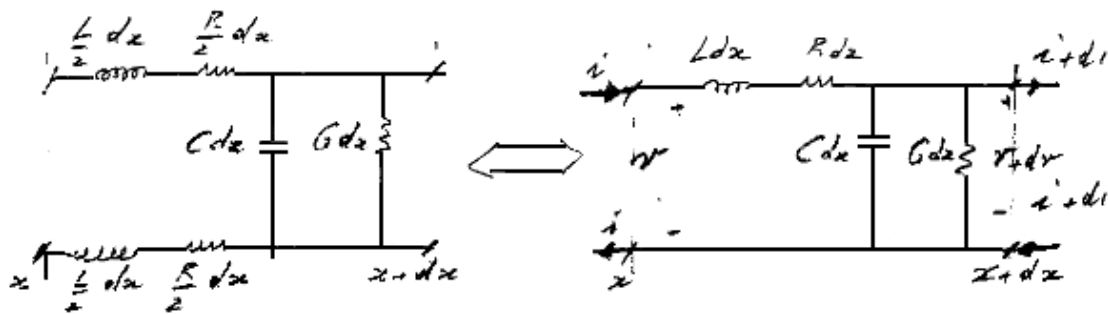


Figura 5.1.3:

Si ha subito:

$$i - (i + di) = -di = -(\partial i / \partial x) dx = \partial(C dx v) / \partial t + G dx v;$$

$$-(\partial i / \partial x) = C(\partial v / \partial t) + Gv \quad (5.1.1)$$

$$v - (v + dv) = -dv = -(\partial v / \partial x) dx = L dx (\partial i / \partial t) + R dx i;$$

$$-(\partial v / \partial x) = L(\partial i / \partial t) + Ri \quad (5.1.2)$$

Si sono così ottenute due equazioni alle derivate parziali (dette equazioni dei telegrafisti) che collegano le due variabili dipendenti v ed i alle due variabili indipendenti x e t . Queste equazioni, assieme alle condizioni al contorno relative alle due terminazioni della linea, sono in grado di fornire, almeno in via di principio, sia le soluzioni stazionarie che le soluzioni transienti.

5.2 Linee di trasmissione senza perdite

Serve a chiarire i concetti principali considerare il caso limite di una linea senza perdite, per la quale si ha: $R = 0$, $G = 0$. Questa approssimazione è buona quando le perdite sono molto più piccole dell'energia trasferita lungo la linea. Inoltre il funzionamento delle linee di ritardo e della formazione a linea dei segnali è più facile da capire nel caso di linee ideali.

In ipotesi di linea ideale, le equazioni (5.1.1) e (5.1.2) diventano:

$$-(\partial v/\partial x) = L(\partial i/\partial t) \quad (5.2.1)$$

$$-(\partial i/\partial x) = C(\partial v/\partial t) \quad (5.2.2)$$

Si può eliminare i da queste due equazioni derivando la (5.2.1) rispetto ad x e la (5.2.2) rispetto a i , e ottenere:

$$(1/LC)(\partial^2 v/\partial x^2) = (\partial^2 v/\partial t^2) \quad (5.2.3)$$

una analoga equazione si ottiene per la corrente:

$$(1/LC)(\partial^2 i/\partial x^2) = (\partial^2 i/\partial t^2) \quad (5.2.4)$$

Le equazioni (5.2.3) e (5.2.4) sono forme unidimensionali dell'equazione delle onde, le soluzioni della quale sono onde viaggianti in ambedue i versi dell'asse delle x , senza cambiamenti di forma o di ampiezza, alla velocità $v = (LC)^{-1/2}$.

La soluzione generale di queste equazioni è una qualunque funzione, che ammetta derivate seconde rispetto all'argomento, il quale può essere posto nella forma “ $t - x/v$ ” per le onde progressive (che avanzano nel verso positivo dell'asse delle x) e nella forma “ $t + x/v$ ” per le onde regressive:

$$v = v_1(t - x/v) + v_2(t + x/v) \quad (5.2.5)$$

$$i = i_1(t - x/v) + i_2(t + x/v) \quad (5.2.6)$$

Verificheremo (par. 5.3.1) che l'induttanza e la capacità per unità di lunghezza delle linee a sezione costante costituite da due conduttori separati da un mezzo isolante, sono tali che il prodotto LC è indipendente dalla distanza di separazione dei conduttori e dipende solo dalla costante dielettrica e dalla permeabilità magnetica del mezzo isolante. Inoltre la velocità di propagazione quando l'isolante sia il vuoto coincide con c (velocità della luce nel vuoto). Isolanti solidi, come il polietilene, che hanno permeabilità magnetica unitaria e costante dielettrica relativa ~ 2 , riducono la velocità di propagazione ad un valore che è circa $(2/3)c$. Nelle linee reali, inoltre, la presenza di perdite fa ancora diminuire la velocità di propagazione.

Le soluzioni (5.2.5) e (5.2.6) non sono indipendenti e, per esempio, la soluzione per la corrente può essere posta nella forma:

$$i = (1/R_0)[v_1(t - x/v) - v_2(t + x/v)] \quad (5.2.7)$$

con $R_0 = (L/C)^{1/2}$ impedenza caratteristica della linea, che per linee ideali è reale e indipendente dalla frequenza, mentre nel caso generale di linee dissipative è una quantità

complessa dipendente dalla frequenza.

Il risultato (5.2.7) può essere immediatamente ottenuto sostituendo le soluzioni per “ v ” ed “ i ” nelle equazioni (5.2.1) e (5.2.2).

Considerando le equazioni (5.2.5) e (5.2.7) si osserva che l’onda progressiva di tensione è accompagnata da una corrispondente onda di corrente e che a ciascuna ascissa della linea le due sono collegate dalla relazione $v_1 = R_0 i_1$. Viceversa, per l’onda regressiva la relazione è $v_2 = -R_0 i_2$.

La ragione del segno negativo nella relazione fra tensione e corrente per l’onda regressiva può essere capita facendo riferimento alla fig.5.2.1 che nella parte a) mostra una zona carica che si propaga nel verso positivo e nella parte b) nel verso negativo.

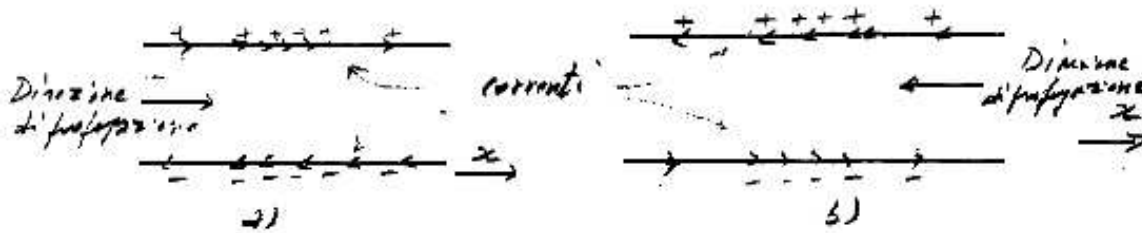


Figura 5.2.1:

Usando le convenzioni per i segni adottate in fig.5.1.3 si nota che la tensione è positiva in ambedue i casi mentre la corrente è positiva per l’onda progressiva e negativa per l’onda regressiva. In definitiva, se per onde che viaggiano verso destra tensione e corrente hanno lo stesso segno, per onde che viaggiano verso sinistra devono avere segno opposto. Nelle zone di linea dove sono contemporaneamente presenti l’onda progressiva e l’onda regressiva, la tensione totale e la corrente totale non stanno più nel semplice rapporto $R_0 = (L/C)^{1/2}$ e formalmente questo è associato al segno meno che compare nella (5.2.7).

5.3 Studio di linee particolari

Linea bifilare

Le caratteristiche geometriche principali di una linea bifilare sono riportate nella fig.5.3.1.

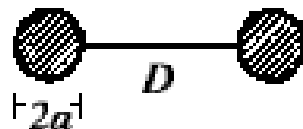


Figura 5.3.1:

L’induttanza e la capacità per unità di lunghezza sono:

$$L = L_e + L_i \simeq L_e = \frac{\mu_0 \mu_r}{\pi} \ln(D/a) \text{ Hm}^{-1} \quad C = \frac{\epsilon_r}{36 \ln(D/a)} \cdot 10^{-9} \text{ Fm}^{-1}$$

Queste espressioni suppongono che sia $D \gg a$. Le espressioni più generali sono:

$$L = \frac{\mu_0 \mu_r}{\pi} \cosh^{-1}(D/2a) \text{ Hm}^{-1} \quad C = \frac{\varepsilon_r}{36 \cosh^{-1}(D/2a)} \cdot 10^{-9} \text{ Fm}^{-1}$$

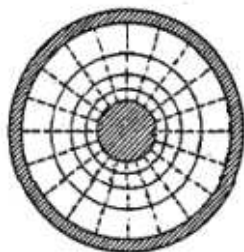
dalle quali si ricavano, nel caso in cui $\mu_r = 1$,

$$v = (LC)^{-1/2} \text{ ms}^{-1} \quad Z_0 = \frac{120}{\varepsilon_r^{1/2}} \cosh^{-1}(D/2a) \Omega$$

Cavo coassiale

Le caratteristiche geometriche principali di un cavo coassiale di tipo commerciale sono riportate nella fig.5.3.2. L'induttanza e la capacità per unità di lunghezza sono:

$$L = (\mu_0 \mu_r / 2\pi) \ln(b/a) \text{ Hm}^{-1} \quad C = (2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r) / \ln(b/a) \text{ Fm}^{-1}$$



raggio conduttore interno a
 raggio esterno conduttore esterno b
 isolante: polietilene $\mu_r = 1; \varepsilon_r = 2.3$

Figura 5.3.2:

Si noti che a determinare l'induttanza [$L = (1/i^2) \int_V \vec{B} \cdot \vec{H} dV$] interviene solo lo spazio fra i conduttori perché, già a 100 kHz, lo skin effect confina le correnti in prossimità della superficie interna del conduttore esterno e della superficie esterna del conduttore interno.

NOTA

La resistenza in alta frequenza di un cavo coassiale è uguale alla resistenza in continua di un circuito composto di due conduttori cilindrici cavi di raggi a e b rispettivamente e con uno spessore delle pareti uguale alla profondità di penetrazione ($1/e$ dell'ampiezza). Il risultato dello skin effect è:

$$R = (1/2)(\rho_R f \mu_r \mu_0 / \pi)^{1/2} (1/a + 1/b) \Omega \text{ m}^{-1}.$$

In questa espressione ρ_R è in $\Omega \text{ m}$, μ_0 in Hm^{-1} e a e b sono misurati in metri.

Se il conduttore è rame, si ha:

$$R = 4.2 \cdot 10^{-6} f^{1/2} (1/a + 1/b) \Omega \text{ m}^{-1}$$

con a e b misurati in centimetri.

Caso del cavo RG58-C/U

$a = 0.039 \text{ cm}$, $b = 0.1475 \text{ cm}$; $(1/a + 1/b) = 32.4 \text{ cm}^{-1}$

quindi:

$$R = 1.36 \cdot 10^{-4} f^{1/2} \Omega \text{ m}^{-1}$$

da cui segue:

f (MHz)	R (Ωm^{-1})
1.0	$1.36 \cdot 10^{-1}$
100.0	1.36
10000.0	13.6

La velocità di propagazione risulta:

$$v = (LC)^{1/2} = (\mu_0 \varepsilon_0)^{-1/2} (\mu_r \varepsilon_r)^{-1/2} = c (\mu_r \varepsilon_r)^{-1/2}$$

Per il polietilene si ha $\mu_r = 1$ e $\varepsilon_r = 2.3$, per cui il ritardo per metro è 4.7 ns.

Con semplici calcoli si trova che la resistenza caratteristica è:

$$R_0 = (60 \varepsilon_r^{-1/2}) \ln(b/a) \Omega$$

Se l'attenuazione dipende principalmente dalle perdite serie nel rame (lo skin effect esalta questo tipo di perdite) si trova che esiste un minimo dell'attenuazione, a parità delle altre condizioni, quando $b/a = 3.6$.

Pertanto, un cavo coassiale realizzato per minimizzare le perdite serie e che utilizzi il polietilene come isolante ha resistenza caratteristica $R_0 \simeq 51 \Omega$.

Le proprietà di alcuni cavi coassiali di comune utilizzo sono riportate nella Tabella di Fig.5.4.3.

Come esempio riportiamo le caratteristiche del cavo coassiale RG58-C/U, costituito da un conduttore centrale (19 capi di rame stagnato intrecciati) di diametro 0.84 mm e con isolante polietilene di diametro esterno 3.0 mm:

R_0	C	L	attenuazione a 100 MHz
51 Ω	100 pF m^{-1}	250 nH m^{-1}	0.2 db m^{-1}

Filo collegato all'interno di un circuito e sopra un piano di massa

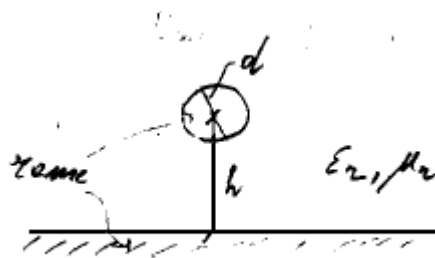


Figura 5.3.3:

La geometria e le grandezze rilevanti di questo caso sono riportate nella fig.5.3.3. L'induttanza e la capacità per unità di lunghezza sono:

$$L = (\mu_0 \mu_r / 2\pi) \ln(4h/d) H m^{-1} \quad C = (2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r) / \ln(4h/d) F m^{-1}$$

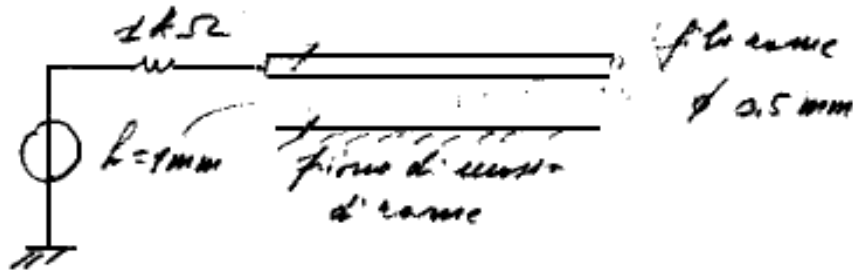


Figura 5.3.4:

Tali formule si applicano per $h > d$. Nella fig.5.3.4 è riportato l'esempio di un filo di diametro 0.5 mm disposto con l'asse a 1 mm dal piano di massa con interposta la vetronite ($\epsilon_r = 4$, $\mu_r = 1$), oppure una ceramica con $\epsilon_r = 2 \div 3$.

In questo caso si ottengono i seguenti valori numerici:

$$C = 100 \text{ pF m}^{-1}, L = 410 \text{ nH m}^{-1}, R_0 = 64 \Omega.$$

Per adattare un generatore con impedenza di $1 \text{ k}\Omega$ basterebbe, a parità di induttanza, una capacità di 0.4 pF m^{-1} . C'è quindi molto spesso un eccesso di capacità. Per esempio un collegamento di 10 cm corrisponde a una capacità di 10 pF e, associato alla resistenza di $1 \text{ k}\Omega$, un effetto di banda passante di circa 17 MHz .

NOTA

Nella figura 5.3.5 è mostrata la relazione fra i tempi caratteristici dell'onda sinusoidale che corrisponde alla frequenza di taglio $(1/2\pi RC) = f_H$ in alta frequenza (banda passante) e tempo di salita del corrispondente segnale a gradino.

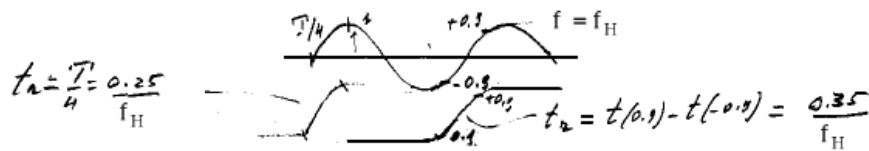


Figura 5.3.5:

La relazione $t_r = T/4 = 0.25/f_H$ è facile da ricordare ma più approssimativa. La relazione $t_r = t(0.9) - t(-0.9) = 0.35/f_H$ è più accurata ed è quella adottata per la prima volta negli anni trenta da "Elmore and Sands" nel loro trattato di elettronica impulsiva.

Tuttavia si preferiscono fili (o piste) vicini al piano di massa perché cariche e correnti immagine disaccoppiano differenti vie di segnali eventualmente compresenti e interferenti. Detto in altri termini, si osserva che, a parità di diametro del filo, allontanare il medesimo dal piano di massa ha per effetto di aumentare L e diminuire C e quindi, in definitiva, di aumentare R_0 , tuttavia la dipendenza è debole (logaritmica) e si schermano meno efficacemente le differenti vie di segnale.

5.4 Coefficiente di riflessione in tensione di una linea

Per l'analisi che segue è conveniente riferirsi alle espressioni generali per “ v ” e “ i ” date dalle (5.2.5), (5.2.6) e (5.2.7).

Casi particolari:

a) linea infinita: basta la soluzione limitata a $v = v_1(t - x/v)$ e $i = i_1 = v_1(t - x/v)/R_0$

b) linea finita chiusa su R_0 : basta $v = v_1(t - x/v)$ e $i = i_1 = v_1(t - x/v)/R_0$ per soddisfare la condizione al contorno (all'ascissa $x = l$, sul carico).

Caso generale: linea finita, chiusa all'ascissa $x = l$ su una resistenza di carico $R_L \neq R_0$. Per introdurre il coefficiente di riflessione in tensione ρ_V si suppone di avere eccitato la linea con un segnale di tensione a gradino e di ampiezza unitaria.

Per tutti i tempi $t < t_d = l/v$ basta un'onda che viaggia dal generatore al carico: $v = v_1(t - x/v)$, $i = (1/R_0)v_1(t - x/v)$.

Per tempi $t > t_d$, al carico deve essere $v/i = R_L$.

Cioè, come mostrato in fig.5.4.1, poiché in ogni punto della linea deve essere sempre $v_1/i_1 = R_0$ e $v_2/i_2 = R_0$, dopo il tempo t_d ci deve essere un'onda riflessa di ampiezza ρ_V e segno appropriato e tale che per essa la corrente va dal carico al generatore ed ha per ampiezza ρ_V/R_0 .

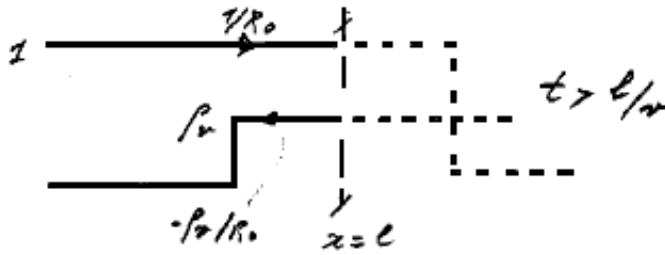


Figura 5.4.1:

Per tempi $t > t_d$, al carico compare perciò una tensione $1 + \rho_V$ e le correnti sono $1/R_0$ per l'onda diretta e $-\rho_V/R_0$ per l'onda riflessa. Al carico deve valere:

$$v/i = R_L = (1 + \rho_V)/[(1/R_0) - (\rho_V/R_0)] = R_0(1 + \rho_V)/(1 - \rho_V)$$

dalla quale segue:

$$\rho_V = (1 - R_0/R_L)/(1 + R_0/R_L)$$

che prende il nome di coefficiente di riflessione in tensione.

Per $R_L = R_0$ si ha $\rho_V = 0$ (è sufficiente l'onda diretta)

Linea aperta $R_L \gg R_0$: $\rho_V = 1$ e, per $R_L > R_0$, si ha $1 > \rho_V > 0$

Linea cortocircuitata $R_L \ll R_0$: $\rho_V = -1$ e, per $R_L < R_0$ si ha $0 > \rho_V > -1$.

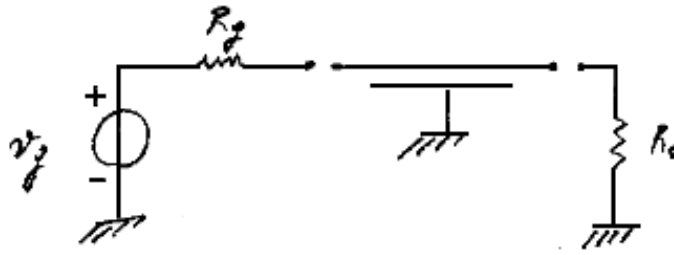


Figura 5.4.2:

Infine, nella fig.5.4.2 è riportato un esempio di ripartizione di tensione al generatore. In generale si ha: $v_i = v_g R_0 / (R_g + R_0)$ e per $R_g = R_0$ si ha $v_i = v_g / 2$.

TABLE 16-1 Properties of Coaxial Cables^a

	Insulating Material	Cable Diameter (cm)	Characteristic Impedance (ohms)	Signal ^b Propagation	HV Rating	Cable Capacitance (pF/m)	Signal Attenuation per Meter	
							MHz	dB
RG-8/U	Polyethylene	1.03	52	0.659	5000	96.8	100	0.066
RG-11/U	Polyethylene	1.03	75	0.659	5000	67.3	400	0.154
							100	0.066
RG-58/U	Polyethylene	0.50	53.5	0.659	1900	93.5	400	0.138
							100	0.135
RG-58C/U	Polyethylene	0.50	50	0.659	1900	100.1	400	0.312
							100	0.174
RG-59/U	Polyethylene	0.61	73	0.659	2300	68.9	400	0.413
							100	0.112
RG-62/U	Semisolid polyethylene	0.61	93	0.840	750	44.3	400	0.233
							100	0.102
RG-174/U	Polyethylene	0.25	50	0.659	1500	101.0	400	0.207
							100	0.289
RG-178/U	TFE teflon	0.18	50	0.694	1500	95.1	400	0.656
							400	0.951
DOUBLE SHIELDED COAXIAL CABLES								
RG-9/U	Polyethylene	1.07	51	0.659	5000	98.4	100	0.062
RG-223/U	Polyethylene	0.52	50	0.659	1900	101.0	400	0.135
							100	0.157
							400	0.328

^aData derived in part from Coaxial Cable Catalog, Belden Corporation, Richmond, IN.

^bFraction of speed of light in a vacuum (3.00×10^8 m/s).

Figura 5.4.3:

6 Amplificatori formatori

6.1 Classificazione degli amplificatori

Nella fig.6.1.1 sono riportati gli schemi dei 4 amplificatori ideali, con i valori ideali di resistenze di ingresso e di uscita e le rispettive funzioni di trasferimento.

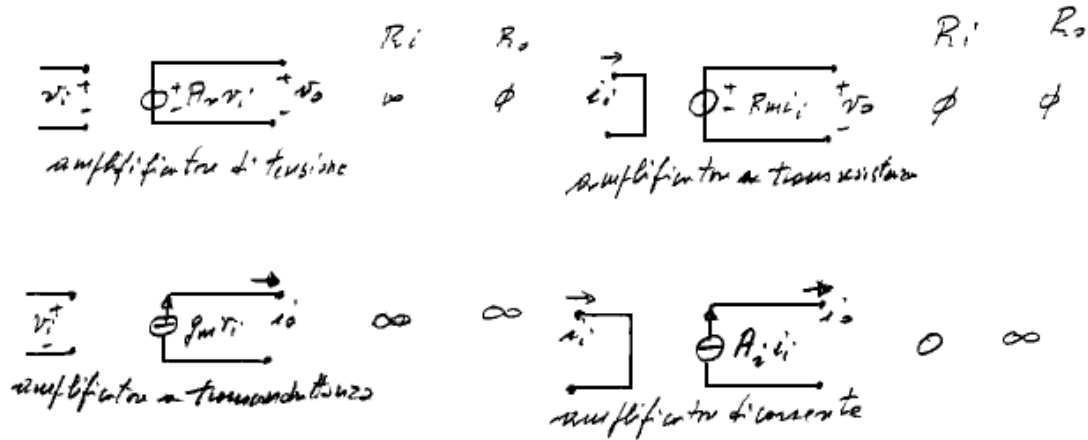


Figura 6.1.1:

Nella fig.6.1.2 sono riportati gli schemi equivalenti di bassa frequenza di 4 amplificatori reali, che assomigliano ai 4 amplificatori ideali.

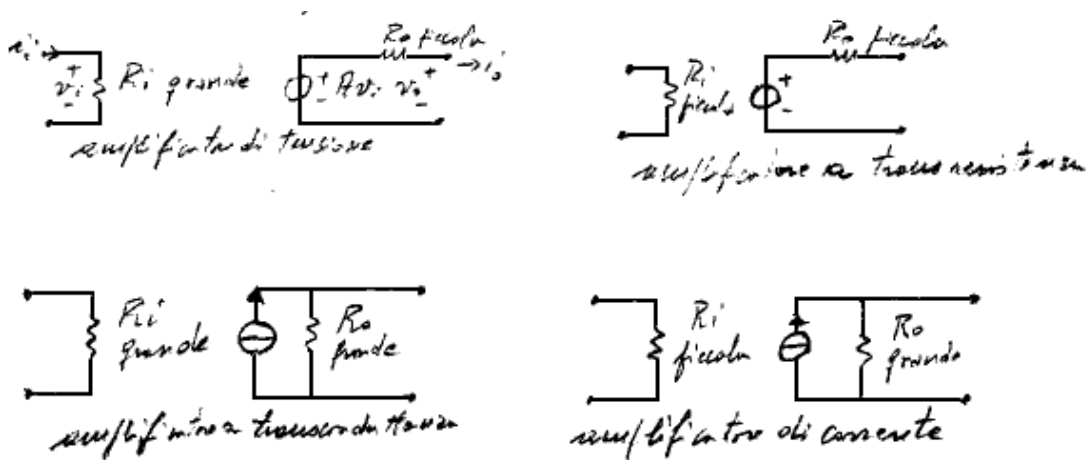


Figura 6.1.2:

NOTA

In generale, qualunque amplificatore reale può essere caratterizzato tramite uno qualunque dei suoi 4 schemi equivalenti, perché qualunque amplificatore reale ha impedenze (resistenze) di ingresso e di uscita di valore finito. Nella fig.6.1.3 è riportato questo fatto. Pertanto, che un amplificatore sia più ragionevolmente schematizzabile con l'uno o l'altro

dei 4 schemi di fig.6.1.3 dipende in maniera essenziale dall'impedenza del generatore che lo pilota e dal carico sul quale deve trasferire il segnale.

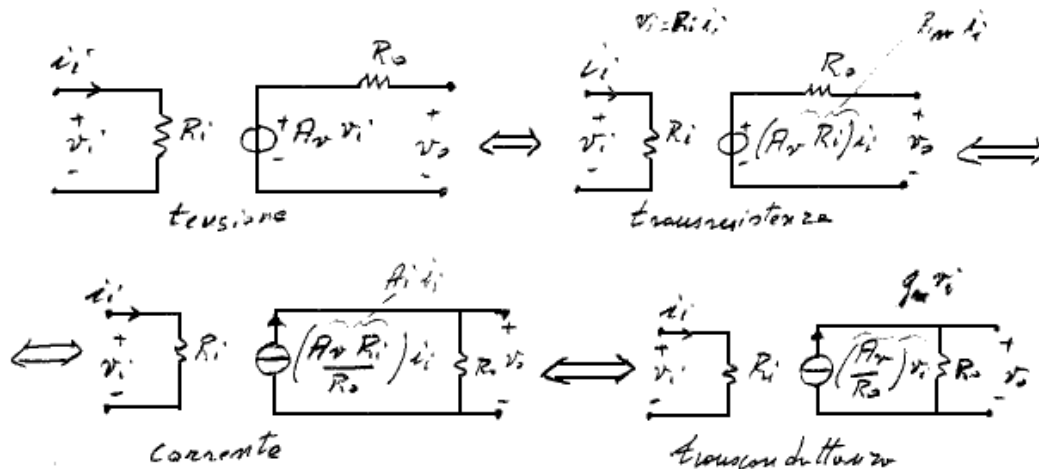


Figura 6.1.3:

Tenuto conto di ciò, per rendere uniforme il successivo trattamento, scegliamo lo schema come amplificatore di tensione per schematizzare qualsiasi amplificatore reale.

A tale amplificatore base si possono applicare 4 tipi di reazione negativa. Dei 4 tipi ci limiteremo a considerare i seguenti due:

- 1) reazione di tensione-serie, che è utilizzata per costruire amplificatori di tensione praticamente ideali,
- 2) reazione di tensione-parallelo, che è utilizzata per costruire amplificatori a transresistenza (amplificatori operazionali) praticamente ideali.

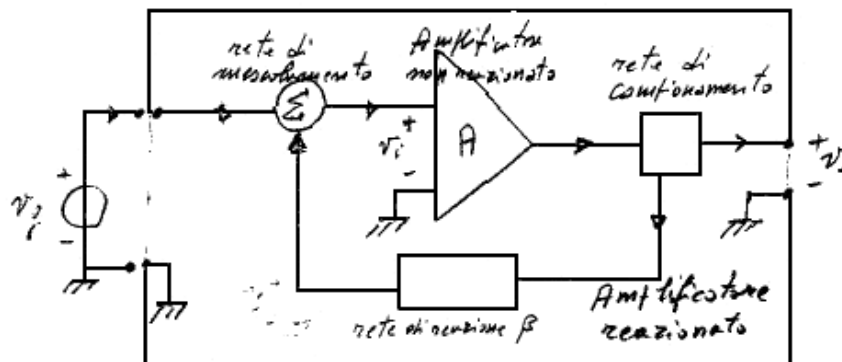


Figura 6.1.4:

Come si vede, facendo riferimento allo schema generale mostrato nella fig.6.1.4, il primo termine (tensione) si riferisce al campionamento del segnale di uscita, mentre il secondo termine (serie, parallelo) si riferisce al tipo di mescolamento fra segnale impresso dal

generatore e segnale di reazione all'ingresso dell'amplificatore non reazionato (nelle realizzazioni pratiche non sono sempre così esattamente distinte le funzioni di campionamento e di mescolamento).

6.2 Reazione negativa in bassa frequenza - Caso ideale

1) L'analisi generale che segue è basata sull'ipotesi che i segnali seguano rigorosamente la via indicata dalle frecce in fig.6.1.4.

2) Non c'è ritardo fra segnale impresso e segnale di reazione (ipotesi di segnali di eccitazione che variano lentamente).

Con le notazioni di fig.6.1.4, l'amplificazione reazionata $A_f = v_o/v_g$ si ottiene come segue:
 $v_i = v_g + v_f$; $v_f = \beta v_o \rightarrow v_i = v_g + \beta v_o$ (*)

NOTA:

che v_g e v_f risultino mescolati in controfase a qualunque frequenza (ovverosia per segnali di eccitazione comunque rapidi) dipende dall'ipotesi di ritardo zero.

$$v_o = Av_i \rightarrow v_o = Av_g + \beta Av_o$$

e quindi:

$$A_f = v_o/v_g = A/(1 - \beta A) \quad (1 - \beta A) = A/A_f \quad (6.2.1)$$

La reazione è negativa se è $v_i < v_g$, positiva se è $v_i > v_g$ (serve per fare oscillatori sinusoidali e circuiti di scatto)

Le 1) e 2) sono le ipotesi della trattazione semplificata che segue e che limitiamo al caso di reazione negativa.

Dalla (6.2.1), nel caso limite (non fisico) $A \rightarrow \infty$ per tutte le frequenze si ha:

$A_f = v_o/v_g = -1/\beta$ e quindi $v_i \rightarrow 0$ (vedi (*))

e, in questo caso, tutto il comportamento dell'amplificatore reazionato dipenderebbe solo dalla rete di reazione.

Più in generale, per A di valore finito, si ottiene (differenziando il logaritmo della (6.2.1)):

$$\Delta A_f/A_f = (\Delta A/A)/(1 - \beta A) \quad (6.2.2)$$

A causa della (6.2.2), $1 - \beta A = A/A_f$ prende il nome di fattore di stabilizzazione (notare, dal punto di vista operativo, l'importanza della sua definizione come rapporto A/A_f).

Un'altra caratteristica interessante è la diminuzione delle non linearità, sempre per lo stesso fattore di stabilizzazione.

Supponiamo che, per l'amplificatore non reazionato, mostrato nella parte a) di fig.6.2.1, per una certa ampiezza di uscita $v_o(f)$ compaia una distorsione di n-esima armonica $B(nf)$. Di norma questa non linearità è introdotta dall'ultimo stadio di amplificazione che tratta i segnali più ampi.

Consideriamo poi il medesimo amplificatore reazionato, come mostrato nella parte b) di fig.6.2.1. Se si aumenta il segnale di ingresso fino ad arrivare di nuovo all'ampiezza $v_o(f)$

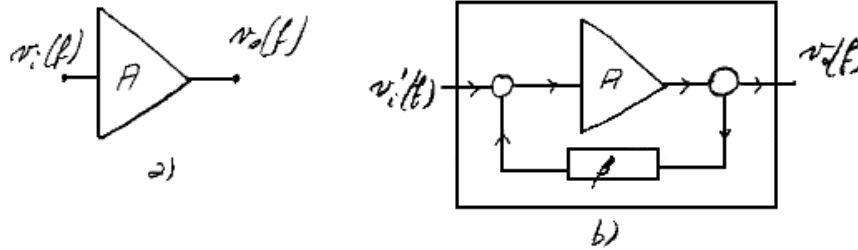


Figura 6.2.1:

si ottiene una nuova distorsione di n-esima armonica $B_f(nf)$, tale che per essa deve essere:
 $B_f(nf) = B(nf) + \beta AB_f(nf)$
 ossia:

$$B_f(nf) = B(nf)(1 - \beta A) \quad (6.2.3)$$

Le relazioni (6.2.2) e (6.2.3) raccomandano l'uso della reazione negativa tutte le volte che sia disponibile un "eccesso" di guadagno dell'amplificatore non reazionato.

Ricordiamo le grandezze caratteristiche degli amplificatori reazionati:

βA Guadagno di Anello (G.A.) o anche Loop Gain (L.G.)
 $(1 - \beta A)$ Fattore di Stabilizzazione (Desensitivity factor)

Notiamo che per $|\beta A| \gg 1$ fattore di stabilizzazione e guadagno di anello sono la stessa cosa.

Come osservazione finale rimarchiamo ancora una volta che **i miglioramenti conseguiti con l'uso della reazione negativa sono ottenuti a spese del guadagno che sarebbe ottenibile con l' amplificatore non reazionato.**

6.3 Reazione negativa in situazioni reali di bassa frequenza

Nella realizzazione pratica dei circuiti reazionati (qui ci limiteremo ad analizzare in qualche dettaglio il caso della reazione di tensione serie e parallelo) si accoppiano, seppure poco di norma, i circuiti di ingresso e di uscita (proprio tramite la rete di reazione).

In questi casi, per trovare l'espressione esatta della funzione di trasferimento occorre applicare le leggi di Kirchhoff. Nei casi pratici la funzione di trasferimento "esatta" (di bassa frequenza) così calcolata può essere poi ragionevolmente semplificata fino ad assumere una forma analoga a quella ideale (6.2.1).

Di norma quello che risulta ridefinito è il guadagno che diventa un "guadagno disponibile A^* " minore di A (guadagno a circuito aperto).

Forma di Millman della legge dei nodi

Facendo riferimento alla fig.6.3.1 si ottiene

$$i_1 + \dots + i_n = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{v_0 - v_1}{Z_1} + \dots + \frac{v_0 - v_n}{Z_n} = 0 \quad \rightarrow \quad (v_0 - v_1)G_1 + \dots + (v_0 - v_n)G_n = 0$$

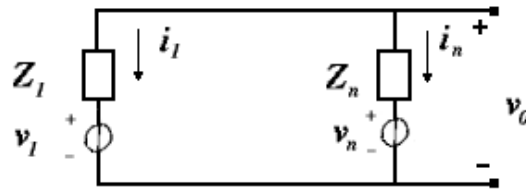


Figura 6.3.1:

da cui si ricava

$$v_0(G_1 + \dots + G_n) = v_1G_1 + \dots + v_nG_n$$

Reazione di tensione parallelo

Nella fig.6.3.2 sono riportate le caratteristiche dell'amplificatore base non reazionato e del generatore nelle due forme equivalenti di tensione e di corrente, mentre nella fig.6.3.3 sono riportati l'amplificatore reazionato ed il suo equivalente elettrico da utilizzare per i calcoli seguenti.

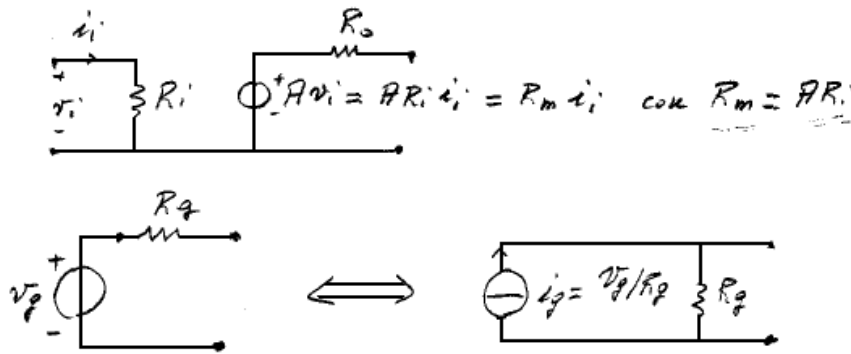


Figura 6.3.2:

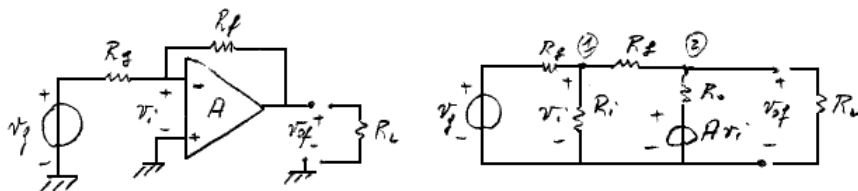


Figura 6.3.3:

Si possono scrivere le seguenti equazioni dei nodi (nella forma di Millman):

$$v_i(G_f + G_i + G_g) = v_gG_g + v_{of}G_f \quad G_{in} = G_f + G_i + G_g$$

$$v_{of}(G_f + G_o + G_L) = Av_i G_o + v_i G_f \quad G_{out} = G_f + G_o + G_L$$

segue:

$$R_{mf} = v_{of}/i_g = (AG_o + G_f)/[G_{in}G_{out} - G_f(AG_o + G_f)] \quad (6.3.1)$$

La (6.3.1) è una espressione esatta.

Per valori tipici: $A > 10^4$, $G_o \sim 1 \Omega^{-1}$, $G_f \sim 10^{-3} \Omega^{-1}$, $AG_o > 10^7 G_f$, segue la relazione, esatta a tutti gli effetti pratici:

$$R_{mf} = v_{of}/i_g = AG_o/(G_{in}G_{out} - AG_o G_f) \quad (6.3.2)$$

e introducendo la transresistenza dell'amplificatore non reazionato $R_m = AR_i$, con qualche calcolo elementare si trova:

$$R_{mf} = R_m^*/(1 - R_m^*) \quad (6.3.3)$$

con:

$$R_m^* = R_m G_o / R_i G_{in} G_{out}$$

In molti casi pratici $G_{out} \sim G_o$ e quindi:

$$R_m^* = R_m / R_i G_{in}$$

In molti casi pratici $G_{in} \sim G_g$, quindi sia per BJT che per JFET o MOSFET si ha:

$$R_m^* = AR_g \quad (6.3.4)$$

Poiché i valori usuali di AR_g sono $> 10^6 \Omega$ e di $G_g \sim 10^{-3} \Omega^{-1}$, si ha:

$$R_m^* = AR_g \text{ e il fattore di stabilizzazione } R_m^*/R_{mf} = AR_g/R_g = A \quad (6.3.5)$$

Con ulteriori calcoli elementari, che non riportiamo, si trova che nelle precedenti ipotesi:

$$R_{if} \rightarrow 0, \quad R_{of} \rightarrow 0, \quad v_i \rightarrow 0 \quad (6.3.6)$$

Quindi un amplificatore provvisto di reazione di tensione parallelo, il cui amplificatore non reazionato di base abbia un guadagno di tensione $> 10^4$ e una resistenza d'ingresso dell'ordine dei $k\Omega$, lavorando con generatori con resistenze dell'ordine dei $k\Omega$ e con carichi anch'essi dell'ordine dei $k\Omega$, si comporta come un amplificatore a transimpedenza ideale.

Reazione di tensione-serie

Nella fig.6.3.4 è riportato lo schema dell'amplificatore reazionato in tensione-serie.

I valori tipici delle grandezze che intervengono in tale schema sono riportati di seguito:

$$R_g = 50 \Omega \div 5 k\Omega, \quad R_i = 10 k\Omega \div 10^4 k\Omega, \quad R_1 = 1 k\Omega, \quad R_2 = 10 k\Omega, \quad R_o = 10 \Omega, \quad R_L = 1 k\Omega, \quad A = 10^5.$$

Lo schema che utilizziamo per eseguire i calcoli è riportato in fig.6.3.5.

Si definiscono le seguenti grandezze:

$$G_s = (R_g + R_i)^{-1} = G_i G_g / (G_i + G_g), \quad G_{//} = G_g + G_i$$

$$G_{in} = (G_s + G_1 + G_2), \quad G_{out} = G_o + G_2 + G_L$$

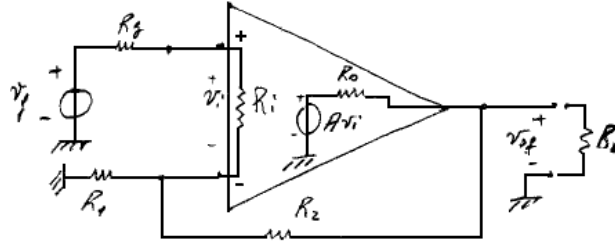


Figura 6.3.4:

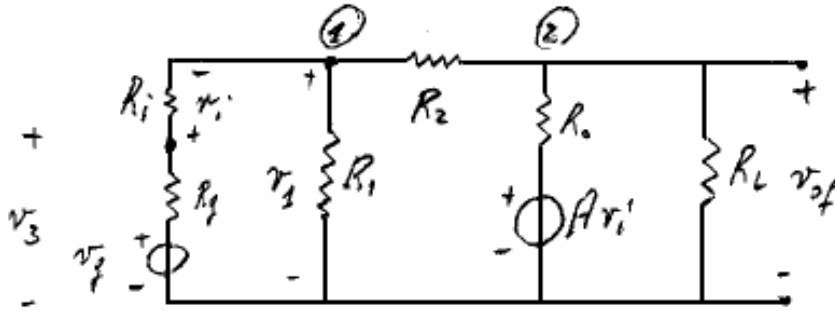


Figura 6.3.5:

Si hanno le seguenti condizioni ai nodi:

$$v_1(G_s + G_1 + G_2) = v_g G_s + v_{of} G_2$$

$$v_{of}(G_o + G_2 + G_L) = Av_i G_o + v_1 G_2$$

$$v_3(G_i + G_g) = v_g G_g + v_1 G_i$$

Mentre per la maglia d'ingresso si ha:

$$-v_3 + v_i + v_1 = 0 \quad \rightarrow \quad v_i + v_1 = v_3$$

Con calcoli elementari si ottiene:

$$A_f = v_{of}/v_g = \frac{[AG_o G_g (G_1 + G_2) + G_2 G_s G_g + G_2 G_s G_i]}{(G_{out} G_g G_{in} - G_g G_2^2 + G_{out} G_i G_{in} - G_i G_2^2 + AG_o G_2 G_g)} \quad (6.3.7)$$

La (6.3.7) è una espressione esatta che può essere semplificata, tenendo conto dei valori tipici. In particolare, il secondo e terzo termine a numeratore sono tipicamente 10^9 volte più piccoli del primo termine; inoltre, il secondo e quarto termine a denominatore sono tipicamente 10^8 volte più piccoli dell'ultimo termine, mentre il terzo termine è circa 10 volte più piccolo del primo termine che è a sua volta circa 10^4 volte più piccolo dell'ultimo termine. Tenuto conto di questi ordini di grandezza relativi, con qualche calcolo, si può riscrivere:

$$A_f = v_{of}/v_g = A^*/[1 + A^* G_2/(G_1 + G_2)] \quad (6.3.8)$$

avendo definito un nuovo guadagno disponibile:

$$A^* = A[G_o(G_1 + G_2)/G_{out} G_{in}] \quad (6.3.9)$$

che, con i valori tipici sopra introdotti, risulta di poco minore di A.

La (6.3.8) è la forma usuale della reazione di tensione serie ideale, in particolare si ha:

$$\beta = G_2/(G_1 + G_2) = R_1/(R_1 + R_2)$$

e per $A^* \rightarrow \infty$ si ha:

$$A_f = (R_1 + R_2)/R_1$$

Con calcoli analoghi, che non riportiamo, si trova che nelle precedenti ipotesi si ha:

$$R_{if} \rightarrow \infty, \quad R_{of} \rightarrow 0, \quad v_i \rightarrow 0$$

In conclusione, la reazione di tensione serie ha trasformato l'amplificatore non reazionato in un amplificatore di tensione di caratteristiche praticamente ideali.

6.4 Formazione lineare dei segnali

Nell'analisi seguente si suppone che gli amplificatori si comportino come elementi ideali e che, in particolare, non introducano limiti di banda passante, che sono viceversa determinati da resistenze e capacità esterne appositamente introdotte allo scopo di eseguire la voluta formazione lineare dei segnali.

6.4.1 Alcune premesse tecniche di analisi

Lo studio della risposta di una rete lineare, ad una qualsiasi eccitazione, per mezzo della serie o dell'integrale di Fourier, equivale alla ricerca di soluzioni stazionarie (della forma $e^{j\omega t}$) alle frequenze armoniche. Ad ogni frequenza, la risposta all'eccitazione $A \sin(\omega t + \theta) \rightarrow Ae^{j(\omega t + \theta)}$ è della forma $B \sin(\omega t + \theta + \Phi) \rightarrow Be^{j(\omega t + \theta + \Phi)}$ e tutto il contributo della rete è contenuto nelle trasformazioni $A \rightarrow B$ e $\theta \rightarrow \theta + \Phi$.

L'uso della trasformata di Laplace equivale alla ricerca di soluzioni della forma e^{pt} , con $p = \alpha + j\omega$, e quindi, a seconda dei valori di α e ω , è suscettibile di produrre soluzioni transitorie esponenziali ed esponenziali oscillanti, o anche pure oscillazioni ma allora non differisce dall'analisi di Fourier.

Per l'analisi delle reti:

nel caso stazionario (ricerca di soluzioni della forma $e^{j\omega t}$)

$$\begin{array}{ll} R & \rightarrow R \\ C & \rightarrow 1/j\omega C \quad (1/C) \int dt \\ L & \rightarrow j\omega L \quad L(d/dt) \end{array}$$

nel caso generale (ricerca di soluzioni della forma e^{pt})

$$\begin{array}{ll} R & \rightarrow R \\ C & \rightarrow 1/pC \quad (1/C) \int dt \\ L & \rightarrow pL \quad L(d/dt) \end{array}$$

In generale, la soluzione algebrica di un sistema di equazioni relative ad una rete lineare, quando espressa in forma complessa, risulta in una espressione che può essere posta nella forma:

“Trasformata della risposta =

Trasformata della funzione di trasferimento del sistema · Trasformata dell'eccitazione”

Inoltre, poiché la trasformata di Laplace della funzione δ di Dirac è 1, la trasformata della funzione di trasferimento coincide con la trasformata della risposta alla δ di Dirac.

Operazioni con la trasformata di Laplace:

$L\{f(t)\} = f(p) = \int_{0,\infty} f(t)e^{-pt} dt$ con $p = \alpha + j\omega$	
$f(t - t_0)$	$e^{-pt_0} f(p)$
$(d/dt)f(t)$	$p f(p) - [f(0^+)]^{(*)}$
$\int f(t) dt$	$f(p)/p + [f^{-1}(0^+)/p]^{(*)}$
$kf(t)$	$kf(p)$
$f_1(t) \pm f_2(t)$	$f_1(p) \pm f_2(p)$
$\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$	$\lim_{p \rightarrow \infty} f(p)$
$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$	$\lim_{p \rightarrow 0} f(p)$
$f(t/t_0)$	$t_0 f(t_0 p)$
$tf(t)$	$-(d/dp)f(p)$
$(1/t)f(t)$	$\int_{0,\infty} f(p) dp$

(*) Tali termini si annullano se al tempo 0 la tensione di segnale ai capi del condensatore è nulla e la corrente di segnale sull'induttore è nulla.

Esempio

Nella fig.6.4.1 è riportato lo schema di un rivelatore con associato preamplificatore di carica (integratore di Miller) seguito da un formatore CR-RC che esegue l'operazione di differenziazione per mezzo di un circuito di cancellazione polo-zero.

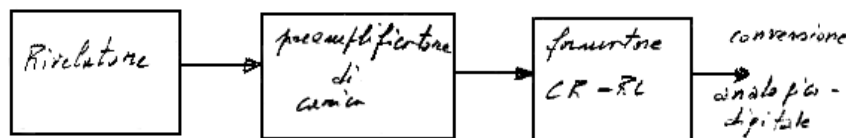


Figura 6.4.1:

Come mostrato nella fig.6.4.2, il rivelatore, che può essere sia un rivelatore Si(Li) per X che un rivelatore HpGe per γ , è schematizzato come un generatore di corrente di segnale. L'andamento temporale della corrente approssimato con una delta per tener conto che le costanti di tempo di formazione nel circuito CR-RC sono di norma molto più lunghe del tempo di transito dei portatori di carica nel rivelatore. In parallelo al generatore è rappresentata la capacità totale a freddo (C_f), che nei sistemi ben dimensionati dipende principalmente (e con contributi simili) dal rivelatore e dal JFET del primo stadio di amplificazione. Il rivelatore è accoppiato in continua con un preamplificatore di carica che è un integratore di Miller con feedback resistivo. Per ottimizzare il rapporto segnale/rumore la costante di tempo del gruppo di reazione $C_f R_f$ dell'integratore è tipicamente

dell'ordine dei millisecondi. L'uscita del preamplificatore è successivamente trattata da un formatore CR-RC attivo, montato attorno ad un amplificatore base che consideriamo di caratteristiche ideali dal punto di vista della banda passante e di guadagno molto elevato. Alla fine, il segnale di uscita del formatore è inviato, per la classificazione, ad un convertitore analogico-digitale che discuteremo brevemente nel successivo capitolo.

Risposta del preamplificatore:

Si determina facilmente con riferimento alla fig.6.4.2. In particolare, è utile ricordare che, se l'amplificatore base ha amplificazione molto alta e non ha limiti di banda passante, la tensione di segnale v_i ai suoi terminali di ingresso deve essere costantemente nulla.

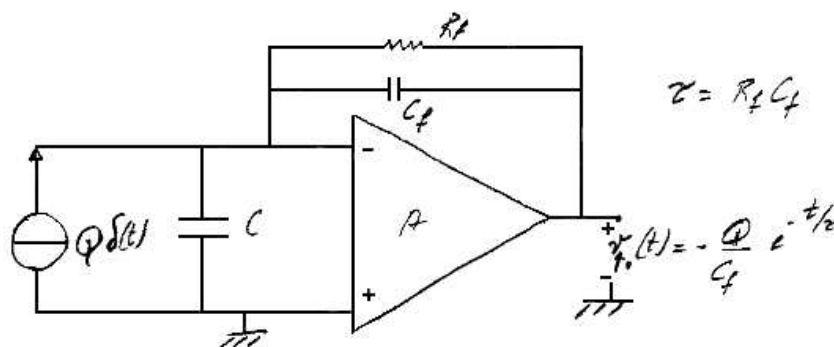


Figura 6.4.2:

Ciò significa che l'uscita del preamplificatore deve adeguare istante per istante il suo valore di tensione in modo che la corrente lanciata dal generatore fluisca integralmente attraverso il gruppo $C_f R_f$ di reazione. In termini di trasformate di Laplace, si ottiene per la tensione di uscita $v_{po}(p)$ del preamplificatore:

$$v_{po}(p) = -Q[R_f/(1 + pC_f R_f)] = -(Q/C_f)[\tau/(1 + p\tau)] = -(Q/C_f)[1/(p + 1/\tau)]$$

avendo posto $\tau = C_f R_f$. Questo è un risultato approssimato perché suppone $A = \infty$.

La maggior parte delle funzioni di trasferimento delle reti di formazione lineare utilizzate nella rivelazione nucleare si presentano nella forma di rapporti di polinomi: gli zeri del polinomio a numeratore prendono il nome di zeri della funzione di trasferimento, gli zeri del polinomio a denominatore prendono il nome di poli della funzione di trasferimento.

Utilizzando le tabelle delle antitrasformate di Laplace si trova:

$$v_{po}(t) = -(Q/C_f)e^{-t/\tau}$$

Risposta del filtro CR-RC

Per le notazioni si fa riferimento alla fig.6.4.3 e si eccita la rete con la forma esponenziale sopra trovata ma di ampiezza unitaria. Inoltre, per semplicità, prendiamo eguali le resistenze R_2 e R_3 . Applicando di nuovo il concetto che la tensione di segnale fra i terminali d'ingresso dell'amplificatore non reazionato deve essere costantemente nulla, e che quindi la corrente nel ramo di ingresso deve essere eguale, a tutti i tempi, a quella del ramo di reazione, si trova la trasformata della tensione di uscita del filtro $v_o(p)$:

$$v_o(p) = [1/(p + 1/\tau)](1/\tau_3)[p + 1/\tau_1]/[(p + 1/\tau_1)(p + 1/\tau_3)]$$

avendo posto: $\tau_1 = C_1 R_1$; $\tau_{//} = C_1 [R_1 R_2 / (R_1 + R_2)]$; $\tau_3 = C_3 R_3$.
 Nei casi pratici $R_1 \gg R_2$ per cui $\tau_{//} \simeq C_1 R_2$.

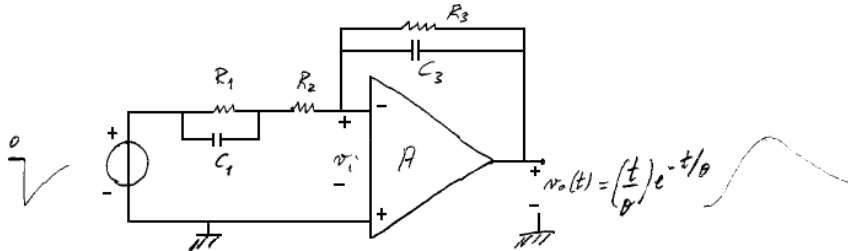


Figura 6.4.3:

Scegliendo $\tau_1 = \tau$, si opera una cancellazione polo-zero e si ottiene un nuovo decadimento esponenziale puro determinato dalla costante di tempo $\tau_{//}$, mentre l'integrazione ha costante di tempo τ_3 . Facendo $\tau_3 = \tau_{//} = \theta$ si ottiene infine per la trasformata della risposta:

$$v_o(p) = \frac{1}{p + \frac{1}{\tau}} \cdot \frac{1}{\tau_3} \cdot \frac{p + \frac{1}{\tau_1}}{(p + \frac{1}{\tau_{//}})(p + \frac{1}{\tau_3})} = \left\{ \tau_1 = \tau ; \tau_{//} = \tau_3 = \theta \right\} = \frac{1}{\theta} \frac{1}{(p + \frac{1}{\theta})^2}$$

questo è un caso particolare di polo multiplo, la cui soluzione generale è la seguente:

$$L^{-1}\{(p + 1/\theta)^{-n}\} = t^{n-1} e^{-t/\theta} / (n-1)!$$

Nel caso particolare si ottiene quindi ($n = 2$):

$$v_o(t) = (t/\theta) e^{-t/\theta}$$

e, più in generale, tenuto conto dell'ampiezza di uscita dal preamplificatore e di una possibile amplificazione K associata al formatore attivo (R_3/R_2), il risultato può essere espresso come (a meno del segno):

$$v_o(t) = K(Q/C_f)(t/\theta) e^{-t/\theta}$$

Come avremo modo di discutere nel paragrafo 8.4 a proposito del rapporto segnale/rumore, è utile considerare il caso di un segnale a step di ampiezza Q/C_f applicato al circuito CR-RC di fig.6.4.4 caratterizzato ancora da costanti di differenziazione e integrazione eguali (τ) e che non introduce amplificazione.

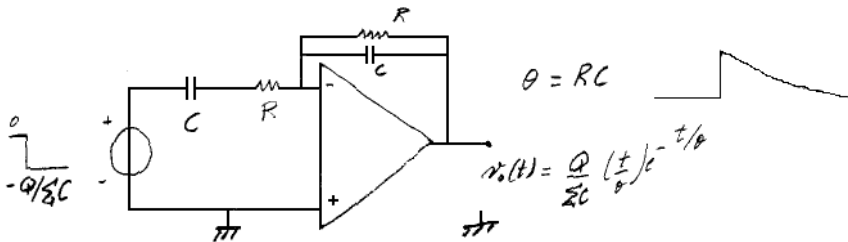


Figura 6.4.4:

Il risultato che si ottiene e che utilizzeremo nel seguito, è il seguente:

$$v_o(t) = (Q/C_f)(t/\tau) e^{-t/\tau}$$

che per $t = \tau$ diventa $v_{o \max} = e^{-1}(Q/C_f) \rightarrow v_{o \max}^2 = e^{-2}(Q/C_f)^2$

6.5 Base-Line Restoration (BLR)

Discuteremo solo i principi generali di questa operazione. Per iniziare, riferiamoci alla fig.6.5.1, nella quale è presente un generatore di fluttuazione della linea di base, che per comodità di visualizzazione può essere pensato come un generatore sinusoidale di bassa frequenza (per esempio la frequenza di rete). In questa prima discussione supponiamo anche che non siano presenti segnali all'ingresso dell'amplificatore.

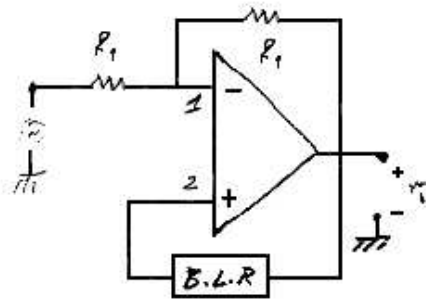


Figura 6.5.1:

L'operazione ideale si svolge nel modo seguente: le fluttuazioni di tensione all'ingresso 1 sono riproposte in fase all'ingresso 2 in modo da costituire un esatto common-mode, e la tensione di uscita varia di quanto basta per generare l'opportuno segnale di errore. Nella fig.6.5.2 è reso più evidente e quantitativo quanto sopra detto.

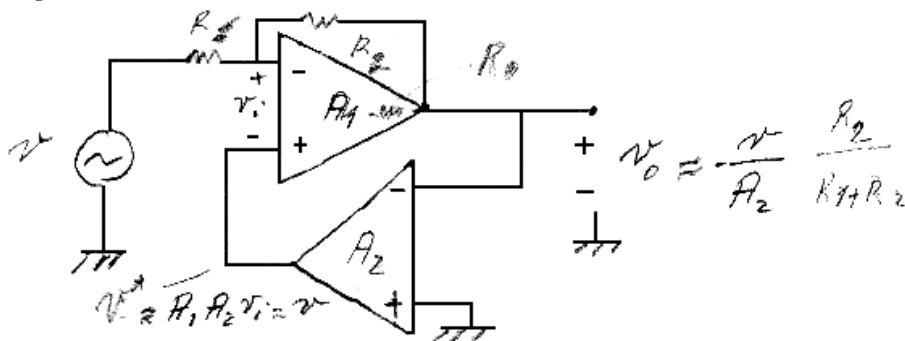


Figura 6.5.2:

Calcolo di v_o con valori realistici dei parametri utilizzati.

$$R_1 = R_2 = R = 1 \text{ k}\Omega; R_o = 10 \text{ }\Omega; G = 10^{-3} \text{ }\Omega^{-1}; G_o = 10^{-1} \text{ }\Omega^{-1}$$

$R_i \sim \infty; R_o \sim 0$ per ambedue gli amplificatori

$$A_1 = 10^4; A_2 = 10^2$$

Schema equivalente del circuito di fig.6.5.2:

Equazioni ai nodi (forma di Millman della legge dei nodi):

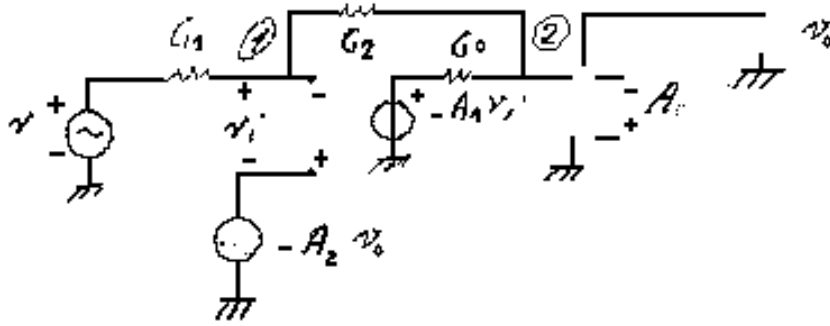


Figura 6.5.3:

$$1) (v_i - A_2 v_o)(G_1 + G_2) = v G_1 + v_o G_2 \quad \rightarrow \quad v_i(G_1 + G_2) = v G_1 + v_o(G_2 + A_2 G_2 + A_2 G_1)$$

$$v_i = \frac{G_1}{G_1 + G_2} v + \frac{G_2 + A_2 G_2 + A_2 G_1}{G_1 + G_2} v_o \quad (a)$$

$$2) v_o(G_0 + G_2) = -A_1 v_i G_0 + (v_i - A_2 v_o) G_2 \quad \rightarrow \quad v_i(G_1 - A_1 G_0) = v_o(G_0 + G_2 + A_2 G_0)$$

$$v_i = \frac{G_1 + G_2 + A_2 G_2}{G_2 - A_1 G_0} v_o \quad (b)$$

Dall'uguaglianza tra (a) e (b) segue:

$$\frac{v_o}{v} = \frac{G_1 G_2 - A_1 G_0 G_1}{G_0(G_1 + G_2) + G_0 A_1 G_0 + G_0 A_2 A_1 (G_1 + G_2) + G_1 G_2}$$

che, con i valori dati diventa:

$$\frac{v_o}{v} = -\frac{1}{A_2} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \sim -\frac{1}{200}$$

Si ricava inoltre che

$$-A_2 v_o \sim -A_2 \left(-\frac{1}{A_2} \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) v = v \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

È facile verificare che per $A_2 \rightarrow \infty$ si ha che $v_i \rightarrow 0$.

Occorre tuttavia precisare che, senza ulteriori accorgimenti, all'arrivo di un segnale questo verrebbe annullato nello stesso modo delle fluttuazioni. Per questa ragione l'arrivo del segnale deve essere riconosciuto per tempo da un sistema a soglia, con soglia, per quanto possibile, vicina al rumore.

Nella fig.6.5.4 è mostrato lo schema di principio di un circuito adatto a realizzare la "Gated Base-Line Restoration (GBLR)". In questo schema A_2 è l'amplificatore di servizio che deve essere interrotto al momento della trasmissione di un segnale. Durante la fase di segnale il terminale d'ingresso di riferimento dell'amplificatore A_1 deve essere mantenuto al livello finale di correzione: per fare questo occorre un elemento di memoria analogica (condensatore C).

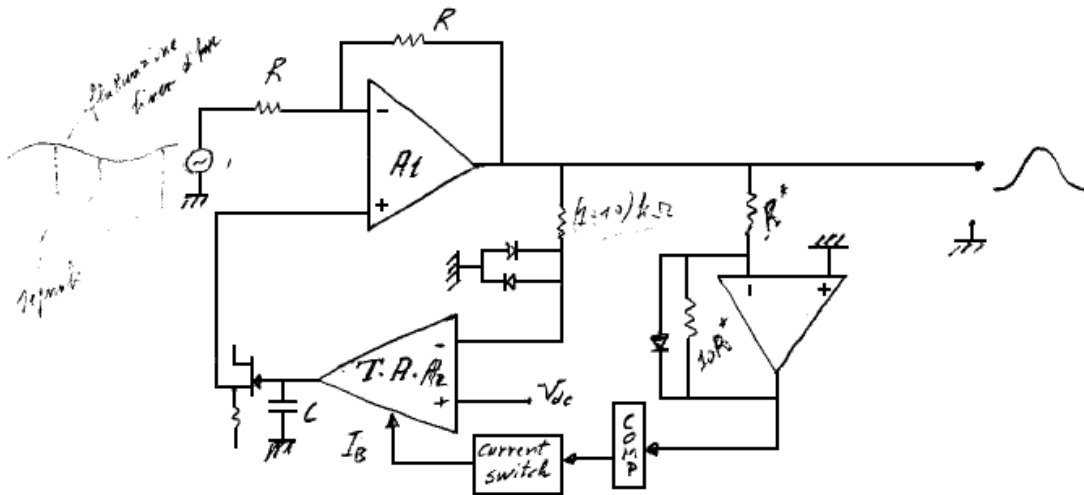


Figura 6.5.4:

L'amplificatore A_2 è di norma un amplificatore a transconduttanza che è stato riportato in fig.6.5.5 per mettere bene in evidenza le potenzialità della tecnica integrata. 1, 2, 3, 4 sono specchi di corrente (current mirrors) che basano il loro funzionamento sulla identità delle giunzioni al Silicio realizzate con tecnica integrata. Sopprimendo la corrente I_B si esegue l'operazione di Gate, mentre nelle fasi di assenza di segnale, le variazioni di carica di C dipendono dalla situazione ai terminali d'ingresso dell'amplificatore a transconduttanza. Il metodo è tanto più efficace quanto più la durata dei segnali è breve rispetto al "periodo" della fluttuazione.

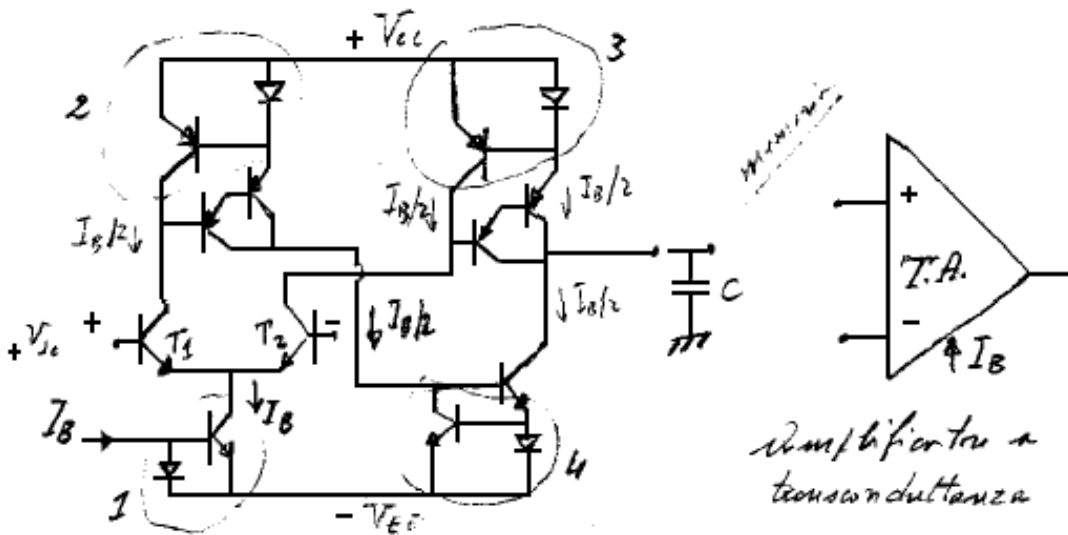


Figura 6.5.5:

In fig.6.5.6 è riportato, in forma semplificata, uno schema "completo" di un amplificatore per spettroscopia.

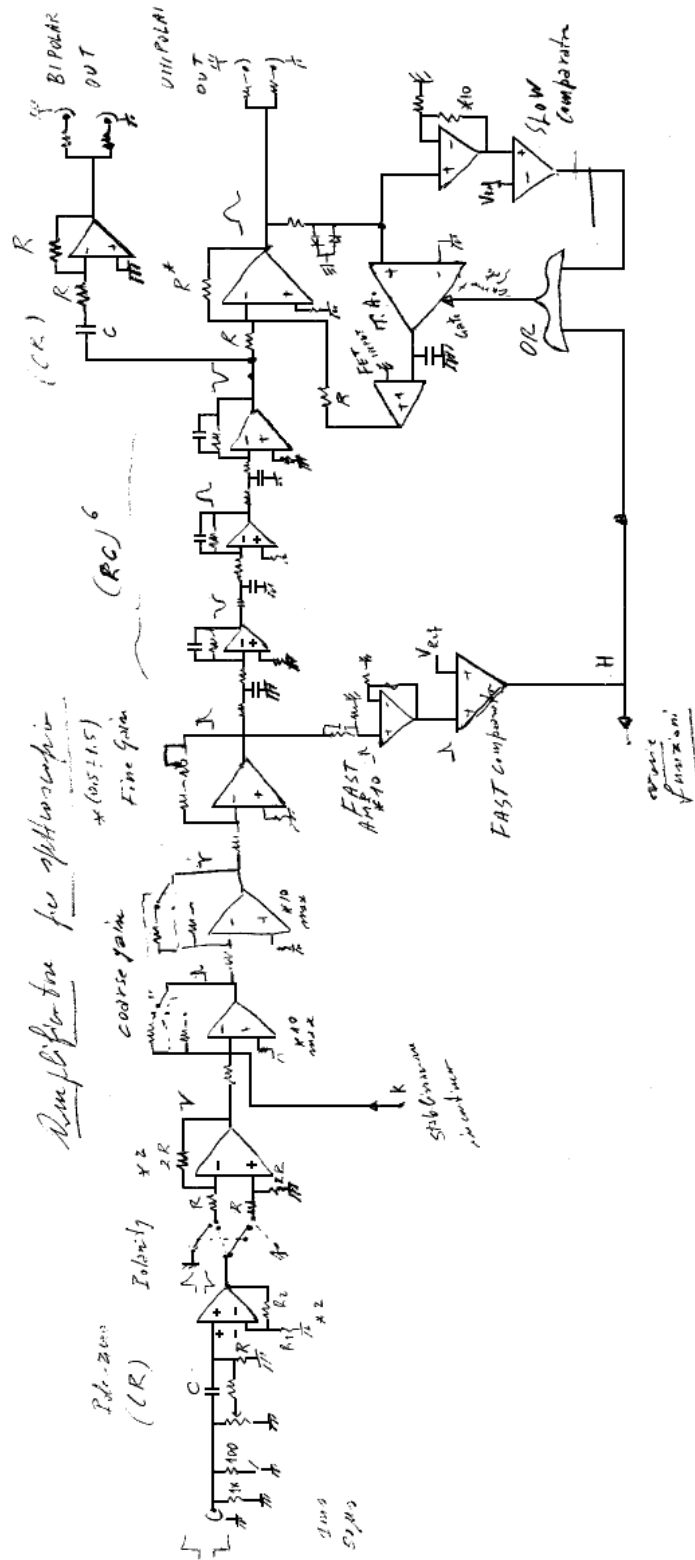


Figura 6.5.6:

7 Conversione analogico-digitale

7.1 Memoria analogica

Questa operazione, denominata anche raddrizzamento di cresta o allungamento (stretching), è di importanza centrale nella quantificazione di ampiezza dei segnali. Il circuito schematico di fig.7.1.1 mostra che si tratta in sostanza di un voltage-follower non lineare.

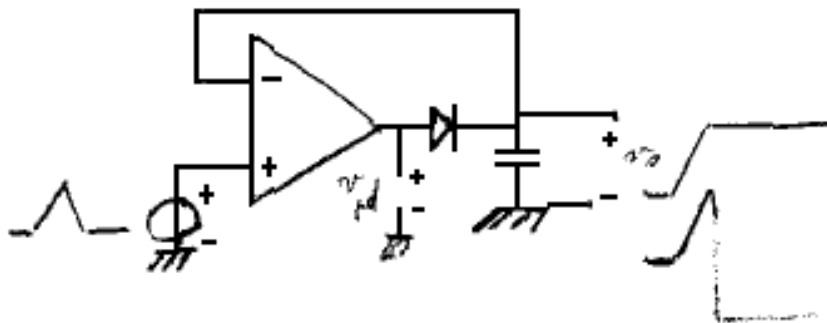


Figura 7.1.1:

Il circuito di fig.7.1.2 mostra una memoria analogica di alta precisione, come quelle impiegate nei convertitori analogico-digitali della Silena.

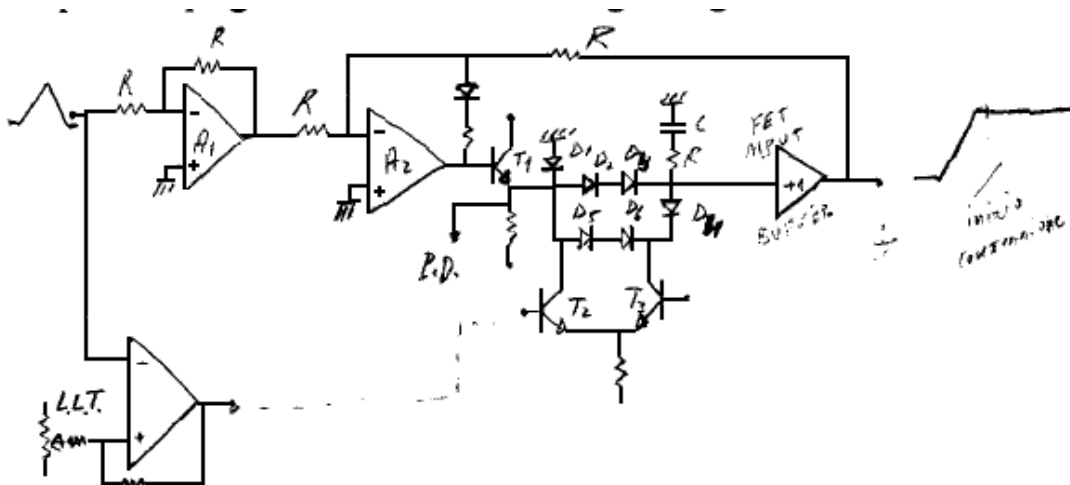


Figura 7.1.2:

Diamo una breve descrizione funzionale delle operazioni eseguite dal circuito di fig.7.1.2. L'amplificatore +1 è un buffer a FET polarizzato in tensione. In assenza di segnali, la corrente fluisce in T3 tramite i diodi al Silicio D_5 e D_6 . D_2 e D_4 sono anche essi al Silicio, mentre D_3 è un diodo metallo-semiconduttore (hot carrier) a bassa caduta, I diodi D_2 , D_3 , D_4 sono in debolissima conduzione, tuttavia largamente sufficiente rispetto alla corrente richiesta dal FET buffer per la sua corretta polarizzazione.

Durante la fase di segnale (positivo nell'esempio), fino al raggiungimento del massimo, il sistema si comporta come un amplificatore lineare.

Nel loop di reazione si osservano questi fatti principali: 1) la banda passante è definita prevalentemente dall'amplificatore A_2 e dal gruppo RC , 2) il gruppo RC determina (assieme alla disponibilità di corrente del transistor T_1) lo slew-rate del sistema.

I transistori T_2 e T_3 formano il sistema di scarica automatica del condensatore C : questa viene eseguita nella condizione T_2 OFF e T_3 ON. Solo se lo switch di corrente è commutato nell'altra situazione ha luogo l'operazione di mantenimento nella memoria analogica del valore del massimo raggiunto dal segnale. Per avere questa situazione è necessario un circuito ausiliario (soglia) che decida che il segnale in arrivo deve essere soggetto all'operazione di stivaggio nella memoria.

Quello descritto è anche il principio di funzionamento dei circuiti denominati Stretcher o allungatori, che si prestano sia ad operazioni di Gate che di ritardo analogico.

7.2 Digitalizzazione

La digitalizzazione del valore di picco di un segnale ha sempre presente una memoria analogica. La codifica digitale del valore di tensione presente nella memoria analogica può essere fatta seguendo varie tecniche.

Elenchiamo qui le più comunemente utilizzate:

- * Scarica lineare della capacità di memoria fino ad un livello prestabilito e conteggio di un oscillatore con start sincrono con l'inizio della scarica (metodo Wilkinson). Tale metodo è utilizzato nei convertitori Silena a 100 e 400 MHz .

- * Confronto con l'uscita di un DAC (digital to analog converter)

- * Confronto con pesi successivi + sliding scale. Tale metodo è utilizzato nei convertitori Silena UHS.

- * Conversione parallelo (flash converter)

Questi metodi sono descritti in maniera completa per esempio in Taub e Schilling.

A titolo di esempio riportiamo nella fig.7.2.1 le funzioni essenziali di un convertitore analogico-digitale che utilizza il metodo Wilkinson. Questo è lo schema semplificato dei convertitori da 100 MHz che sono comunemente utilizzati per fare misure PIXE.

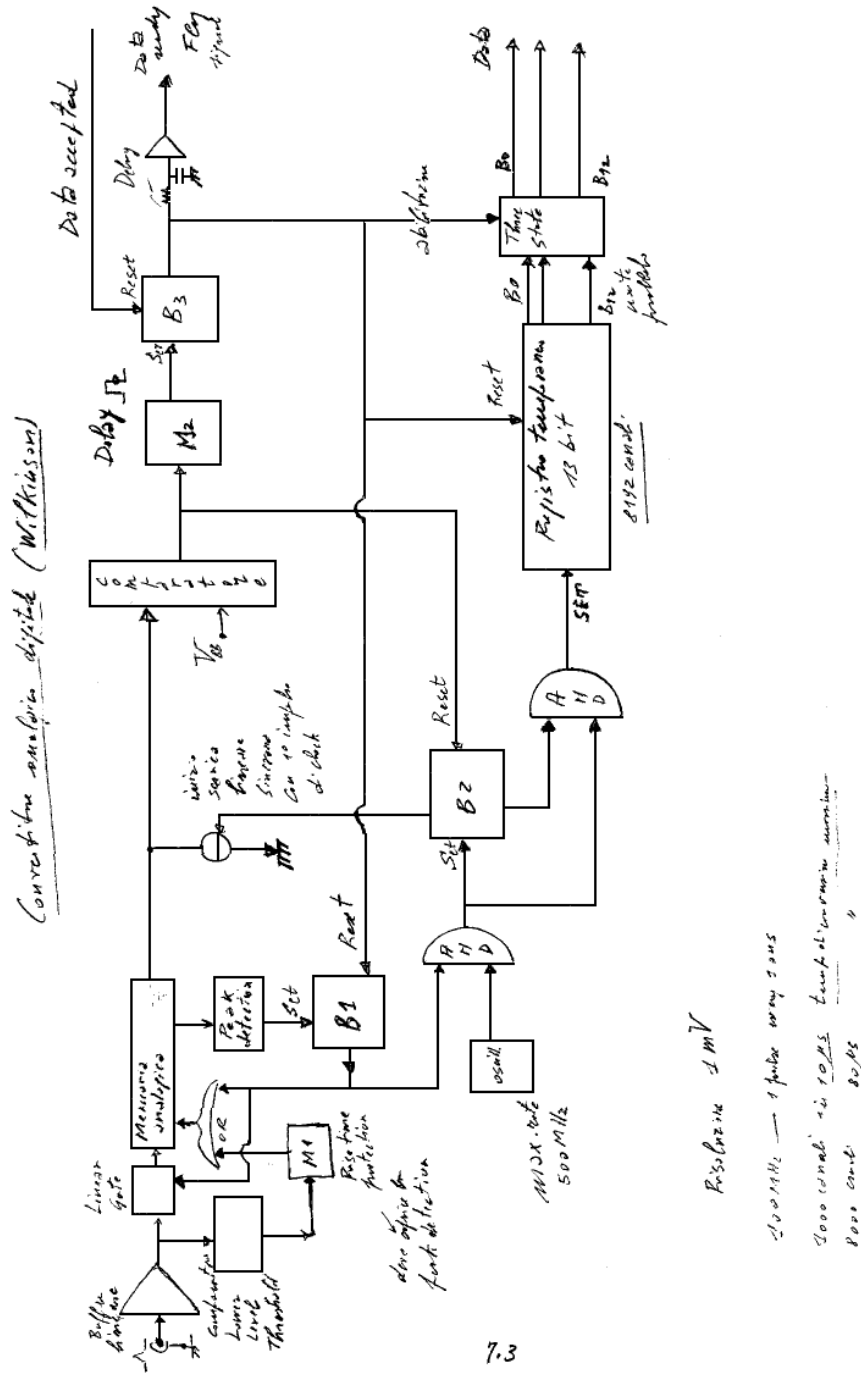


Figura 7.2.1:

8 Rumore elettrico

8.1 Considerazioni preliminari

Se si osserva l'uscita di un amplificatore ad alto guadagno ($v_o/v_i \sim 10^4 \div 10^6$), in assenza di segnali applicati all'ingresso, utilizzando un oscillografo con sufficiente sensibilità sull'asse verticale ($10 \div 100 \text{ mV/divisione}$), si nota che la tensione di uscita fluttua, attorno ad un valor medio, in maniera imprevedibile come andamento nel tempo sul breve termine, ma con una "fascia di occupazione" dello schermo dell'oscillografo di ampiezza stazionaria, quando si usino basi dei tempi sufficientemente lunghe.

Fenomeni di questo tipo prendono il nome di rumore elettrico e mostrano un carattere stazionario.

Il rumore elettrico nasce da due componenti principali che sono state chiamate "rumore termico" (thermal noise) e "rumore granulare" (shot noise).

La ricerca di una interpretazione e di una quantificazione di queste componenti di rumore, dovuta principalmente a Schottky per il rumore granulare e a Johnson e Nyquist per il rumore termico, fu indotta da alcuni fatti sperimentali (1910 - 1920). Nel tentativo di captare trasmissioni radio, sempre più deboli all'aumentare della distanza fra trasmettitore e ricevitore, si cercò dapprima di aumentare, per quanto possibile, il numero di stadi di amplificazione del ricevitore. Ci si rese conto, tuttavia, che oltre un certo limite diventava inutile iterare il processo per l'aumentare di un "rumore acustico" che finiva per mascherare la presenza di un qualunque segnale "intelligente". Fu anche osservato che l'entità di questo rumore dipendeva dal valore della resistenza utilizzata per polarizzare la griglia della prima valvola del ricevitore. Ci si accorse anche che la sostituzione della resistenza con un cortocircuito non era sufficiente ad eliminare il rumore all'uscita dell'amplificatore, per quanto questo risultasse nella maggior parte dei casi molto attenuato. Fu riconosciuto altresì che il rumore residuo doveva essere posto in relazione al meccanismo di funzionamento dei tubi a vuoto.

Il rumore delle resistenze fu denominato rumore termico e quello delle valvole rumore granulare. Secondo Bell ("Electrical noise") la situazione si può schematizzare come segue:

$$J = nev ; \quad \Delta J = ev\Delta n(\text{rumore granulare}) + en\Delta v(\text{rumore termico}) \quad (8.1.1)$$

Secondo altri autori (Campbell, Valley e Wallman, Deighton etc.) non esiste una vera distinzione logica (all'origine dei meccanismi) fra questi due tipi di rumore e, almeno in via di principio, qualunque tipo di rumore può essere ricondotto a rumore granulare (vedere per esempio descrizione del rumore delle resistenze e dei diodi e transistor nel dominio del tempo secondo Campbell e Deighton). È tuttavia mantenuta la distinzione nominale per ricordare la generalità del ragionamento termodinamico mediante il quale Nyquist determinò la corretta formulazione del rumore delle resistenze. Un simile tipo di ragionamento non si applica al caso del rumore granulare per quantificare il quale occorre fare ricorso ad un modello microscopico di conduzione della corrente.

8.2 Descrizione del rumore termico in frequenza

Gli esperimenti e la teoria prevedono che qualunque impedenza rumorosa $Z(f) = R(f) + jX(f)$, può essere sostituita su ogni banda infinitesima di frequenza df attorno alla frequenza f , da una eguale impedenza non rumorosa con in serie un generatore di tensione sinusoidale di frequenza f e di ampiezza efficace:

$$dv_t = [4kTR(f) df]^{1/2} \quad (8.2.1)$$

come mostrato in fig.8.2.1.

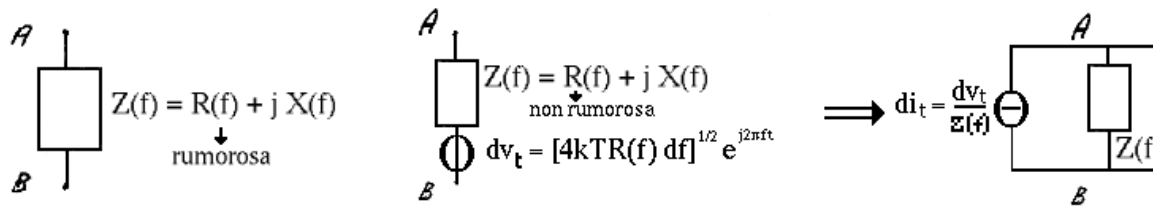


Figura 8.2.1:

In particolare se $R(f) = R$ si viene ad avere il cosiddetto “rumore bianco”.

Il rumore complessivo si ottiene sommando in quadratura il contributo degli infiniti generatori di rumore. Per chiarire quanto detto facciamo un esempio:

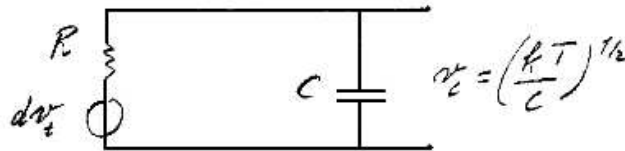


Figura 8.2.2:

Nel caso del semplice circuito RC di fig.8.2.2, applicando le ordinarie leggi dei circuiti al generatore dv_t , la tensione quadratica di rumore nel df che si sviluppa ai capi del condensatore è:

$$dv_c = dv_t \left\{ \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} \cdot \frac{1}{j\omega C} \right\} = dv_t \frac{1}{1 + j\omega CR} = (4kTR df)^{1/2} e^{j\omega t} \cdot \frac{1}{1 + j\omega CR}$$

$$|dv_c|^2 = (4kTR df) / [1 + (\omega CR)^2]$$

e la tensione quadratica totale ai capi di C è:

$$v_C^2 = 4kTR / (2\pi CR) \int_{0, \infty} d(\omega CR) [1 + (\omega CR)^2] = (2/\pi)(kT/C) [\text{atan}(\omega CR)]_0^\infty = kT/C \quad (8.2.2)$$

Quindi, al variare di R si ha lo stesso integrale ma con diversa distribuzione di frequenza: in particolare, valori elevati di resistenza concentrano lo spettro di rumore in un ambito

di basse frequenze.

Osserviamo infine che la formula di Johnson-Nyquist (8.2.1) non è corretta, perché quando si integri su tutte le frequenze diverge. Già Nyquist suggerì che ciò era dovuto al fatto che, anche supposto $R(f) = R$ a tutte le frequenze, nella sua derivazione aveva utilizzato la formulazione classica del principio dell'equipartizione dell'energia. Se ad ogni grado di libertà si assegna, invece che il valore medio di energia $kT/2$ indipendente dalla frequenza, il valore previsto dalla formula di Planck, si ottiene:

$$(dv_t)^2 = 4R[hf/(e^{hf/kT} - 1)] df \quad (8.2.3)$$

Questi generatori svaniscono per $f_0 \sim kT/h \sim 2.1 \cdot 10^{10} THz$; ovvero, a temperatura ambiente ($T = 300 K$): $f_0 \sim 10^{13} Hz$, e la fluttuazione totale diventa finita:

$$v_t^2 = (2R/3h)(\pi kT)^2 \quad (8.2.4)$$

Nel caso di una resistenza di 1Ω a $300 Kelvin$: $v_t \sim 4 \cdot 10^{-4} V = 400 \mu V$.

8.3 Descrizione del rumore granulare in frequenza

Se I è la corrente che fluisce in un diodo (se a vuoto, in condizioni di saturazione), al diodo reale si può sostituire un diodo ideale con in parallelo un generatore di corrente di rumore sinusoidale di ampiezza efficace (per ogni banda di frequenza df attorno alla frequenza f):

$$di_g = (2eI df)^{1/2} \quad (\text{Scottky, rumore bianco}) \quad (8.3.1)$$

Anche la (8.3.1) è una espressione approssimata, che vale fino a frequenze dell'ordine dell'inverso del tempo di volo degli elettroni da catodo a anodo. Quindi $\sim 1 GHz$ per tubi a vuoto di dimensioni usuali ($1 cm$) e $\sim 1 \div 10 THz$ per diodi a semiconduttore (valore collegato al tempo di attraversamento della zona di barriera).

8.4 Rapporto “segnale/rumore” di un preamplificatore di carica

In questa analisi ci limiteremo, per semplicità, al caso di una camera di ionizzazione (condensatore piano) seguita da un integratore di Miller il cui primo elemento attivo è un JFET, come mostrato in fig.8.4.1.

Si suppone che il passaggio di una particella o di radiazione elettromagnetica (X, γ) generi una δ di corrente, il cui integrale Q è proporzionale all'energia rilasciata nel rivelatore, secondo una costante di valor medio ε (energia media per creare una coppia ione-elettrone $\sim 30 eV$). Come già detto, agli effetti del “segnale” e del “rumore” il rivelatore può essere considerato, in termini elettrici, come un generatore di corrente impulsiva $Q\delta(t)$ con in parallelo la sua capacità C_D . Lo schema elettrico è mostrato in fig.8.4.2, dove sono riportate esplicitamente la capacità parassita dei collegamenti $C_S = C_{Stray}$, e le capacità d'ingresso C_{gs} e C_{gd} del JFET.

Il calcolo della tensione di segnale in uscita dal preamplificatore è semplice. Per effetto Miller la carica si accumula sulla capacità dinamica $C_D + C_S + C_{gs} + C_{gd} + (1 + A)C_f$,

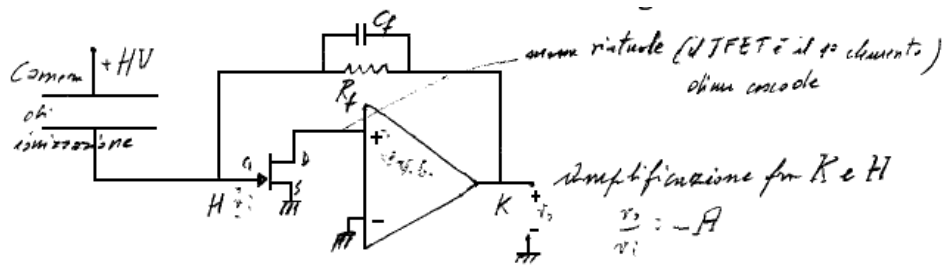


Figura 8.4.1:

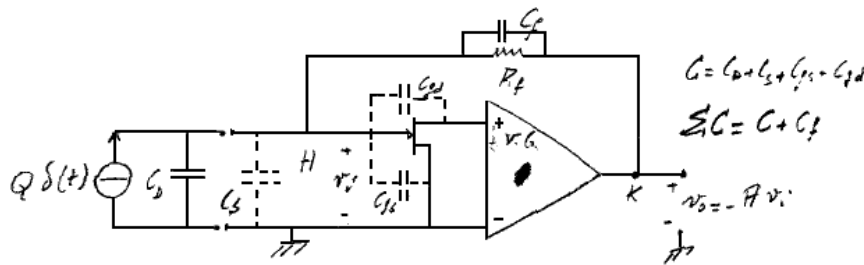


Figura 8.4.2:

per cui si ha:

$$v_i = Q / (\sum C + AC_f)$$

avendo posto $\sum C = C_D + C_S + C_{gs} + C_{gd} + C_f$.

$\sum C$ è la somma delle capacità statiche ed è detta anche “capacità a freddo” all’ingresso del preamplificatore.

Segue:

$$v_o = -AQ / (\sum C + AC_f) \quad (8.4.1)$$

e facendo in modo che sia $AC_f \gg \sum C$, si ha:

$$v_o = -Q / C_f \quad (8.4.2)$$

Dalla (8.4.2) proviene la denominazione di “amplificatore di carica” per questo tipo di stadio di amplificazione che è un integratore di Miller.

L’andamento in funzione del tempo della tensione di uscita è:

$$v_o = -(Q/C_f)e^{-t/\tau} \quad \text{con} \quad \tau = R_f C_f \quad (8.4.3)$$

Le sorgenti principali di rumore, mostrate nello schema di fig.8.4.3, sono associate al JFET e alla resistenza di reazione R_f . Altri tipi di rivelatori, come ad esempio quelli a semiconduttore, forniscono un ulteriore contributo di rumore che è strutturalmente identico a quello di corrente di gate del JFET e della resistenza R_f .

In un JFET sono presenti tre sorgenti principali di rumore:

1) rumore termico di canale, imputabile al moto di agitazione termica dei portatori di

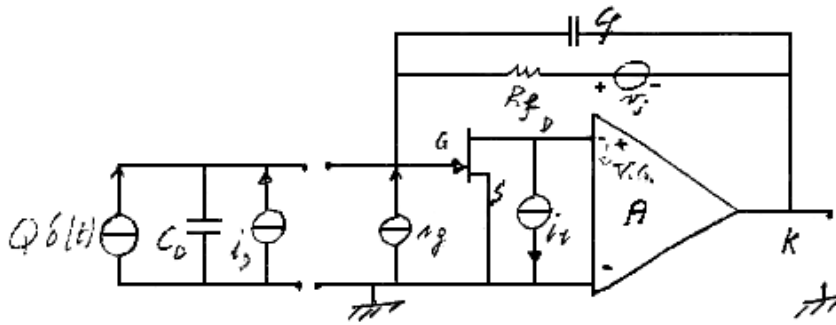


Figura 8.4.3:

maggioranza nel canale.

NOTA

Come mostrato in fig.8.4.4 indichiamo, dalla teoria di Van der Ziel, con $i_t = [4kT(0.7 g_m) df]^{1/2}$ il generatore termico di corrente di rumore infinitesimo che agisce nel canale.

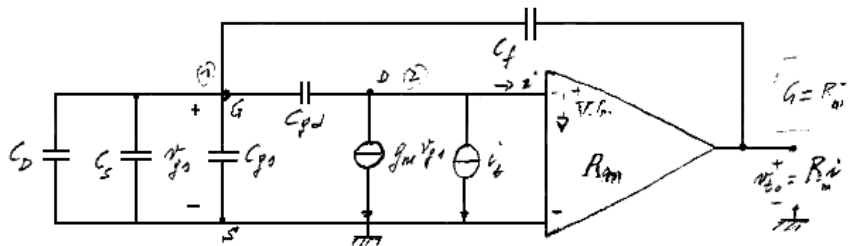


Figura 8.4.4:

La forma di Millman della legge dei nodi, applicata al circuito di fig.8.4.4, fornisce il risultato:

$$\text{nodo 1: } v_{gs} j\omega(C_D + C_S + C_{gs} + C_{gd} + C_f) = v_{to} j\omega C_f; \quad v_{gs} = v_{to} (C_f / \sum C)$$

$$\text{nodo 2: } -v_{to} G - i_t - g_m v_{gs} + j\omega C_{gd} v_{gs} = 0$$

combinando le due espressioni precedenti segue:

$$-v_{to} G - i_t + (-g_m + j\omega C_{gd}) v_{to} (C_f / \sum C) = 0$$

e anche:

$$i_t \sum C = -v_{to} G \sum C + C_f (-g_m + j\omega C_{gd}) v_{to} \quad (8.4.4)$$

Vediamo ora lo schema del JFET di fig.8.4.5, nella quale è riportato in serie al gate un generatore di tensione di rumore di valore i_t/g_m .

$$(-i_t/g_m + v_{gs}) j\omega(C_D + C_S + C_{gs} + C_{gd} + C_f) = v_{to} j\omega C_f; \quad v_{gs} = v_{to} (C_f / \sum C) + i_t/g_m$$

$$-v_{to} G - g_m v_{gs} + j\omega C_{gd} (v_{gs} - i_t/g_m) = 0$$

combinando le due precedenti espressioni, con qualche calcolo si ottiene:

$$v_{to} \left[G \sum C - C_f(j\omega C_{gd} - g_m) \right] = -i_t \sum C \quad (8.4.5)$$

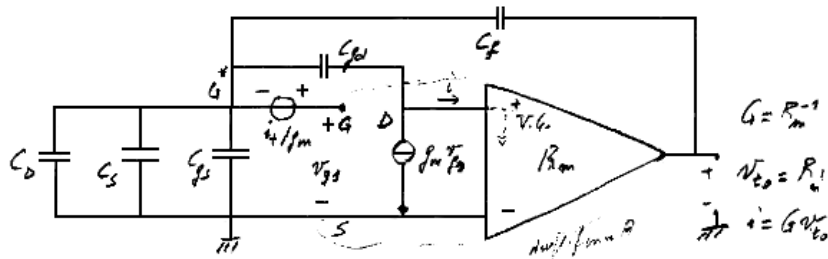


Figura 8.4.5:

Siccome le espressioni (8.4.4) e (8.4.5) sono identiche, i due generatori di rumore sono equivalenti. Infine il generatore termico di rumore di canale può essere riportato, come si usa, in serie al gate del JFET e il suo valore è:

$$(dv_t)^2 = [4kT(0.7/g_m) df] \quad (8.4.6)$$

2) una sorgente di rumore granulare associata alla corrente di polarizzazione gate-canale del JFET (full shot noise). Essa agisce come un generatore di corrente sul gate del JFET e, se I_g è la corrente di gate, il generatore di rumore è:

$$(di_g)^2 = 2eI_g df \quad (8.4.7)$$

3) una sorgente di rumore di eccesso del tipo $1/f$ che non trattiamo perché di solito può essere confinata a frequenze molto basse

L'altra sorgente di rumore che compare nella fig.8.4.3 è associata alla resistenza di reazione R_f e il generatore di rumore è:

$$(dv_j)^2 = 4kTR_f df \quad (8.4.8)$$

Quello che ora interessa calcolare è il rapporto segnale/rumore all'uscita del preamplificatore. Come si usa fare, per il segnale prenderemo il suo valore massimo:

$$v_o = -AQ/(\sum C + AC_f) \text{ e il suo quadrato } v_o^2 = A^2Q^2/(\sum C + AC_f)^2$$

Calcoliamo ora i contributi dei generatori di rumore.

1) *Contributo del generatore di tensione di rumore in serie al gate del JFET (rumore termico di canale, detto anche δ -noise).*

Basandosi sullo schema di fig.8.4.6 dove, per semplicità di notazione si è posto $dv_t = v_\delta$, si ha:

$$v_i = v_{\delta o} C_f / \sum C + v_\delta$$

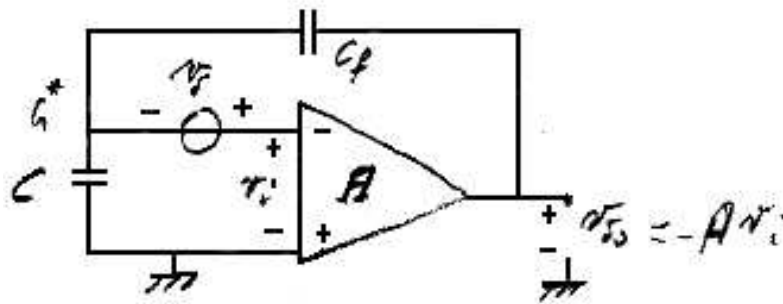


Figura 8.4.6:

$v_{\delta o} = -A v_i = -A(v_{\delta o} C_f / \sum C + v_{\delta})$
 e infine:

$$v_{\delta o} = -[A \sum C / (\sum C + A C_f)] v_{\delta} \quad (8.4.9)$$

Questo risultato suggerisce le seguenti osservazioni: per $\sum C \sim C_f$ si ha che $A C_f \gg \sum C$ e quindi $v_{\delta o} \sim -(\sum C / C_f) v_{\delta}$, che mostra un aumento lineare del rumore di uscita all'aumentare della capacità del rivelatore. Nell'altro caso estremo che sia $\sum C \gg A C_f$ il rumore serie è amplificato A . In particolare, se $\sum C$ diventa molto più grande della capacità di reazione, si ha il caso limite $v_{\delta o} \sim -A v_{\delta}$. Cioè, quando la capacità del rivelatore diventa molto grande manca l'effetto della reazione sul rumore termico di canale.

2) *Contributo del generatore di rumore di corrente di gate (step noise)*

Basandosi sullo schema e sulle notazioni di fig.8.4.7 e facendo uso del teorema di Miller, si ha:

$v_i = i_g / j\omega (\sum C + A C_f)$
 e anche:

$$v_{i g o} = -A i_g / j\omega (\sum C + A C_f) \quad (8.4.10)$$

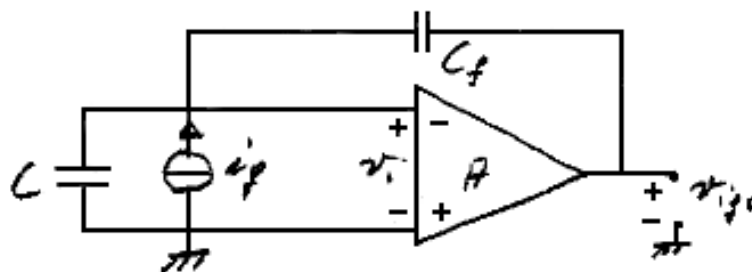


Figura 8.4.7:

3) *Contributo del rumore della resistenza di polarizzazione*

Basandosi sullo schema di fig.8.4.8 e utilizzando le notazioni ivi riportate, si tratta di scrivere la somma delle correnti nel nodo H.

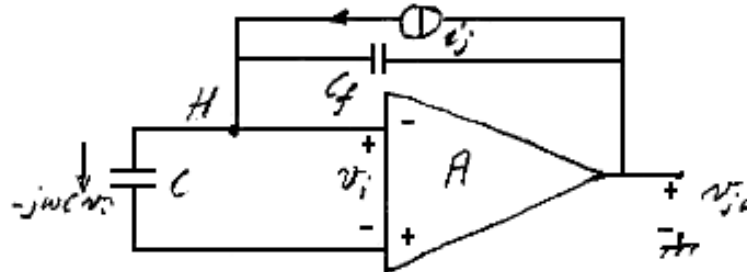


Figura 8.4.8:

nodo H: $-j\omega C v_i + i_j + j\omega C_f (v_{jo} - v_i) = 0$; $v_{jo} = -A v_i$
e con passaggi elementari:

$$v_{jo} = -A i_j / j\omega (\sum C + A C_f) \quad (8.4.11)$$

La (8.4.11) ha la stessa struttura della (8.4.10).

Nell'ipotesi di lavoro consueta, che sia $A C_f \gg \sum C$, i risultati precedenti, per il segnale di tensione e per il rumore all'uscita del preamplificatore, diventano:

$$\begin{cases} v_o = -Q/C_f e^{-t/\tau_f} \\ v_{\delta o} = -(\sum C/C_f) v_{\delta} \\ v_{i g o} = -i_g/j\omega C_f \\ v_{j o} = -i_j/j\omega C_f \end{cases}$$

e in termini di carica di segnale e di rumore

$$\begin{cases} q_o = -Q e^{-t/\tau_f} \\ q_{\delta o} = -\sum C v_{\delta} \\ q_{i g o} = -i_g/j\omega \\ q_{j o} = -i_j/j\omega \end{cases}$$

Le precedenti espressioni approssimate mostrano di nuovo che, mentre il rumore step è indipendente dalla capacità del rivelatore, il rumore delta cresce circa linearmente con la medesima.

NOTA:

Agli effetti del calcolo del rapporto segnale/rumore determinato dalle successive reti di formazione lineare si possono utilizzare direttamente, come eccitazioni di tali reti, le espressioni approssimate sopra ottenute oppure, alternativamente, come si usa fare, utilizzare la procedura che segue.

$$\begin{aligned}
v_o/v_{\delta o} &= (Q/\sum C)/v_{\delta} \\
v_o/v_{j\omega} &= (Q/\sum C)/(i_j/j\omega \sum C) \\
v_o/v_{i_{g0}} &= (Q/\sum C)/(i_g/j\omega \sum C)
\end{aligned}$$

Queste relazioni stabiliscono che per il calcolo del rapporto segnale/rumore dei formatori successivi, questi si possono pensare eccitati da un segnale a step di ampiezza $Q/\sum C$, da un generatore di rumore delta che opera a piena ampiezza e da generatori di rumore step che pesano, come il segnale, in maniera inversa a $\sum C$.

I quadrati delle ampiezze di tensione dei generatori di rumore all'uscita del pramplificatore sono i seguenti:

$$\begin{aligned}
(v_{\delta o})^2 &= 4kTR_{eq}(\sum C/C_f)^2 df \quad (\text{per JFET: } R_{eq} = 0.7/g_m) \\
(v_{j\omega})^2 &= [(4kT/R_f)/(\omega C_f)^2] df \\
(v_{i_{g0}})^2 &= [(2eI_g)/(\omega C_f)^2] df
\end{aligned}$$

e, nel caso di un rivelatore con corrente I_D , ai generatori di rumore step se ne aggiunge un altro di struttura identica al generatore associato alla corrente di gate del JFET:

$$(v_{i_{D0}})^2 = [(2eI_D)/(\omega C_f)^2] df$$

Si definiscono le seguenti costanti di rumore:

$$\text{costante di rumore delta} \quad a = 4kTR_{eq}(\sum C/C_f)^2 \quad V^2s$$

$$\text{costante di rumore step} \quad b = [4kT/R_f + 2eI_g + 2eI_D]/C_f^2 \quad V^2s^{-1}$$

Il termine di confronto è il quadrato dell'ampiezza del segnale $(Q/\sum C)^2$, perché di solito i convertitori analogico-digitali eseguono la misura del massimo della forma d'onda sintetizzata.

8.5 Il filtro CR-RC

Si fa riferimento alla fig.8.5.1, nella quale, per semplicità, non si è introdotta la cancellazione polo-zero e, in conformità, si utilizza un segnale a step di ampiezza Q/C_f . Il risultato è ripreso direttamente dal paragrafo 6.4.

Per il trattamento del rumore, che sarà studiato in termini di frequenza, basta ricordare che la funzione di trasferimento del filtro CR-RC, a costanti di tempo disaccoppiate ed eguali, è:

$$H(\omega) = [j\omega\tau/(1 + j\omega\tau)][1/(1 + j\omega\tau)] = j\omega\tau/(1 + j\omega\tau)^2$$

e il suo modulo quadro:

$$H^2(\omega) = \omega^2\tau^2/(1 + \omega^2\tau^2)^2$$

Posto $\omega\tau = x$, si ha:

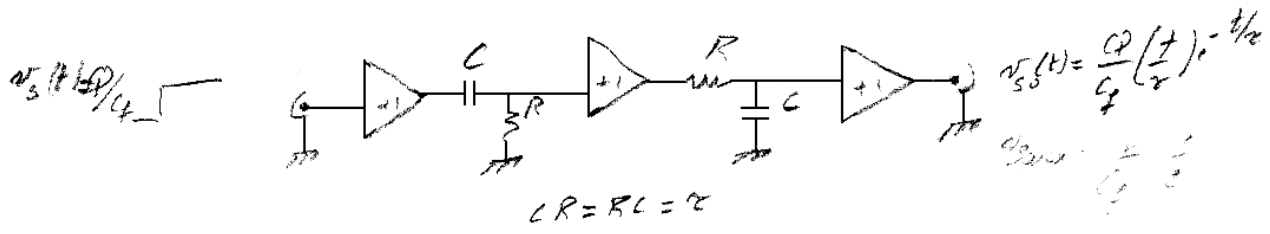


Figura 8.5.1:

$$H^2(x) = x^2 / (1 + x^2)^2$$

Rumore δ : riportiamo, per comodità, l'espressione del generatore di rumore utilizzando la notazione $dv_{\delta}^2 = (v_{\delta o})^2 = a df$. Se riscriviamo l'elemento di frequenza come $df = d(\omega\tau)/2\pi\tau$, si ha:

$$dv_{\delta}^2 = (a/2\pi\tau) dx$$

la corrispondente tensione quadratica di uscita risulta:

$$dv_{\delta u}^2 = H^2(x)dv_{\delta}^2 = [x^2/(1 + x^2)^2](a/2\pi\tau) dx$$

e integrando su tutte le frequenze:

$$v_{\delta u}^2 = (a/2\pi\tau) \int_{0,\infty} [x^2/(1 + x^2)^2] dx = [-x/2(1 + x^2) + (atan x)/2]_{0,\infty}$$

ossia

$$v_{\delta u}^2 = (a/2\pi\tau)(\pi/4) = a/8\tau$$

Rumore step: anche nel caso del rumore step modifichiamo le notazioni come segue:

$$dv_{step}^2 = (b/\omega^2)(d\omega/2\pi)$$

e passando alla variabile $x = \omega\tau$:

$$dv_{step}^2 = (b\tau/2\pi)(dx/x^2)$$

Pertanto l'elemento di tensione quadratica di uscita risulta:

$$dv_{step u}^2 = (b\tau/2\pi)[x^2/(1 + x^2)^2](dx/x^2)$$

e integrando su tutte le frequenze:

$$v_{step u}^2 = (b\tau/2\pi) \int_{0,\infty} [1/(1 + x^2)^2] dx = [x/2(1 + x^2) + (atan x)/2]_{0,\infty} = b\tau/8$$

La tensione quadratica di rumore totale v_n^2 risulta infine:

$$v_n^2 = v_{\delta u}^2 + v_{step u}^2 = (a\tau^{-1} + b\tau)/8$$

Il minimo di v_n^2 si ottiene per $\tau = (a/b)^{1/2} = \tau_{nc}$, che prende il nome di "noise corner time constant" perché se si riportano il logaritmo del rumore delta e del rumore step in funzione del logaritmo della costante di tempo si ottengono due andamenti rettilinei il primo decrescente e il secondo crescente, che si intersecano (corner) proprio al tempo τ_{nc} . In corrispondenza si trova:

$$(v_n^2)_{min} = (ab/16)^{1/2} \quad \text{e} \quad (v_n)_{min} = (ab/16)^{1/4}$$

Nel caso dei rivelatori la conversione da fluttuazione di tensione in indeterminazione in energia si ottiene con una procedura che applichiamo al caso di un rivelatore al Germa-

nio:

Per creare una carica elettronica ($1.6 \cdot 10^{-19} C$) occorre un'energia media $\varepsilon_{Ge}(77 K) = 2.96 eV$; una carica elettronica genera, in uscita dal preamplificatore (valore tipico di capacità di reazione: $C_f = 1 pF$), un segnale di tensione di $(1.6 \cdot 10^{-19} C / 10^{-12} F) = 1.6 \cdot 10^{-7} V$. Il corrispondente valore massimo all'uscita del filtro CR-RC è: $v_{0max} = (1.6 \cdot 10^{-7} / e) V = 5.88 \cdot 10^{-8} V$. Il fattore di conversione è perciò:

$$2.96 eV / 5.88 \cdot 10^{-8} V = 5.03 \cdot 10^7 eV/V$$

Applichiamo questi risultati al caso di un rivelatore HpGe coassiale che sia caratterizzato dalle seguenti quantità:

transconduttanza del JFET raffreddato a 150 K: $g_m = 5 mA/V$
 corrente inversa del rivelatore e del gate del JFET: $I_D + I_g = 100 pA$
 resistenza di reazione a 100 K: $R_f = 2 G\Omega$
 capacità d'ingresso a freddo: $\sum C = 30 pF$
 capacità di reazione: $C_f = 1 pF$.

Con tali valori numerici (realistici per rivelatori di efficienza $\sim 30\%$) si trova:

$$a = 1.08 \cdot 10^{-15} V^2 s \quad b = 4.55 \cdot 10^{-5} V^2 s^{-1}$$

e quindi $\tau_{nc} = 4.9 \mu s$ e in termini di risoluzione energetica:

$$FWHM_{noise} = 2.36 \cdot 7.42 \cdot 10^{-6} \cdot 5.03 \cdot 10^7 eV = 0.88 keV$$

Questo risultato ha il corretto ordine di grandezza ed è utile confrontarlo con il contributo alla FWHM totale che nasce dalle fluttuazioni statistiche nella produzione di coppie. È di uso comune riferirsi al fotopicco del γ di 1332 keV emesso nel decadimento del ^{60}Co . Il calcolo è fatto assumendo un fattore di Fano $F = 0.12$ (Knoll pag.400) di riduzione della varianza della statistica di Poisson:

$$\begin{aligned} \sigma_{stat}^2 &= \frac{E_\gamma(eV)}{\varepsilon_{Ge}(eV)} F = \frac{1.332 \cdot 10^6}{2.96} \cdot 0.12 = 54 \cdot 10^3 (coppie)^2 \\ \sigma_{stat} &= (54 \cdot 10^3)^{1/2} = 232 \text{ coppie} \rightarrow \sigma_{stat}(eV) = \sigma_{stat} \cdot \varepsilon_{Ge}(eV) = 232 \cdot 2.96 eV = 688 eV \\ FWHM_{stat} &= 2.36 \cdot \sigma_{stat}(eV) = 1.62 keV \end{aligned}$$

e quindi la larghezza totale della riga:

$$FWHM_{tot} = (1.62^2 + 0.88^2)^{1/2} = 1.85 keV$$

Valori di FWHM attorno a 2 keV a 1332 keV sono caratteristici di buoni rivelatori al Germanio.

In conclusione si ricorda che il passare dall'utilizzazione del semplice filtro CR-RC ai più complessi formatori semigaussiani porta ad un miglioramento della risoluzione (ovviamen-

te solo per la parte dovuta al rumore) dell'ordine del 15% (la $FWHM_{tot}$ del precedente esempio diventerebbe 1.80 keV) e che il vero vantaggio dei filtri semigaussiani consiste nel ridurre considerevolmente (a parità di costanti di tempo) il tempo di occupazione della linea di base, diminuendo in tal modo la probabilità di sovrapposizione dei segnali.

9 PIXE

9.1 Considerazioni generali

I raggi X, utilizzati per individuare gli elementi dai quali provengono, sono radiazione elettromagnetica di origine atomica, conseguenza del fatto che sono stati rimossi elettroni dalle orbite più interne degli atomi (K, L, qualche volta interessano anche le M nel caso di atomi pesanti).

Il riempimento di queste orbite con elettroni provenienti dalle orbite superiori è accompagnato dall'emissione di raggi X, le energie ($hf \rightarrow$ frequenze) dei quali sono caratteristiche dell'atomo emettitore. La PIXE (Particle Induced X-ray Emission) è una tecnica "nucleare" per riconoscere gli elementi che compongono un materiale; tecnica che in qualche caso può essere resa quantitativa e che molto spesso permette delle significative comparazioni. L'energia degli X delle orbite K va dal valore minimo di $\sim 13 eV$ per l'atomo di idrogeno a $\sim 80 keV$ per gli elementi pesanti (Pb, Bi).

Le tecniche attualmente più utilizzate per rivelare gli X si basano su rivelatori Si(Li) planari che consentono di misurare con sufficiente risoluzione energetica (miglior risoluzione a $5.9 keV$ è $\sim 150 eV$ con costanti di tempo dei filtri semigaussiani di $10 \div 20 \mu s$) e sufficiente efficienza (efficienza $> 20\%$ con finestra di Be di $25 \mu m$ per $E_x > 1.2 keV$; efficienza intrinseca $> 20\%$ per spessori di Si di $5 mm$ per $E_x < 50 keV$). Di norma, tuttavia, un solo rivelatore è insufficiente a coprire tale intervallo di energie.

Nella zona degli X di bassa energia ($1 keV < E_x < 10 keV$) il problema principale è la separazione fra gli X provenienti da elementi leggeri di numero atomico contiguo e quindi particolarmente importante è la risoluzione energetica. Inoltre, per ridurre il fondo generato da eventuali X o γ di energia più alta è conveniente che i rivelatori siano sottili (per esempio: $3 mm$ di spessore e $12 mm^2$ di superficie).

Di solito la geometria di questi rivelatori Si(Li) è planare e, come si suol dire, a "tappo di champagne", come mostrato in fig.9.1.1.

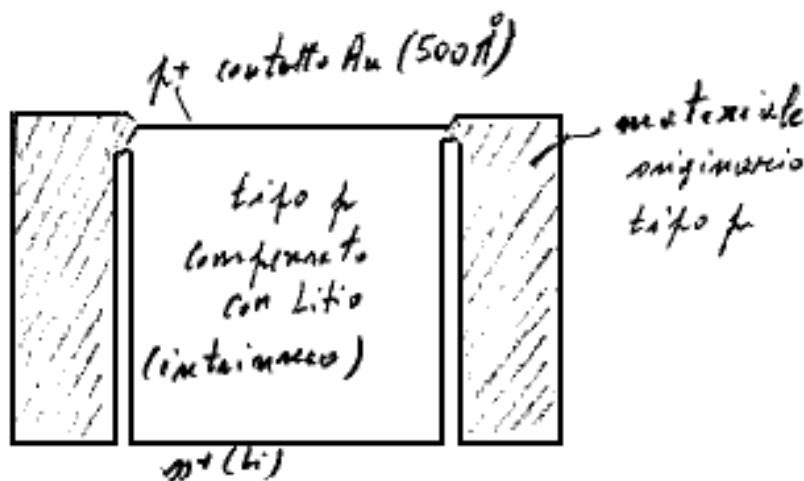


Figura 9.1.1:

Un rivelatore planare presenta una capacità:

$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r S/d$ ove $\varepsilon_r(\text{silicio}) = 11.8$.

Quindi per $d = 3 \text{ mm}$ e $S = 12 \text{ mm}^2$, si ha: $C = 0.42 \text{ pF}$, mentre per $d = 5 \text{ mm}$ e $S = 100 \text{ mm}^2$, si ha: $C = 2.1 \text{ pF}$ (in quest'ultimo caso la risoluzione energetica tipica è $\sim 180 \text{ eV}$).

La corrente di volume è circa 10 volte più piccola per il rivelatore più piccolo dell'esempio precedente, ma le correnti residue di superficie, nonostante la forma a tappo di champagne che serve anche ad allungare le vie di fuga superficiali, sono di solito, per quanto piccole, tuttavia preponderanti.

Siccome il rapporto segnale/rumore si deteriora sia all'aumentare della capacità del rivelatore che della sua corrente inversa, si raggiungono dei compromessi facendo in modo che i rivelatori meno spessi siano anche di superficie molto minore e fatti per avere risoluzione ottima nel campo ($1 \div 15$) keV .

Rivelatori più spessi e con superficie maggiore sono utilizzati per avere una migliore efficienza ad energie più alte, dove la separazione in energia fra X di elementi adiacenti è più grande.

Anche piccoli rivelatori possono essere impiegati per “vedere” elementi pesanti, a patto di misurare le transizioni verso le orbite L.

Le curve di efficienza si trovano sui manuali ORTEC, EURYSIS etc.

La rivelazione, come discusso nel Capitolo 3, si basa sulla raccolta della corrente indotta dal moto delle coppie lacuna-elettrone liberate nel Silicio da un elettrone primario (praticamente sempre creato per effetto fotoelettrico dal raggio X incidente) sotto l'azione del campo elettrico inverso applicato al diodo Si(Li) (p^+ i n^+).

NOTA:

I rivelatori PIXE, Si(Li), utilizzati al KN3000, se supposti perfettamente compensati, hanno campi elettrici che vanno da 1700 V cm^{-1} a 2300 V cm^{-1} .

Dai dati di Ottaviani et al., le velocità a 77 K sono le seguenti per tutti:

$$v_e = 8 \cdot 10^7 \text{ mm s}^{-1} \qquad v_h = 4 \cdot 10^7 \text{ mm s}^{-1}$$

Il rivelatore è tenuto alla temperatura dell'azoto liquido, in modo da minimizzare la corrente inversa ed avere velocità di deriva elevate.

La raccolta della carica è fatta con un integratore di Miller le cui caratteristiche principali sono le seguenti: 1) il primo elemento attivo è un JFET con un alto rapporto “transconduttanza/capacità interelettrodiche” che sono scelte comparabili con quelle del rivelatore più collegamenti, 2) il JFET, per diminuire le capacità interelettrodiche, è scappucciato, 3) il JFET è termicamente un po' isolato dal criostato in modo da sfruttare la sua dissipazione di polarizzazione per tenerlo a $\sim 140 \text{ K}$ (zona di temperature dove di solito si ottengono le prestazioni migliori).

La scelta di JFET che presentino un basso “rumore di eccesso” (genericamente del tipo “ $1/f$ ”) a bassa frequenza (tipicamente $< 1 \text{ kHz}$) e la piccolezza delle correnti di polarizzazione di gate e inversa del rivelatore, fanno sì che la banda passante del formatore semigaussiano sia allocata in (relativamente) bassa frequenza.

L'altra eventuale sorgente di rumore è introdotta dalla resistenza di reazione utilizzata

per stabilizzare in continua (ai tempi lunghi) il punto di lavoro dell'integratore di Miller.

9.2 Preamplificatore di carica con feedback resistivo

Un esempio è riportato nella fig.9.2.1.

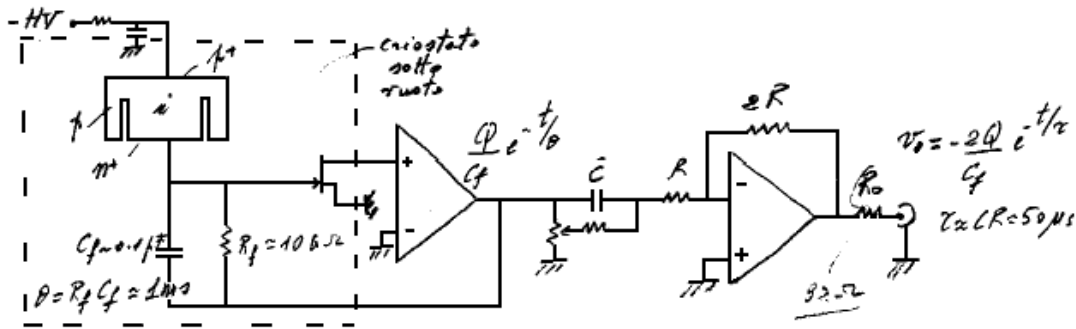


Figura 9.2.1:

Lo stadio finale è opzionale. Quando è presente serve a ridurre la costante di decadimento da $\sim 1\text{ ms}$ a $\sim 50\ \mu\text{s}$ (utilizzando un interstadio che opera una cancellazione polo-zero), ad introdurre un fattore di amplificazione (tipicamente 2) e a definire una precisa impedenza di uscita eguale all'impedenza caratteristica del cavo utilizzato (usualmente: RG-62 che ha impedenza caratteristica $R_0 \sim 92\ \Omega$).

Siccome l'energia media di creazione di una coppia lacuna-elettrone in Silicio (alla temperatura dell'azoto liquido) è $\varepsilon_{Si}(77\text{ K}) \sim 3.76\text{ eV}$, un tipico raggio X di 10 keV , produce, per effetto fotoelettrico, un elettrone di 10 keV , che produce, a sua volta, $\sim 10^4/3.76$ coppie lacuna-elettrone pari ad una carica di $\sim 4.25 \cdot 10^{-16}\text{ C}$ e quindi, una tensione di uscita dall'integratore di carica di circa $4.25 \cdot 10^{-16}\text{ C}/10^{-13}\text{ F} = 4.25\text{ mV}$.

Il guadagno di conversione del sistema "rivelatore Si(Li) + integratore di Miller" è quindi, tipicamente, $\sim 4.25\text{ mV}/10\text{ keV}$ e, dopo l'eventuale secondo stadio, $\sim 8.5\text{ mV}/10\text{ keV}$ a circuito aperto oppure di nuovo $\sim 4.25\text{ mV}/10\text{ keV}$ sul carico adattato di $92\ \Omega$.

9.3 Preamplificatore di carica con POF (Pulsed Optical Feedback)

Un'altra configurazione, utilizzata prevalentemente con piccoli rivelatori per ottenere la migliore risoluzione energetica, fa ricorso al cosiddetto feedback ottico che elimina la resistenza R_f sostituendola con opportuni impulsi luminosi inviati da un LED sulla giunzione gate-canale del JFET (che deve essere scappucciato anche per questo motivo) in modo da renderla momentaneamente conduttiva.

Vantaggi del POF:

- 1) elimina una importante sorgente di rumore (R_f),
- 2) elimina distorsioni nella risposta ai tempi intermedi (decine di microsecondi) introdotte

dal comportamento non ideale delle resistenze di alto valore ($1 \div 10 \text{ G}\Omega$) che, generando decadimenti non esattamente esponenziali, rendono imperfetta la cancellazione polo-zero e originano “code” residue ai tempi intermedi che peggiorano la qualità della stabilizzazione della linea di base anche con amplificatori-formatori che utilizzano le tecniche migliori di recupero della linea di base, 3) elimina la necessità di aggiustamento (sia manuale che automatica) della cancellazione polo-zero.

Svantaggi del POF:

1) siccome l’integratore di Miller non è continuamente reazionato e siccome, per quanto piccola, fluisce una corrente inversa nel rivelatore, anche in assenza di segnali provocati da interazione di radiazione con il rivelatore, l’uscita dell’integratore di Miller deriva in maniera sostanzialmente lineare come:

$$|v_o(t)| = I_D t / C_f$$

Poiché il campo di operazione lineare di $v_o(t)$ è tipicamente $\Delta V_{lin} \sim (\pm 2.5 \text{ V})$ e un valore tipico di corrente inversa è $I_D = 10^{-13} \text{ A}$, segue che, con gli ordinari valori di capacità $C_f = 0.1 \text{ pF}$, il tempo che la rampa di uscita impiega per attraversare tutta la zona lineare è $\delta t = C_f \Delta V_{lin} / I_D \sim 5 \text{ s}$.

A questo punto interviene un comparatore a doppia soglia che accende un LED che illumina la zona gate-canale del JFET e, rendendola conduttiva, riporta il sistema all’altro estremo di linearità in tempi di $\sim (10 \div 20) \mu\text{s}$.

Ovviamente, in presenza di segnali, più aumenta il ritmo e/o l’ampiezza dei medesimi più diminuisce il tempo che la gradinata, sovrapposta alla rampa, impiega per spazzare l’intervallo lineare dell’integratore. Per esempio, segnali di ampiezza media di 5 keV (2.22 mV) ad una frequenza media di 1 kHz , provocano uno spostamento della linea di base di $\sim 2.22 \text{ V}$ in 1 s , al quale va aggiunto uno spostamento “proprio” di $\sim 1 \text{ V}$ a rampa. Si trova quindi che anche per frequenze di conteggio non molto elevate si può facilmente attraversare la zona lineare in $(1 \div 0.1) \text{ s}$.

2) Possibili inconvenienti sono associati ai periodi di “reset”. Nelle ipotesi di lavoro di cui sopra ($1 \div 10 \text{ kHz}$), questi introducono un tempo morto aggiuntivo di $(20 \div 200) \mu\text{s}$ ogni secondo, ma questo non costituisce un problema importante. Importante è viceversa il fatto che nei sistemi ad alta risoluzione i filtri semigaussiani impiegati fanno uso di costanti di tempo nell’ambito $(5 \div 15) \mu\text{s}$. Ciò implica che la soppressione di transitori di reset di $\sim 5 \text{ V}$ di ampiezza e di $\sim 20 \mu\text{s}$ di durata da parte dello stadio iniziale di cancellazione polo-zero non è efficace e che gli stadi di amplificazione successivi possono essere forzati fuori dalla zona lineare anche per tempi lunghi e avere ritorni assai complicati alla linea di base.

[-Esempio per determinare l’attenuazione del circuito CR.

Supponiamo che il transitorio di reset sia di tipo esponenziale di ampiezza 1 V

$$(1 - e^{-t/\tau}) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{p} \frac{1}{1+p\tau}$$

Supponiamo di trattarlo con un circuito CR di uguale costante di tempo τ : $H(p) = p\tau / (1 + p\tau)$. Si ottiene ovviamente la risposta allo step di un circuito CR-RC con uguali costanti di tempo: $\frac{t}{\tau} e^{-t/\tau}$. Al tempo $t = \tau$ tale risposta raggiunge il massimo valore di ampiezza pari a $e^{-1} \text{ V}$. Pertanto un transitorio di reset di 5 V di ampiezza effettuato con costante di tempo di $10 \mu\text{s}$, dopo una differenziazione di $10 \mu\text{s}$ produce un segnale

a compasso di ampiezza $\simeq 1.7 V$, da confrontare con un segnale di $8.5 mV$ per $10 keV$ che sarà amplificato ~ 100 per diventare $\sim 1 V$. (Confrontare con il fondo scala del convertitore analogico/digitale: $1 mV/ch$ con 1024 canali per allocare $10 keV$). Quindi un segnale di ampiezza nominale di $170 V$ rispetto ad un range lineare massimo degli stadi dell'amplificatore formatore di $\sim 10 V$. Si tratta quindi di un overload di $\sim 170/10 \sim 17$

Inoltre, tutti i sistemi automatici di correzione e mantenimento della linea di base sono soggetti ad introdurre correzioni erronee e di lunga durata con conseguenti errori sia sulla stabilizzazione della linea di base che nel riconoscimento, da parte di circuiti di soglia, dei periodi di gate in fase di segnale di reset dei circuiti medesimi e dei segnali da considerare per la pile-up rejection.

Per alleviare, almeno parzialmente, questo problema i preamplificatori con reset ottico impulsivo provvedono ad inviare all'amplificatore un segnale logico che può essere utilizzato per disattivare, per un tempo sufficiente, i circuiti di correzione automatica della linea di base.

Riportiamo in fig.9.3.1 lo schema realistico di un POF charge preamplifier.

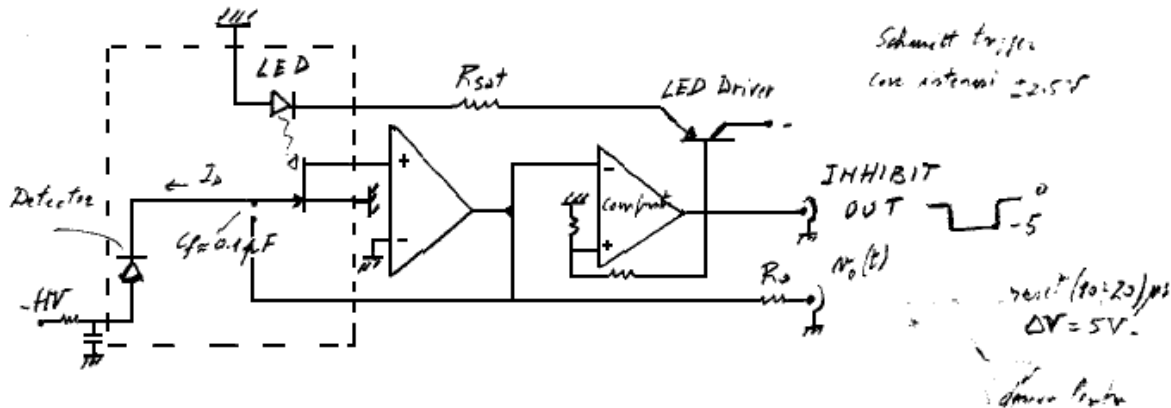


Figura 9.3.1:

9.4 Amplificatori-formatore

Si tratta, di norma, di cosiddetti filtri semigaussiani, nel senso che sono in grado, a partire da un segnale a step (o con decadimento esponenziale puro) di sintetizzare segnali unipolari di forma approssimativamente gaussiana con un ritorno alla linea di base relativamente rapido. Una struttura funzionale tipica di amplificatore-formatore semigaussiano, che utilizzeremo per la successiva discussione, è riportata in fig.9.4.1.

Si vede che si possono distinguere operazioni di base (1) e (2) e operazioni di servizio (3), (4), (5), (6) di grado di sofisticazione crescente.

Le operazioni di base e la Gated Base-Line Restoration sono già state discusse, nel seguito discutiamo le operazioni di pile-up rejection e un altro problema specificamente associato ai segnali di reset del POF.

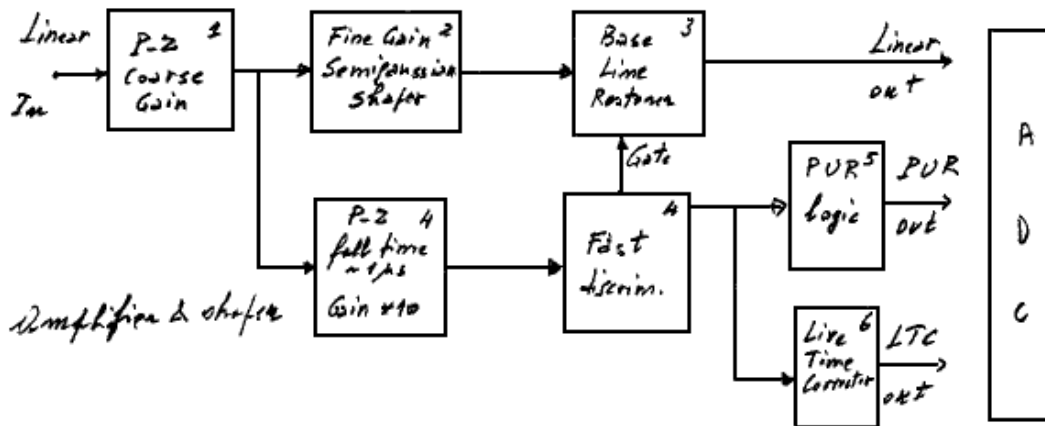


Figura 9.4.1:

9.5 Pile-up

9.5.1 Pile-up nel preamplificatore di carica

Preamplificatori con feedback resistivo

Hanno un limite sul ritmo di conteggio associato alla durata dei segnali. Tipicamente la costante di decadimento è di 1 ms , con un'ampiezza media v_m , come già calcolato di $[(E_x/\varepsilon)e/C_f] = 2.13\text{ mV}$ e un campo di operazione lineare ΔV_{lin} di alcuni Volt, si possono fare le seguenti previsioni. Con decadimento esponenziale τ , ampiezza media v_m e ritmo R , secondo i teoremi di Campbell, la tensione media in uscita dal preamplificatore è: $v_{om} = Rv_m\tau$. Tenuto conto delle fluttuazioni deve essere $R < \Delta V_{lin}/v_m\tau \sim 2.2\text{ V}/2.2 \cdot 10^{-6} = 10^6\text{ Hz}$, e questa non è una importante limitazione.

Preamplificatori con POF

Per un range lineare tipico di 5 V si possono impilare circa 2500 segnali di ampiezza media di 2 mV prima di attraversare tutta la zona lineare. Se questo deve essere fatto, per esempio, in 10^2 s , ciò comporta un ritmo di circa 250 kHz , che di nuovo non è molto stringente. In questo caso si ha anche una incidenza media modesta sul tempo morto da parte dei segnali di reset, che risultano occupare circa 2 ms ogni secondo, contribuendo così al tempo morto per circa lo 0.2% .

9.5.2 Pile-up nell'amplificatore-formatore

Si considera come tipico un formatore semigaussiano con costanti di tempo di $10\text{ }\mu\text{s}$, con un peaking time di $20\text{ }\mu\text{s}$ e un'occupazione della linea di base a livello di una parte su mille dell'ampiezza massima (questa scelta è collegata al fatto di utilizzare 1024 canali di conversione e di avere quindi una risoluzione di quantizzazione di circa lo 0.1%) pari

a 7 costanti di tempo e quindi $70 \mu s$. Segnali più vicini di $\sim 50 \mu s$ generano un pile-up significativo che diventa già importante a frequenze di $2 kHz$ (circa il 10% dei segnali risultano significativamente in overlap).

9.5.3 Azione dei convertitori analogico-digitali. PUR generale

Di norma, indipendentemente dalla tecnica di conversione analogico-digitale, la generazione di un segnale di peak-detection associata alla utilizzazione di una soglia inferiore appena sopra il rumore (tipicamente 10 volte la tensione efficace di rumore) consente di eliminare un gran numero di eventi in pile-up marginale e di classificare automaticamente solo il primo dei due segnali. Tutto questo è rappresentato in forma schematica in fig.9.5.1.

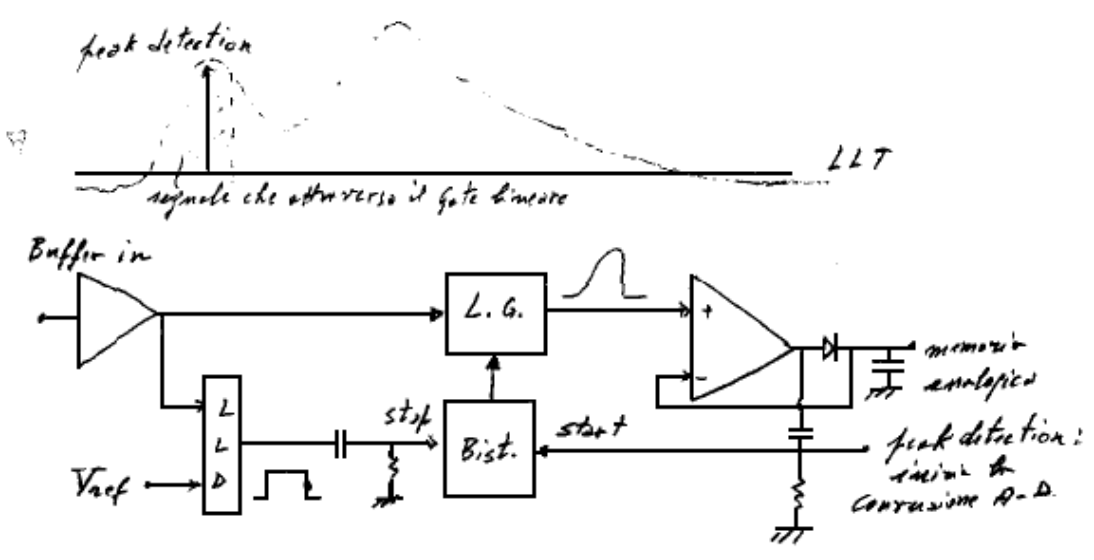


Figura 9.5.1:

Nell'ipotesi di un tempo di picco di $20 \mu s$, solo segnali che siano separati meno di $20 \mu s$ possono generare una valutazione errata del valore del massimo del primo segnale. Pertanto, se si vogliono "riconoscere e trattare" questi casi, occorre una via speciale di riconoscimento di tale situazione. Di norma questa via è realizzata nell'amplificatore-formatore come mostrato nella fig.9.5.2.

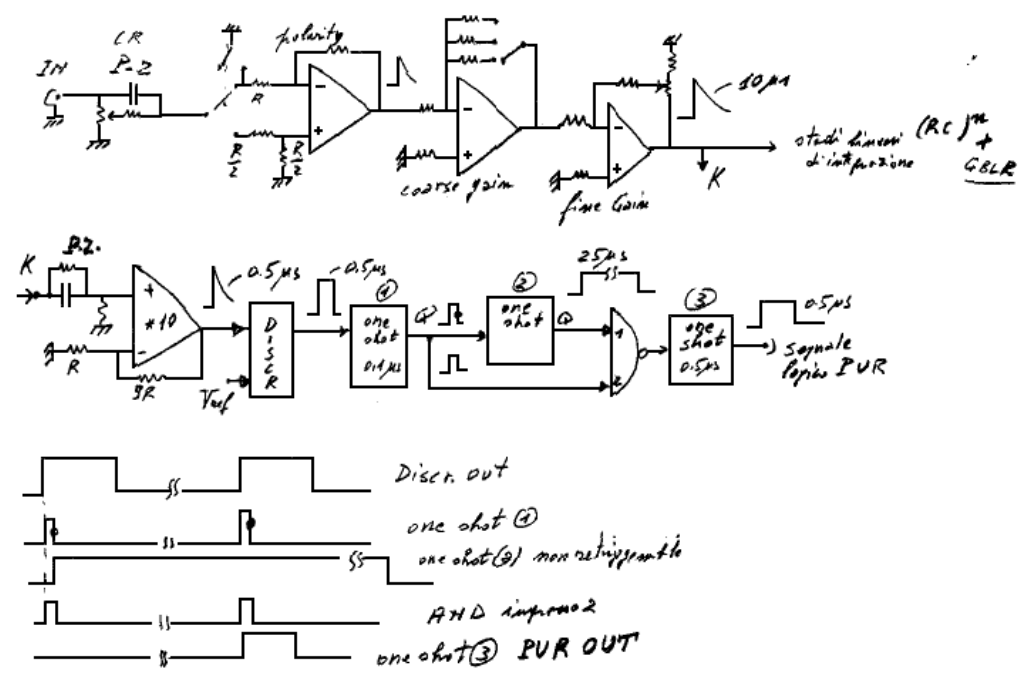


Figura 9.5.2:

Limitazioni nel riconoscimento: a) segnali molto piccoli non superano la soglia del discriminatore, che, fra l'altro, vede una linea di base assai più rumorosa (anche un fattore 2) di quella all'uscita del formatore, b) segnali lineari veloci sono tuttavia relativamente lenti, per cui le migliori prestazioni sono del tipo: riconoscimento di due segnali separati da parte del discriminatore se distano più di $(0.5 \div 1.0) \mu s$, c) segnali più ravvicinati di $(0.5 \div 1.0) \mu s$ generano, nei limiti di linearità del sistema, somme di picco che rimangono nello spettro.

Il segnale di PUR può essere utilizzato sia per inibire l'acquisizione dei segnali in pile-up sia per aggiungere un bit che trasferisce in un diverso spettro gli impulsi riconosciuti in pile-up ed analizzati dal convertitore analogico-digitale.

9.6 Preamplificatori con POF. Trattamento del segnale di reset

Gli usuali amplificatori per spettroscopia hanno problemi con tali tipi di preamplificatori sia per quanto riguarda le operazioni automatiche, come per esempio il posizionamento dinamico delle soglie per la BLR, sia, talvolta, per il discriminatore del PUR medesimo. Si può migliorare la situazione procedendo come segue: a) utilizzare il segnale logico di INHIBIT associato al reset fornito dal preamplificatore: questo segnale deve avere durata sufficiente, b) utilizzare le soglie manuali.

Resta tuttavia il problema di un segnale molto ampio ($5 \div 10$) V, che rimane molto ampio anche dopo l'operazione di differenziazione (siccome la costante di tempo di differenziazione è dello stesso ordine della durata del transitorio di reset, l'attenuazione risulta tipicamente di un fattore dell'ordine di $3 \div 5$) e dal fatto che successivamente i segnali sono amplificati ancora di un fattore $50 \div 250$. Ciò provoca sovraccarichi prolungati e ritorni alla linea di base che spesso presentano sovralongazioni che hanno lo stesso segno dei segnali e che generano picchi fantasma, oppure, sovrapponendosi ai segnali, ne falsano la classificazione.

Una possibile soluzione del problema consiste nel ridisegnare l'ingresso dell'amplificatore nel modo riportato nella fig.9.6.1.

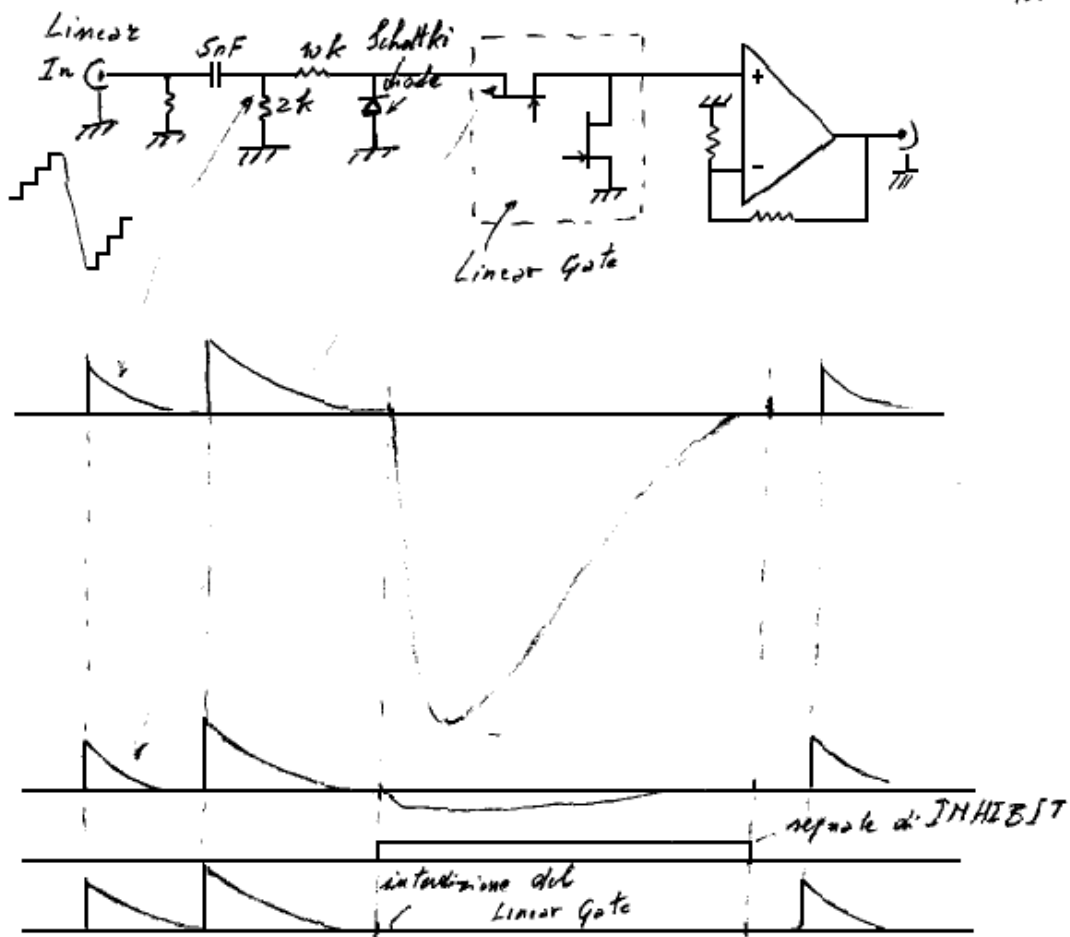


Figura 9.6.1:

4905 Comparator

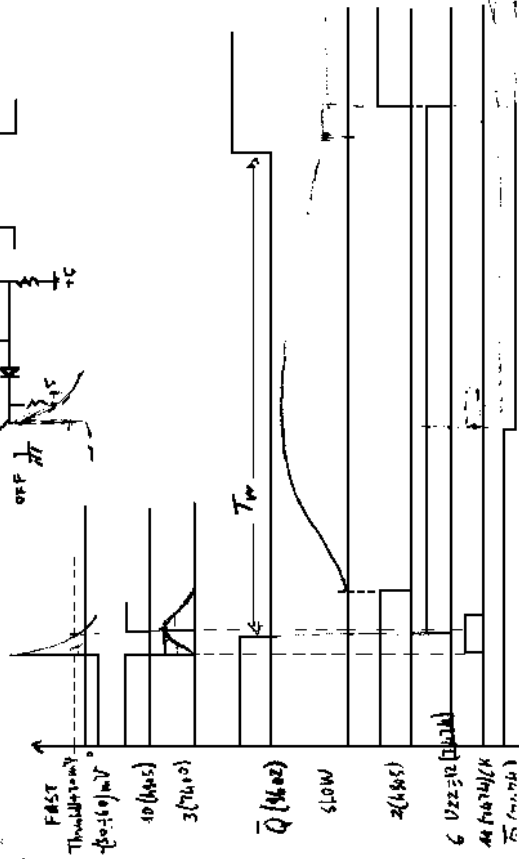
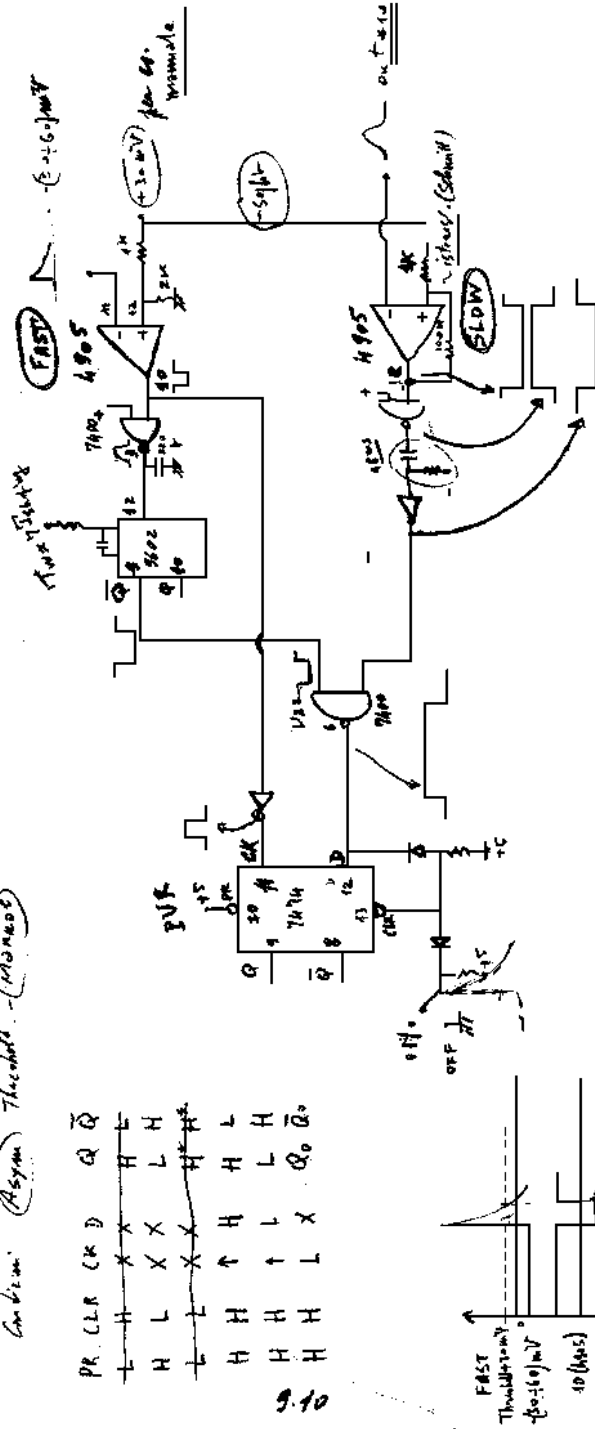
(Amp. 7644)

PUR Signal

Asym. Threshold - (Monost.)

PR	CLR	CK	D	Q	\bar{Q}
L	H	X	X	H	L
H	L	X	X	L	H
L	L	X	X	X	X
H	H	↑	H	H	L
H	H	↑	L	L	H
H	H	L	X	Q ₀	\bar{Q}_0

9.10



PUR signal for minimum output in
Relay circuit is temp for LT & PD
Let's convert the data into DIGITAL

Figura 9.6.2:

TABLE 11-1 Properties of Intrinsic Silicon and Germanium

	Si	Ge
Atomic number	14	32
Atomic weight	28.09	72.60
Stable isotope mass numbers	28-29-30	70-72-73-74-76
Density (300 K); g/cm ³	2.33	5.32
Atoms/cm ³	4.96×10^{22}	4.41×10^{22}
Dielectric constant	11.7	16
Forbidden energy gap (300 K); eV	1.115	0.665
Forbidden energy gap (0 K); eV	1.165	0.746
Intrinsic carrier density (300 K); cm ⁻³	1.5×10^{10}	2.4×10^{13}
Intrinsic resistivity (300 K); $\Omega \cdot \text{cm}$	2.3×10^3	47
Electron mobility (300 K); cm ² /V · s	1350	3900
Hole mobility (300 K); cm ² /V · s	480	1900
Electron mobility (77 K); cm ² /V · s	2.1×10^4	3.6×10^4
Hole mobility (77 K); cm ² /V · s	1.1×10^4	4.2×10^4
Energy per electron-hole pair (300 K); eV	3.62	
Energy per electron-hole pair (77 K); eV	3.76	2.96
Pano factor (77 K)	0.143 (Ref. 7)	0.129 (Ref. 9)
	0.084 (Ref. 8)	0.08 (Ref. 10)
	0.085	< 0.11 (Ref. 11)
	to	0.057
	0.137	0.064
	0.16 (Ref. 13)	0.058 (Ref. 14)

Source: G. Bertolini and A. Coche (eds.), *Semiconductor Detectors*, Elsevier-North Holland, Amsterdam, 1968, except where noted.

Figura 9.6.3: Tabella 11.1 Knoll

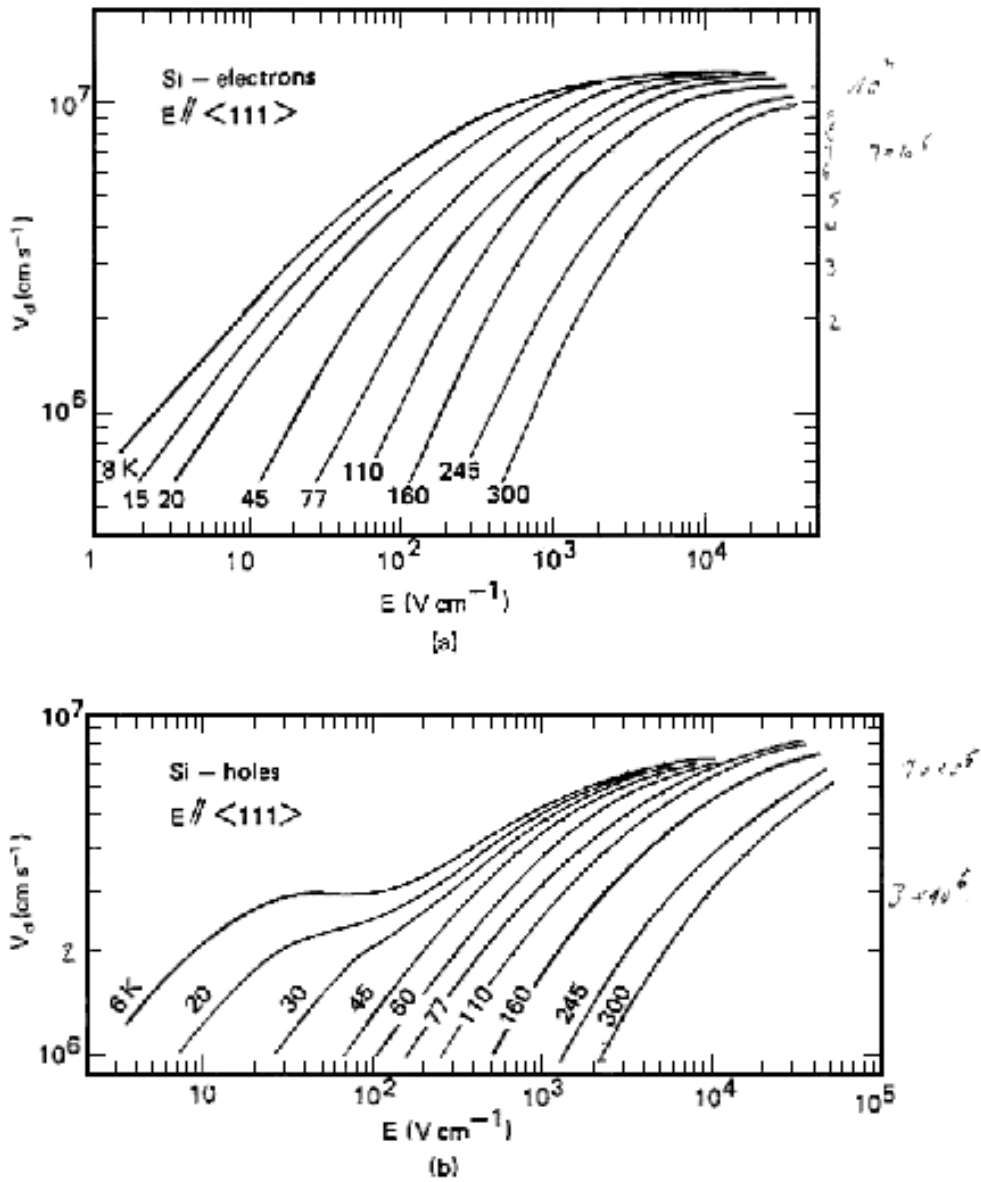


Figure 11-2 Drift velocity as a function of electric field applied parallel to the $\langle 111 \rangle$ crystallographic direction. Absolute temperature is the parameter for the different curves. (a) Electrons in silicon; (b) holes in silicon; (c) electrons in germanium; (d) holes in germanium. (From Ottaviani et al.¹⁵)

Figura 9.6.4: Fig.11.2 Knoll

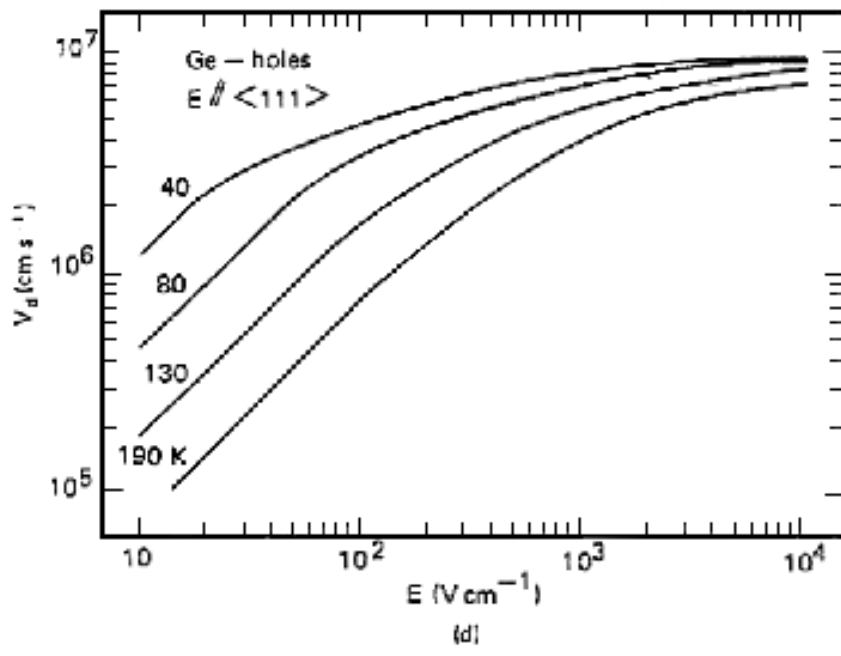
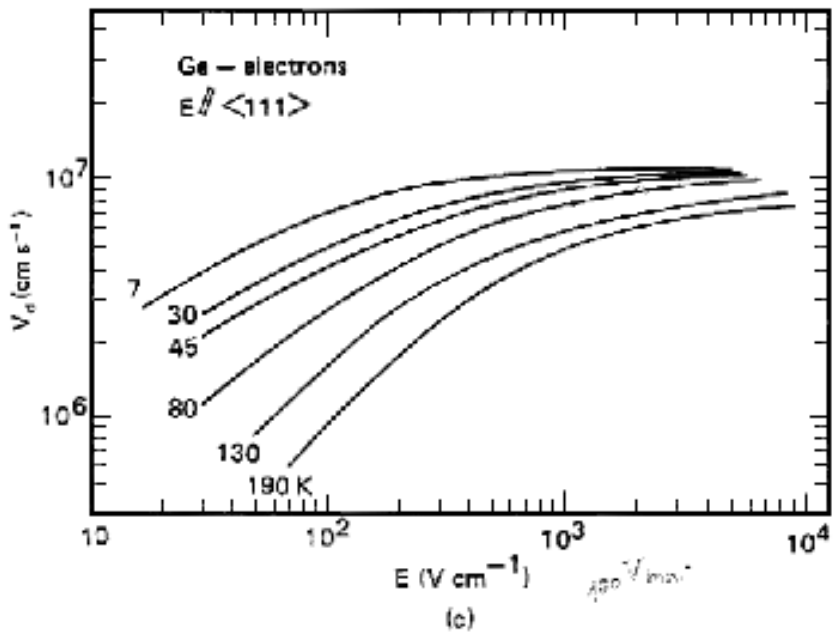


Figure 11-2 (Continued)

Figura 9.6.5: Fig.11.2-b Knoll