

# Moto di cariche e cariche indotte

## Teorema di reciprocità di Green dell'elettrostatica

Si abbiano i conduttori posti in diverse posizioni nello spazio.  
Si indichino con  $q_i$  e  $Q_i$  due diverse configurazioni di cariche sui conduttori.

Vale l'uguaglianza

$$\sum_{i=1,N} Q_i \varphi_i = \sum_{i=1,N} q_i \Phi_i$$

con

$q_i$   $N$  cariche puntiformi fisse

$\varphi_i$  il potenziale generato nella posizione occupata dalla carica  $q_i$  da parte delle altre  $N - 1$  cariche  $q_j$

$$\sum_{j \neq i} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{q_j}{r_{ij}}$$

$Q_i$  cariche di diverso valore ma nelle stesse posizioni

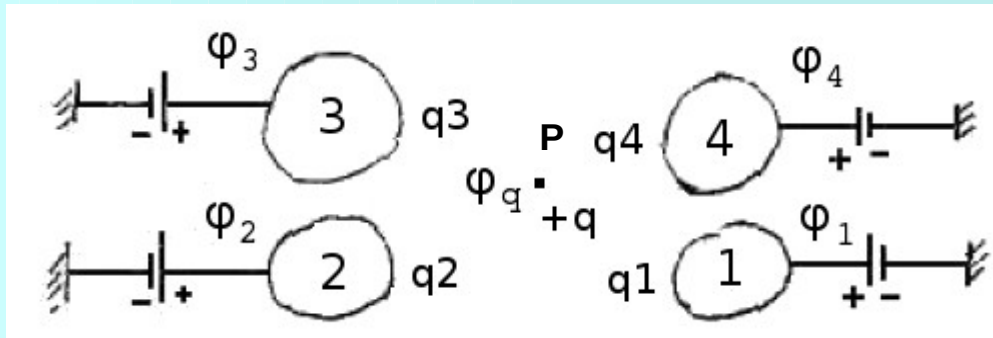
$\Phi_i$  il potenziale generato nella posizione occupata dalla carica  $Q_i$  da parte delle altre  $N - 1$  cariche  $Q_j$

$$\Phi_i = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \sum_{j \neq i} \frac{Q_j}{r_{ij}}$$

# Moto di cariche e cariche indotte

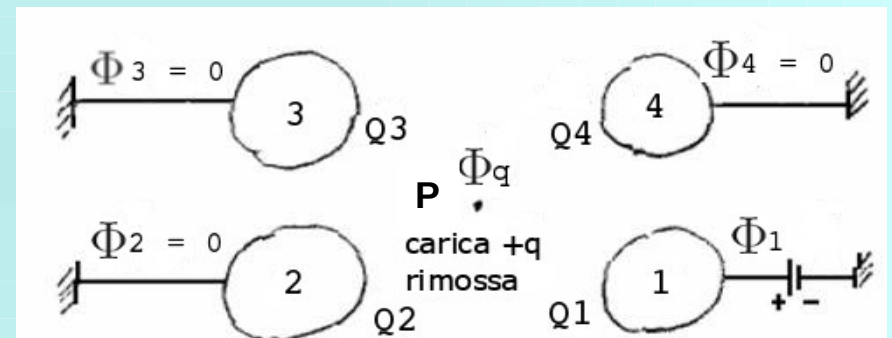
## Applicazione del Teorema di reciprocità di Green dell'elettrostatica

### Configurazione 1



Cariche  $q_1, q_2, q_3, q_4, q$  in posizioni 1, 2, 3, 4 e P

### Configurazione 2



Cariche  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, 0$  in posizioni 1, 2, 3, 4 e P

$$\sum_{i=1,4} Q_i \varphi_i = q \Phi_q + q_1 \Phi_1$$

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1,N} Q_i \varphi_i \right) = 0 = q \frac{d\Phi_q}{dt} + \frac{dq_1}{dt} \Phi_1 = q \frac{d\Phi_q}{dt} + i_1 \Phi_1$$

$\varphi_i$  , costanti (generatori),  $Q_i$  , cariche statiche (assenza di q)

## Teorema di Ramo

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1, N} Q_i \varphi_i \right) = 0 = q \frac{d\Phi_q}{dt} + \frac{dq_1}{dt} \Phi_1 = q \frac{d\Phi_q}{dt} + i_1 \Phi_1$$

$$\frac{d\Phi_q[x(t), y(t), z(t)]}{dt} = \frac{\partial\Phi_q}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial\Phi_q}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial\Phi_q}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = -E_{qx}v_x - E_{qy}v_y - E_{qz}v_z = -\vec{v} \cdot \vec{E}_q$$

$$i_1 = \frac{1}{\Phi_1} q \vec{v} \cdot \vec{E}_q$$

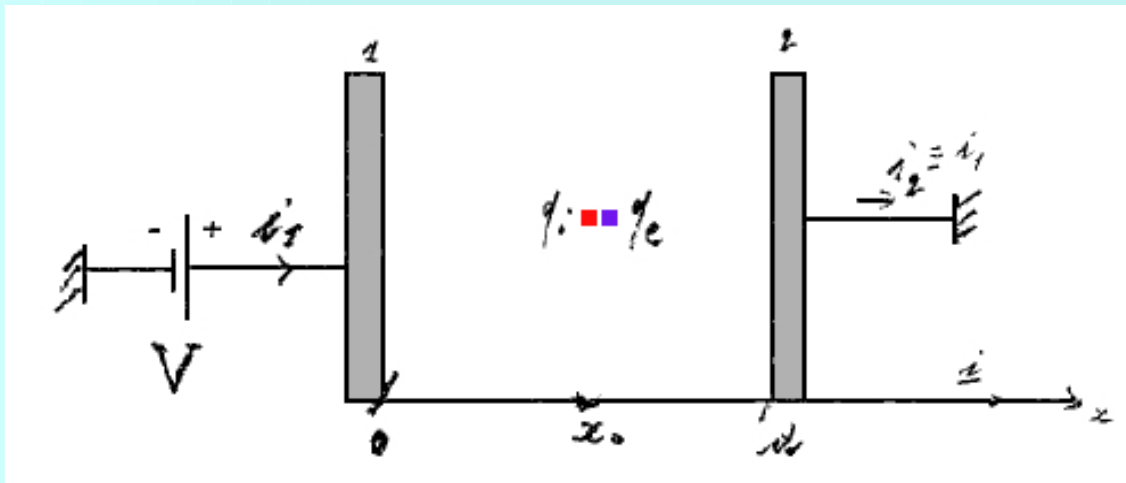
dove  $\vec{E}_q$  è il campo elettrico creato dai conduttori nel punto in cui si trova la carica  $q$ , in assenza della medesima.

Nei casi pratici  $\Phi_1$  è la tensione  $V$  di un elettrodo rispetto ad un altro di riferimento, oppure la tensione  $V$  di una armatura di un rivelatore rispetto all'altra, e si scrive quindi:

$$i = \frac{1}{V} q \vec{v} \cdot \vec{E}_q$$

# Applicazione del Teorema di Ramo

## Coppia elettrone-ione in un condensatore piano in vuoto



$$(x_i(t) - x_0)\vec{i} = \frac{1}{2} \left( \frac{eV}{m_i d} \right) t^2 \vec{i} = \frac{e}{d} \frac{V}{2m_i} t^2 \vec{i}$$

$$t_i = [(2m_i d / eV)(d - x_0)]^{1/2}$$

$$(x_e(t) - x_0)\vec{i} = -\frac{1}{2} \left( \frac{eV}{m_e d} \right) t^2 \vec{i}$$

$$t_e = [(2m_e d / eV)x_0]^{1/2}$$

$$i_{1i}(t) = \frac{1}{V} e \left[ \left( \frac{dx_i}{dt} \right) \vec{i} \right] \cdot \vec{E} = \frac{1}{V} e \left( \frac{eV}{m_i d} \right) t \vec{i} \cdot \left( \frac{V}{d} \right) \vec{i} = \left( \frac{e^2 V}{m_i d^2} \right) t$$

$$q_{1i}(t) - q_{1i}(0) = \frac{e^2 V}{2m_i d^2} t^2$$

$$i_{1e}(t) = \frac{1}{V} (-e) \left[ \left( \frac{dx_e}{dt} \right) \vec{i} \right] \cdot \vec{E} = \frac{1}{V} (-e) \left( -\frac{eV}{m_e d} \right) t \vec{i} \cdot \left( \frac{V}{d} \right) \vec{i} = \left( \frac{e^2 V}{m_e d^2} \right) t$$

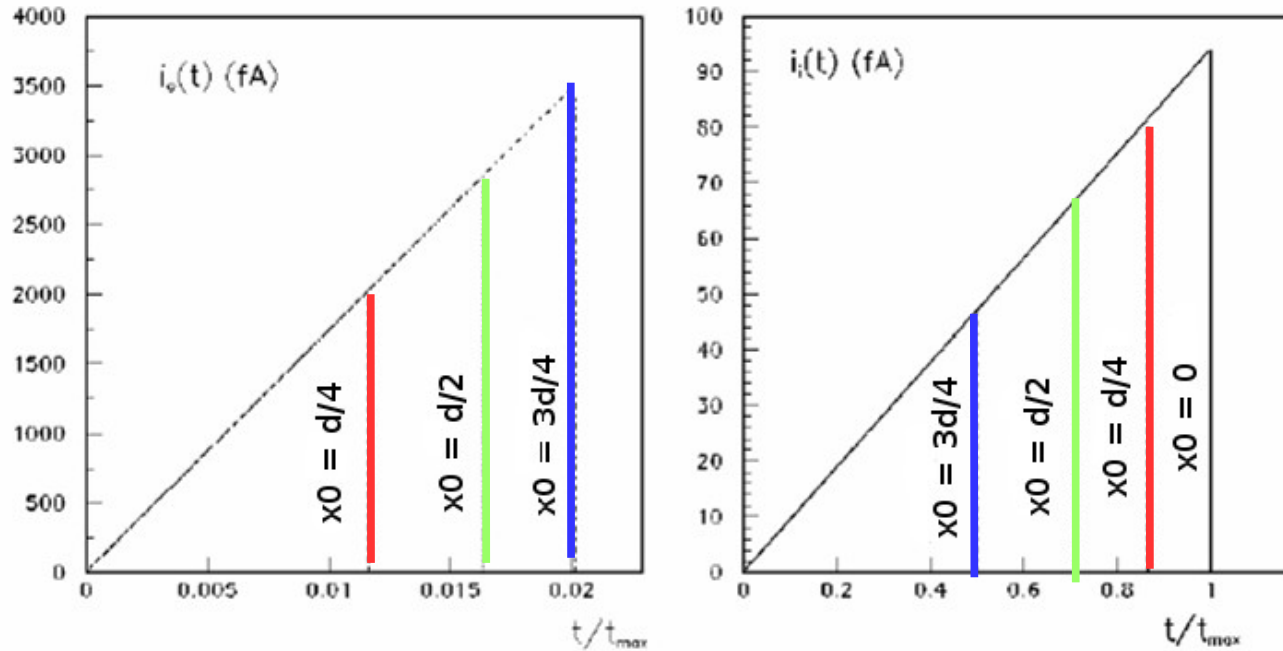
$$q_{1e}(t) - q_{1e}(0) = \frac{e^2 V}{2m_e d^2} t^2$$

$$i_1(t) = i_{1i}(t) + i_{1e}(t) = \left( \frac{e^2 V}{d^2} \right) \left[ \frac{t}{m_i} + \frac{t}{m_e} \right]$$

$$q_1(t) = \left( \frac{e^2 V}{2d^2} \right) \left[ \frac{t^2}{m_i} + \frac{t^2}{m_e} \right]$$

# Applicazione del Teorema di Ramo

## Coppia elettrone-ione in un condensatore piano in vuoto

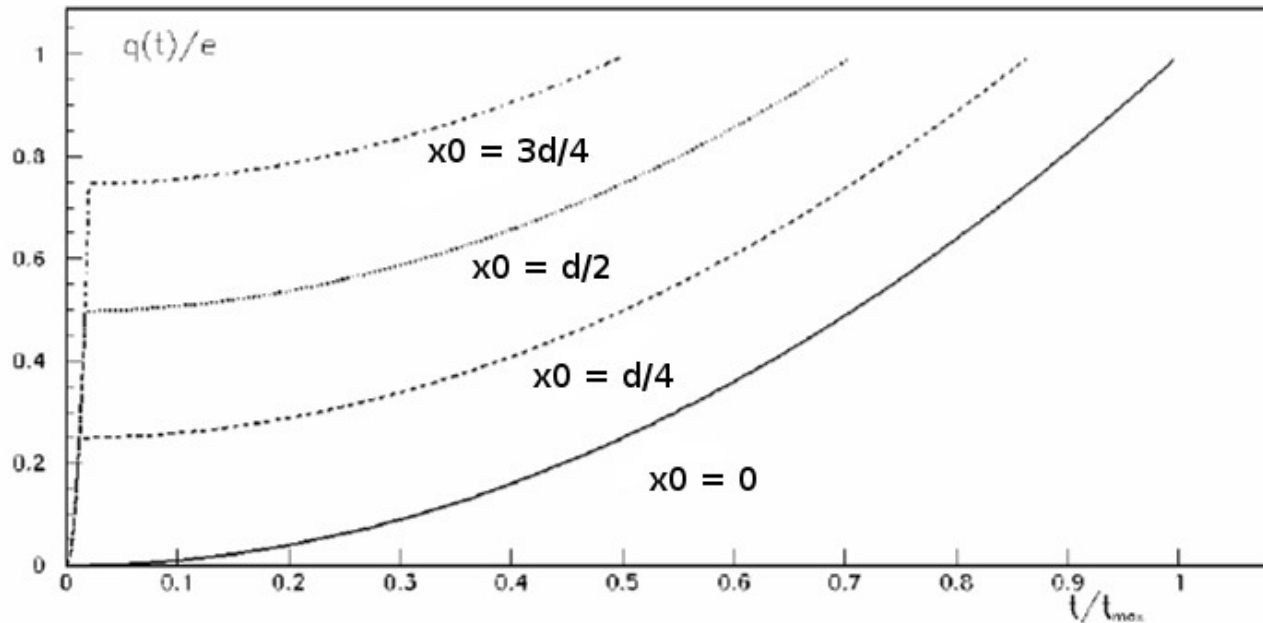


nel caso di

$$d = 10 \text{ cm e } V = 500 \text{ V}$$

Correnti elettronica e ionica (parte a)

$$i_1(t) = i_{1i}(t) + i_{1e}(t) = \left( \frac{e^2 V}{d^2} \right) \left[ \frac{t}{m_i} + \frac{t}{m_e} \right]$$



carica indotta (parte b)

$$q_1(t) = \left( \frac{e^2 V}{2d^2} \right) \left[ \frac{t^2}{m_i} + \frac{t^2}{m_e} \right]$$

# Rivelatori a gas – Camere di ionizzazione

passaggio di una particella carica in un gas → l'eccitazione o la ionizzazione delle molecole del gas

energia di ionizzazione tra 10 e 25 eV

ma altri processi che non producono coppie

e quindi energia media persa per coppia prodotta ( $W$ ) tra 25 e 35 eV/coppia

## Migrazione e raccolta della carica

applicato un campo elettrico

velocità di deriva

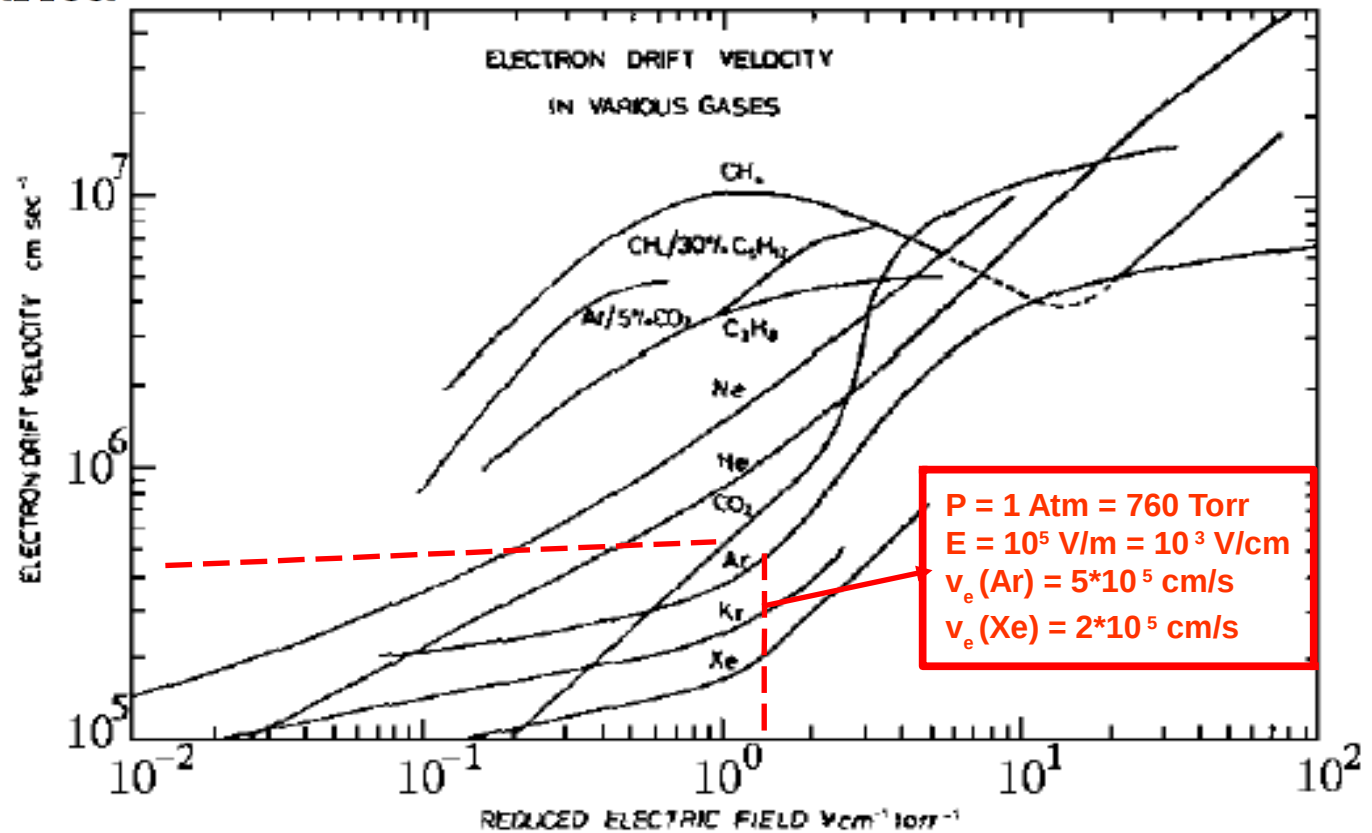
$$v = \mu \varepsilon / p$$

con  $\varepsilon$  intensità del campo elettrico

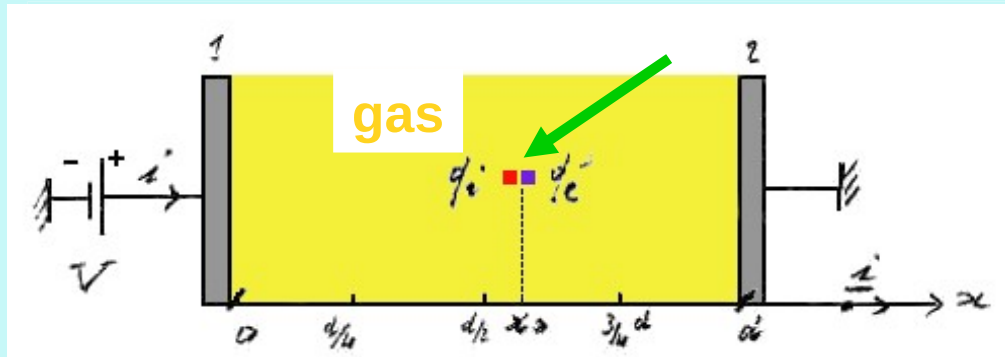
$p$  pressione del gas

mobilità  $\mu$

$$\mu_e \approx 10^5 \text{ (cm}^2 \cdot \text{Torr/V} \cdot \text{s)} \approx 10^3 \mu_i$$



# Rivelatori a gas – Camere di ionizzazione



$$\vec{v}_i = v_i \vec{i} = \mu_i(E/p) \vec{i}$$

$$\vec{v}_e = -v_e \vec{i} = -\mu_e(E/p) \vec{i}$$

$$(x_i(t) - x_0) \vec{i} = v_i t \vec{i}$$

$$t_i = (d - x_0)/v_i$$

**Corrente ionica**

$$i_i(t) = \frac{1}{V} e v_i \vec{i} \cdot \vec{E} = \frac{1}{V} e v_i \frac{V}{d} = \frac{e}{d} v_i \quad (\text{corrente costante})$$

$$q_i(t) - q_i(0) = \frac{e}{d} v_i t$$

$$(x_e(t) - x_0) \vec{i} = -v_e t \vec{i}$$

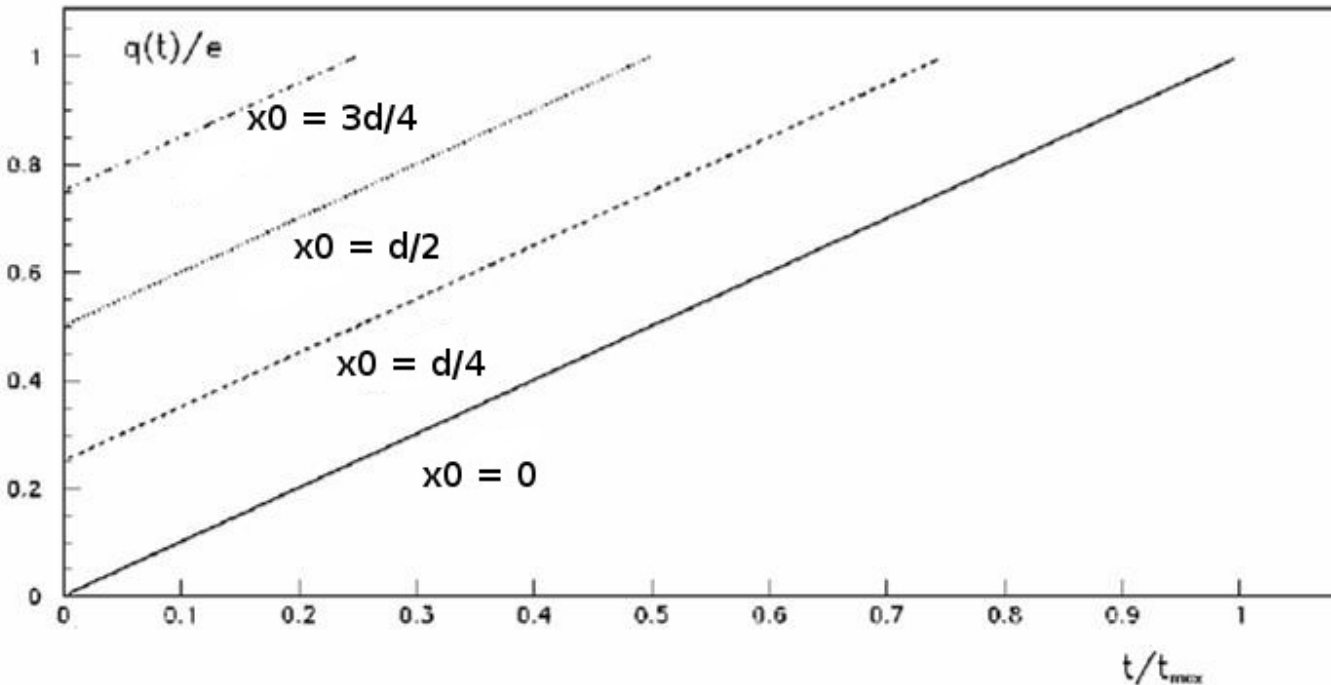
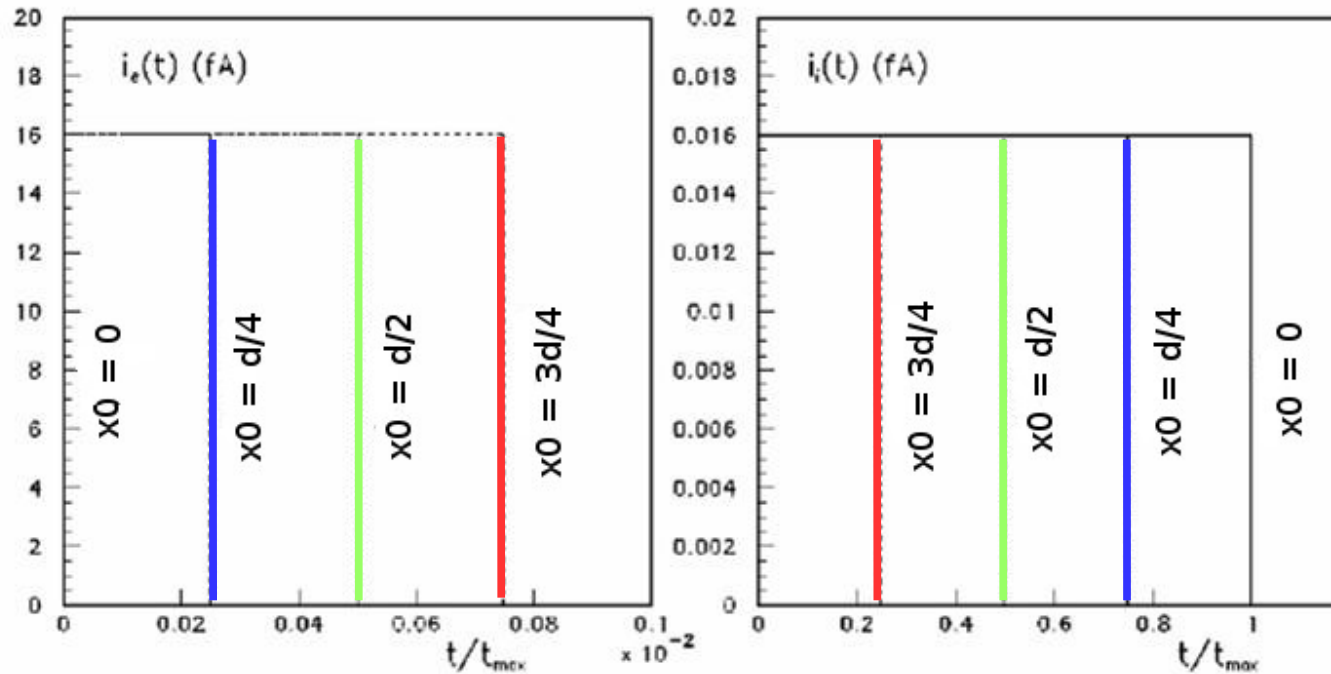
$$t_e = x_0/v_e$$

**Corrente elettronica**

$$i_e(t) = \frac{1}{V} (-e)(-v_e \vec{i}) \cdot \vec{E} = \frac{1}{V} e v_e \frac{V}{d} = \frac{e}{d} v_e \quad (\text{corrente costante})$$

$$q_e(t) - q_e(0) = \frac{e}{d} v_e t$$

# Rivelatori a gas – Camere di ionizzazione



nel caso di

$d = 1 \text{ cm}$  e  $V = 100 \text{ V}$

Correnti elettronica

$$i_e(t) = \frac{1}{V}(-e)(-v_e \vec{i}) \cdot \vec{E} = \frac{1}{V}ev_e \frac{V}{d} = \frac{e}{d}v_e$$

e ionica (parte a)

$$i_i(t) = \frac{1}{V}ev_i \vec{i} \cdot \vec{E} = \frac{1}{V}ev_i \frac{V}{d} = \frac{e}{d}v_i$$

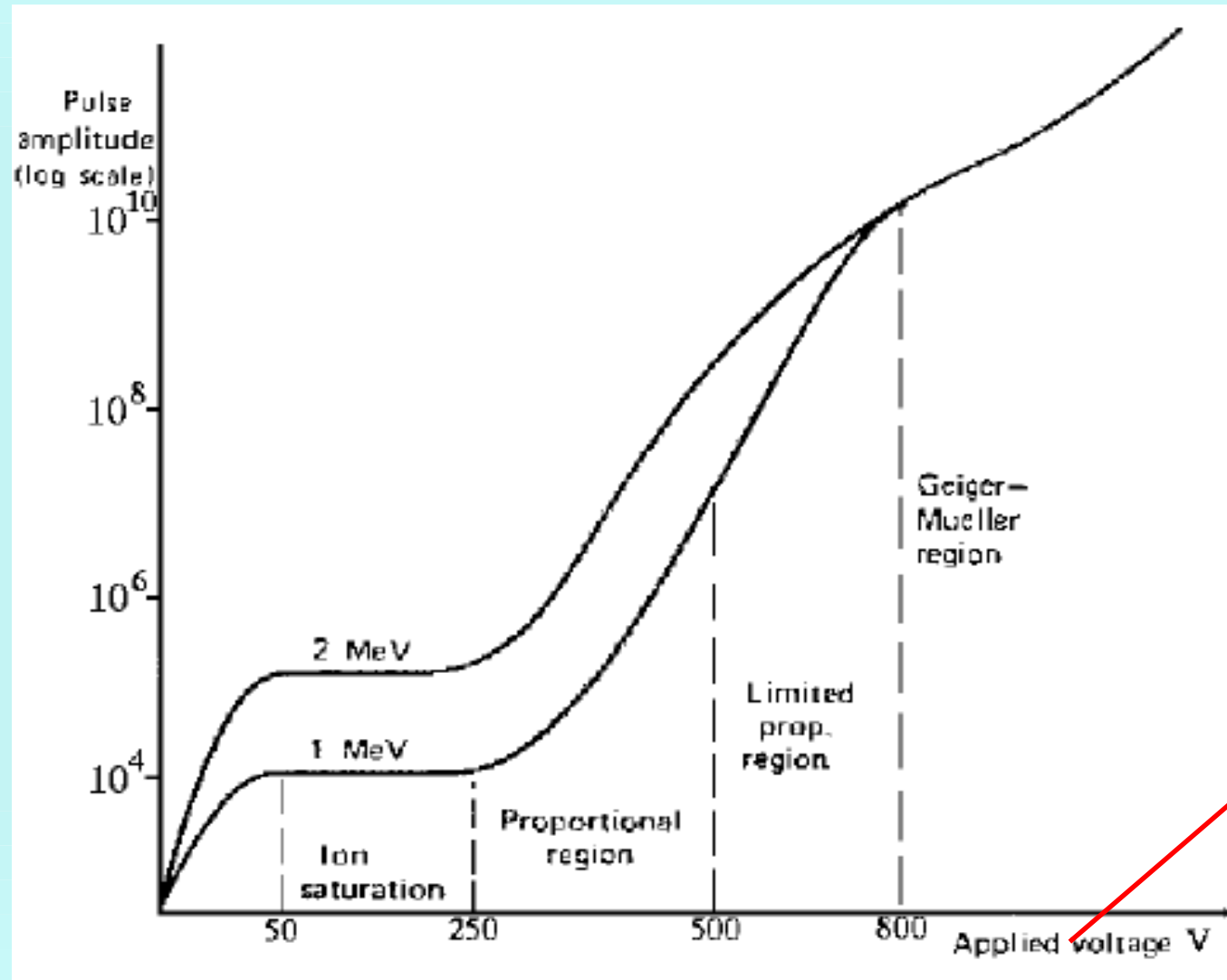
carica indotta (parte b)

$$q_e(t) - q_e(0) = \frac{e}{d}v_e t$$

$$q_i(t) - q_i(0) = \frac{e}{d}v_i t$$



## Rivelatori a gas – Regioni di utilizzo



Rivelatore  
piano con  
 $p=0.1$  Atm  
 $d=1$ mm

# Rivelatori a gas proporzionali

Ionizzazione secondaria per campi elettrici di  $10^6$  V/m

“valanga di Townsend”

$\alpha$

primo coefficiente di Townsend

un rivelatore a facce piane e parallele

$\alpha$  non dipende dalla distanza dalle armature alla quale si trova l'elettrone ( $x$ )

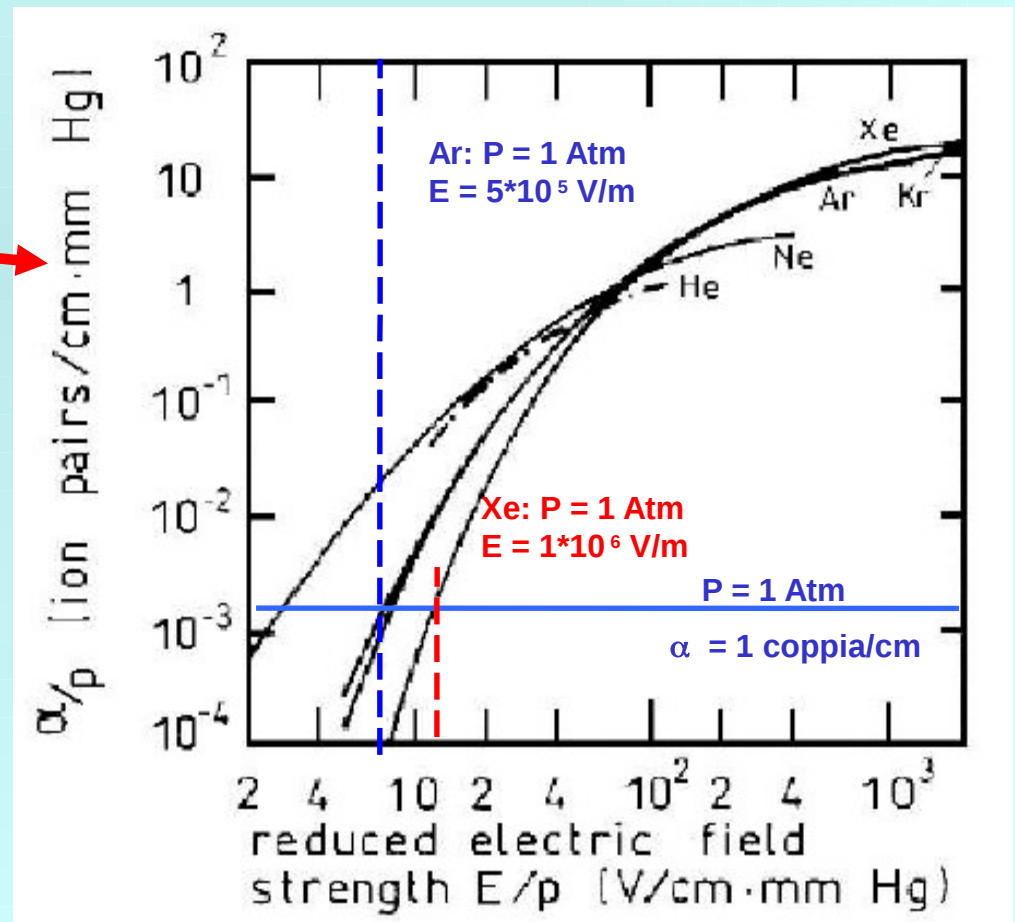
$$n(x) = n(0)e^{\alpha x}$$

geometria cilindrica

il campo aumenta lungo la valanga

crescita di  $n$  ancora più forte

$$dn = \alpha n dx$$



# Rivelatori a gas proporzionali

geometria cilindrica

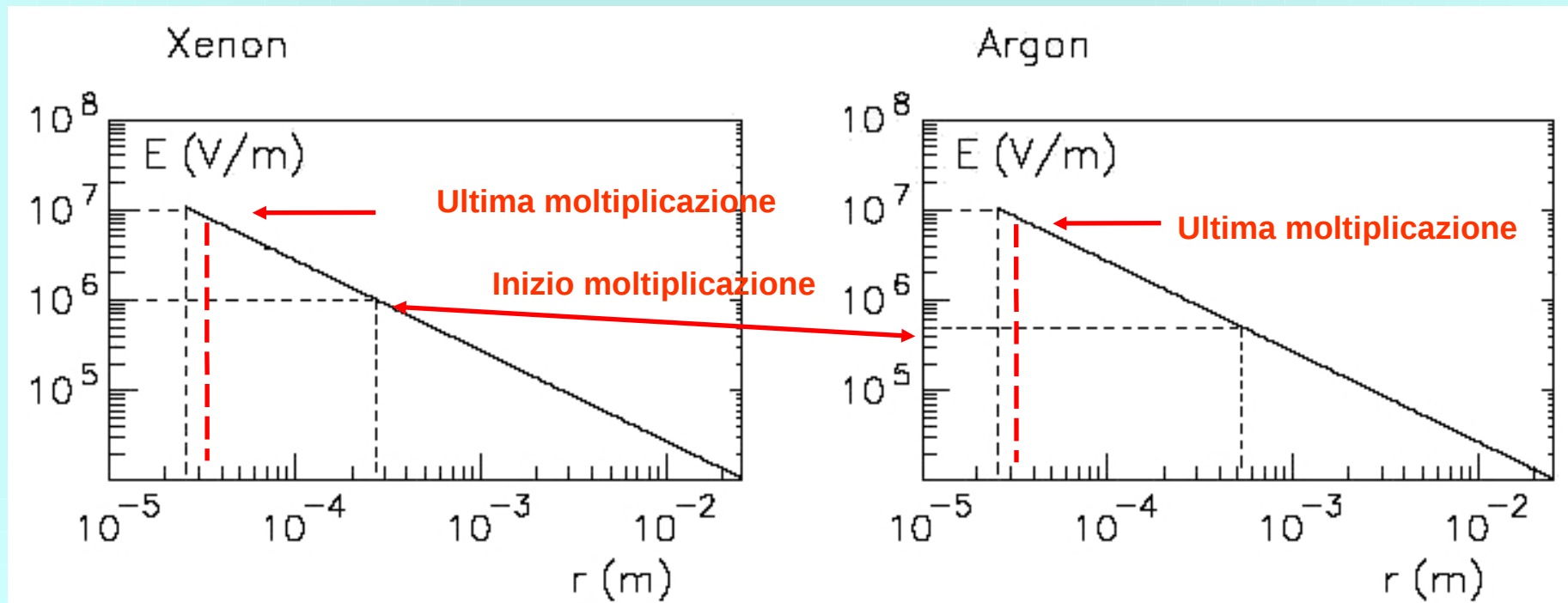
- Campi elettrici più alti a parità di tensione  $V$  applicata
- Regione di moltiplicazione confinata in volume piccolo

$$E = V/[r \ln(r_2/r_1)] \quad r_1 = 25 \mu\text{m} \quad r_2 = 2.5 \text{ cm}$$

Con  $V = 2 \cdot 10^3 \text{ V}$  si ottiene

$$E(25 \mu\text{m}) = 1.2 \cdot 10^7 \text{ V/m}$$

$$E(2.5 \text{ cm}) = 1.2 \cdot 10^4 \text{ V/m}$$



# Rivelatori a gas proporzionali

geometria cilindrica

Moltiplicazione:

$$\ln M = [V / \ln(r_2/r_1)] (\ln 2 / \Delta V) \ln [V / p r_1 \ln(r_2/r_1) K]$$

$V$  tensione applicata

$p$  pressione del gas

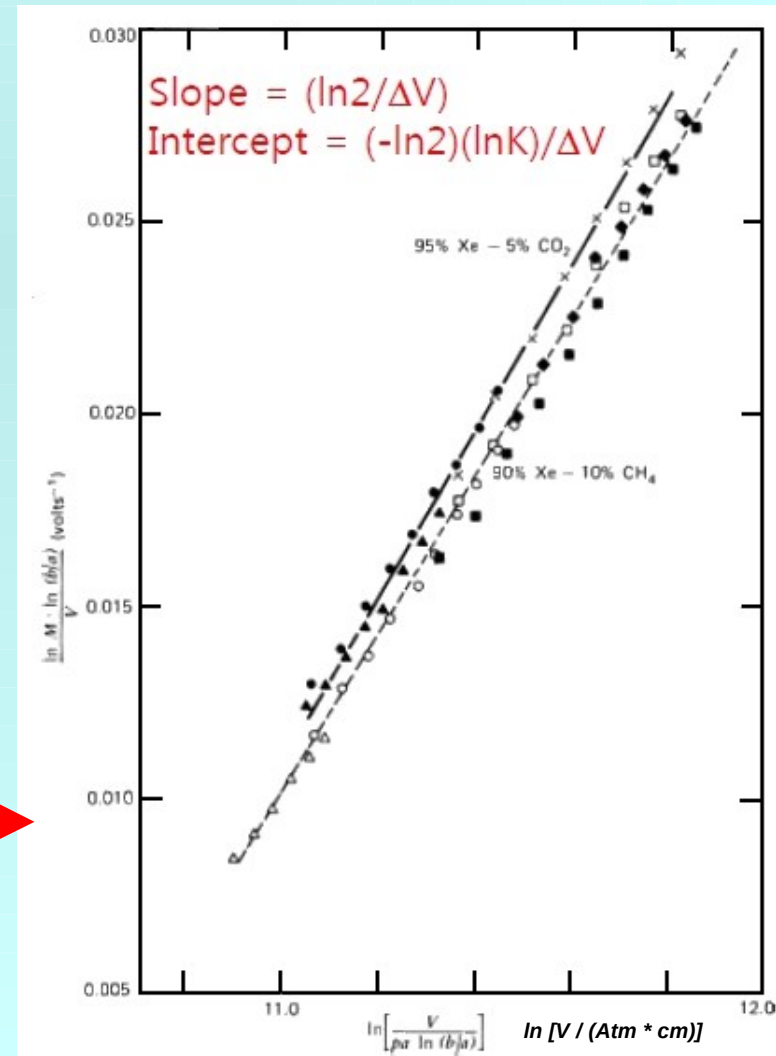
$\Delta V$  potenziale di ionizzazione del gas

$K$  valore minimo di  $E/p$  per moltiplicazione

$$\ln M = bV * \ln(a V) \quad \text{----->} \quad M = (a V)^{b V}$$

## Diethorn Plot

$$\ln M * \ln(r_2/r_1) / V = (\ln 2 / \Delta V) * [\ln(V/p r_1 \ln(r_2/r_1)) - \ln(K)]$$



# Rivelatori a gas proporzionali

geometria cilindrica

Moltiplicazione:

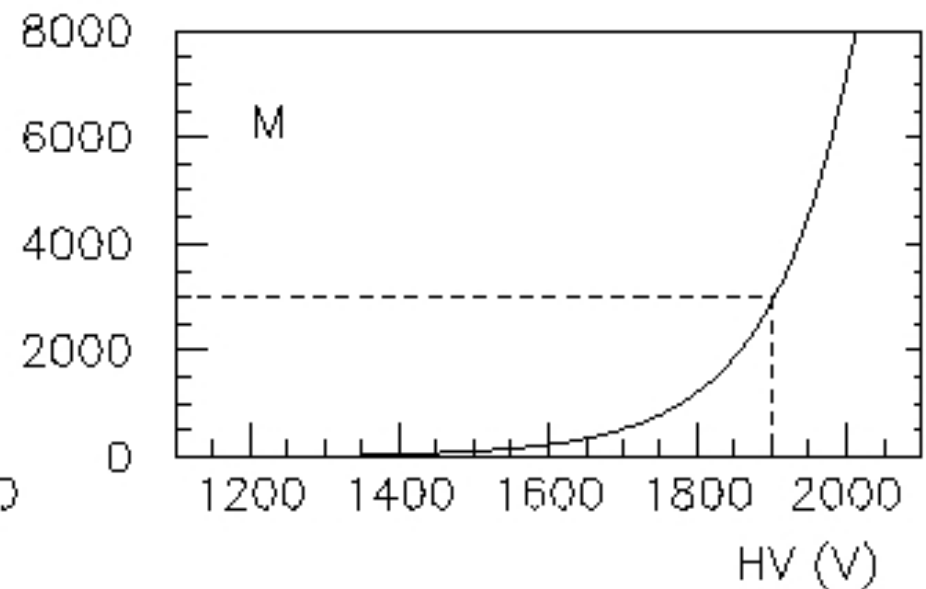
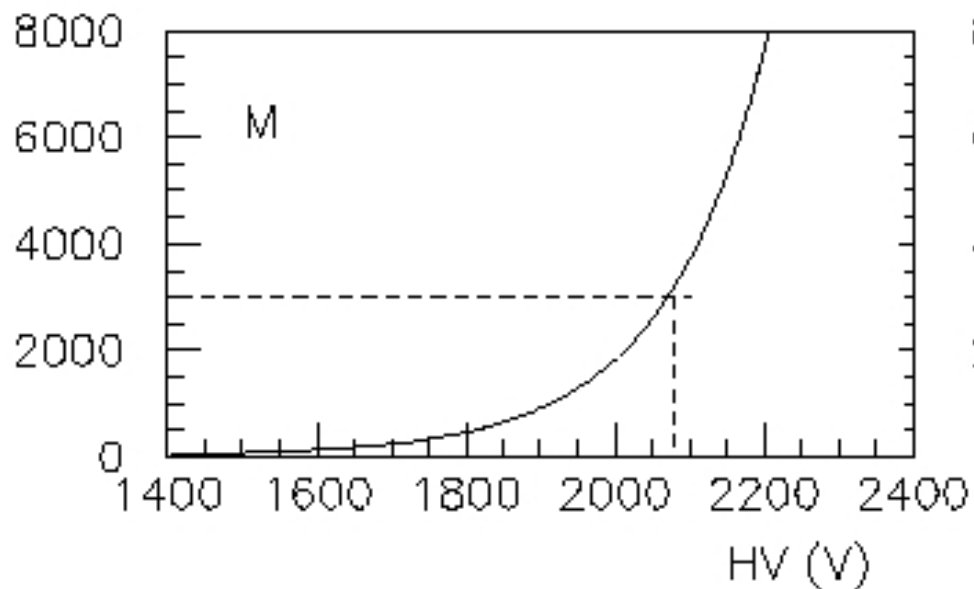
$$\ln M = [V / \ln(r_2/r_1)] (\ln 2 / \Delta V) \ln [V / pr_1 \ln(r_2/r_1) K]$$

Per Xe  $\Delta V \sim 31.4 \text{ V}$   $K \sim 36.6 \text{ V m}^{-1} \text{ Pa}^{-1}$

Per Ar  $\Delta V \sim 21.8 \text{ V}$   $K \sim 45.0 \text{ V m}^{-1} \text{ Pa}^{-1}$

Xenon

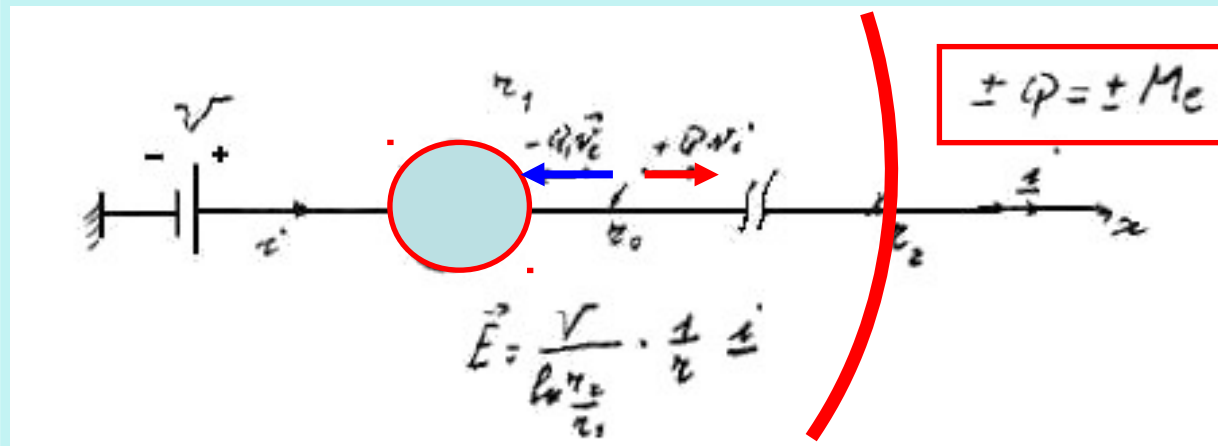
Argon



# Rivelatori a gas proporzionali

geometria cilindrica

Correnti e cariche indotte nei contatori proporzionali



$$i_e(t) = (-Q/V)(V/r)[1/\ln(r_2/r_1)] \vec{i} \cdot (-v_e)\vec{i} = (Q/r)v_e[1/\ln(r_2/r_1)]$$

con  $r(t) = r_0 - v_e t$  e di durata  $t_e = (r_0 - r_1) / v_e \approx 5 \mu\text{m} / (10^6 \text{ m/s}) \approx 5 \text{ ps}$

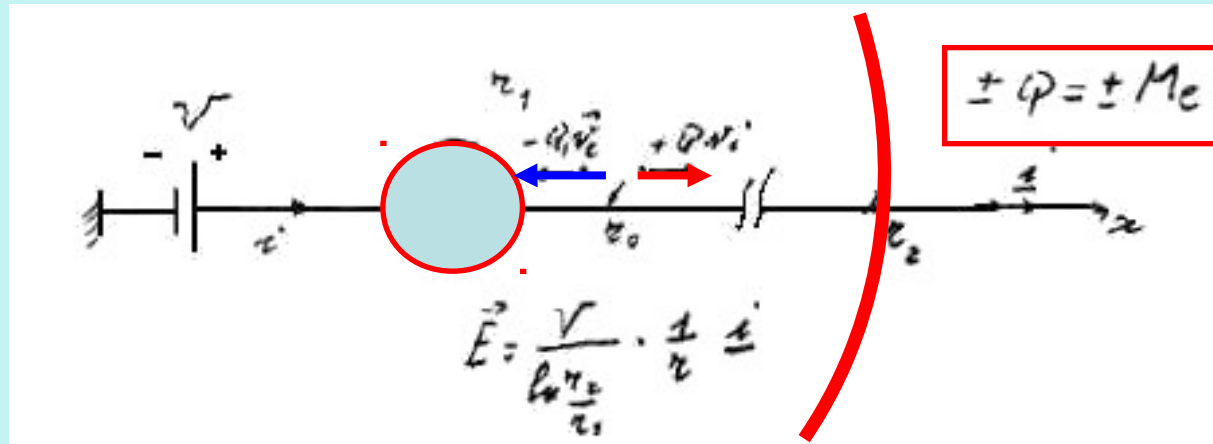
$$q_e(t) - q_e(0) = \int_{0,t} i_e(t) dt = - \int_{r_0,r} [Q/\ln(r_2/r_1)] (dr/r) = [Q/\ln(r_2/r_1)] \ln(r_0/r)$$

$$q_e(\infty) - q_e(0) = [Q/\ln(r_2/r_1)] \ln(r_0/r_1) \approx 0.026^* Q$$

# Rivelatori a gas proporzionali

geometria cilindrica

Correnti e cariche indotte nei contatori proporzionali



$$i_i(t) = (Q/V)(V/r)[1/\ln(r_2/r_1)] \vec{i} \cdot (v_i)\vec{i} = (Q/r)v_i[1/\ln(r_2/r_1)]$$

$$= Q * [\ln(r_2/r_1)]^{-1} (\mu E_0 / r_0 p) / [1 + (2\mu E_0 / r_0 p)t] = A \frac{1}{1 + t/\tau}$$

di durata  $t_i \approx 10 \text{ ms}$  e con  $\tau \approx 15 \text{ ns}$

$$q_i(t) - q_i(0) = \int_{0,t} i_i(t) dt = [Q/\ln(r_2/r_1)] \ln(r/r_0)$$

$r_1=25 \mu\text{m}$ ,  $r_2=2.5 \text{ cm}$ ,  $p=1 \text{ Atm}$ ,  $HV=1900 \text{ V}$ ,  $Q=0.25 \text{ pC}$

# Rivelatori a gas proporzionali

geometria cilindrica

$$i_e(t) = [Qv_e] / [(r_0 - v_e t) \ln(r_2/r_1)]$$

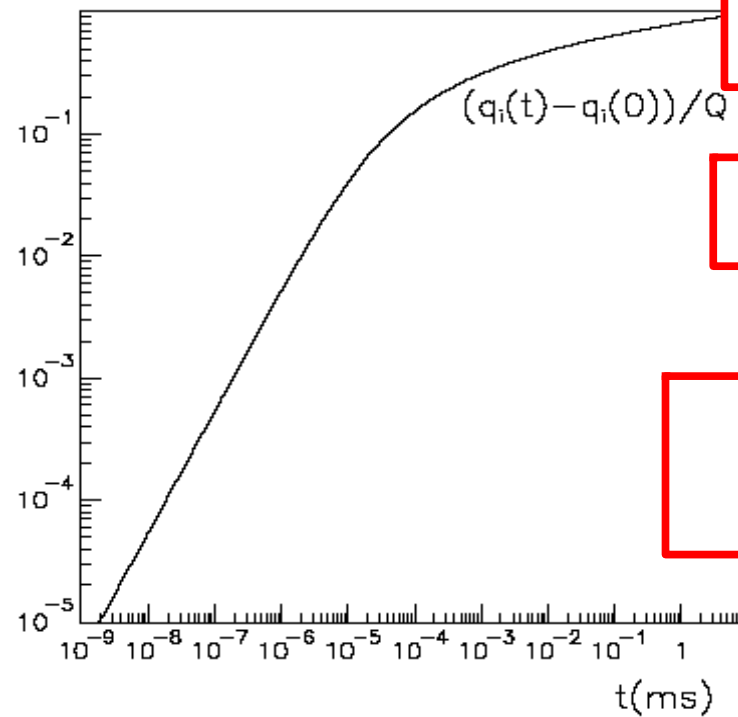
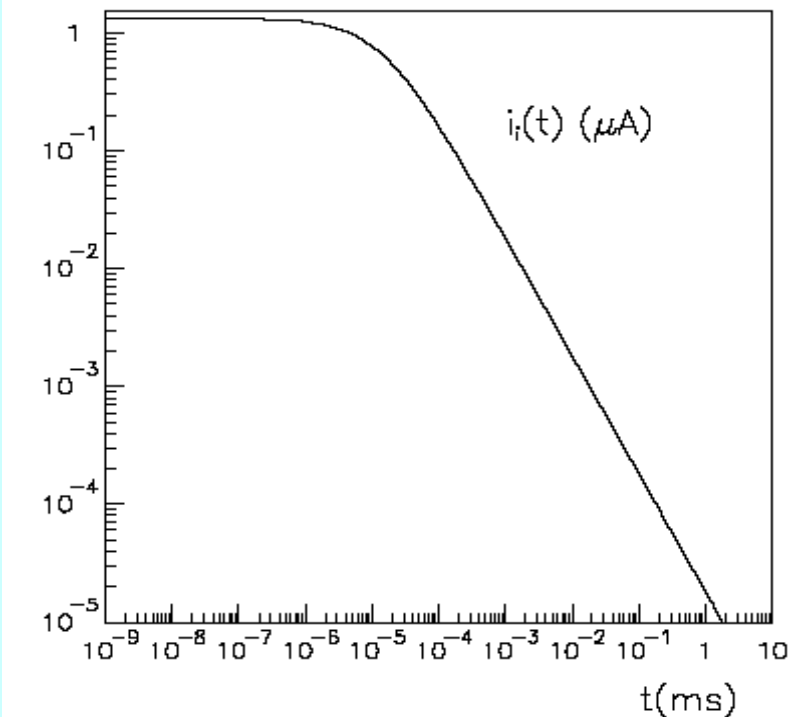
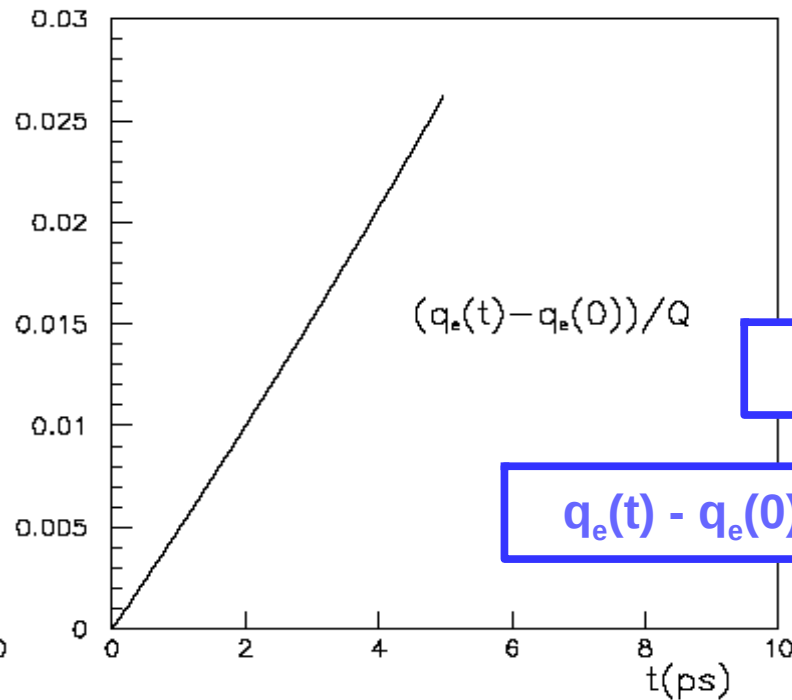
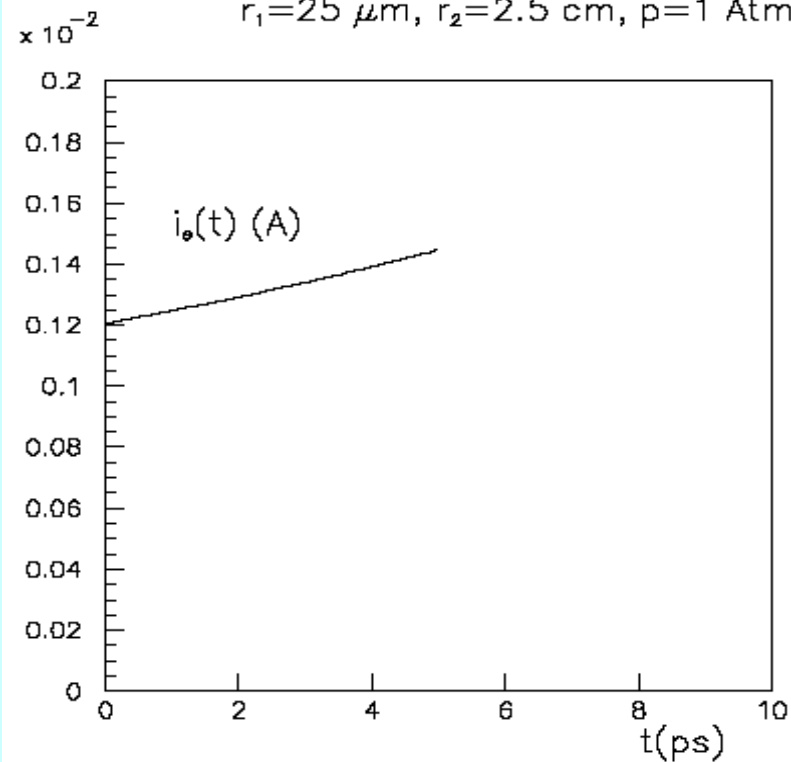
$$q_e(t) - q_e(0) = [Q/\ln(r_2/r_1)] \ln[r_0/(r_0 - v_e t)]$$

$$i_i(t) = [A] / [1 + t/\tau]$$

$$q_i(t) - q_i(0) = [A\tau] \ln[1 + t/\tau]$$

con  $A = Q\mu E_0 / [pr_0 \ln(r_2/r_1)]$

e  $\tau = pr_0/2\mu E_0$





# Rivelatori a gas proporzionali

Schema della strumentazione di laboratorio

IMPULSATORE

RIVELATORE

PREAMPLIFICATORE

FORMATORE

OSCILLOGRAFO

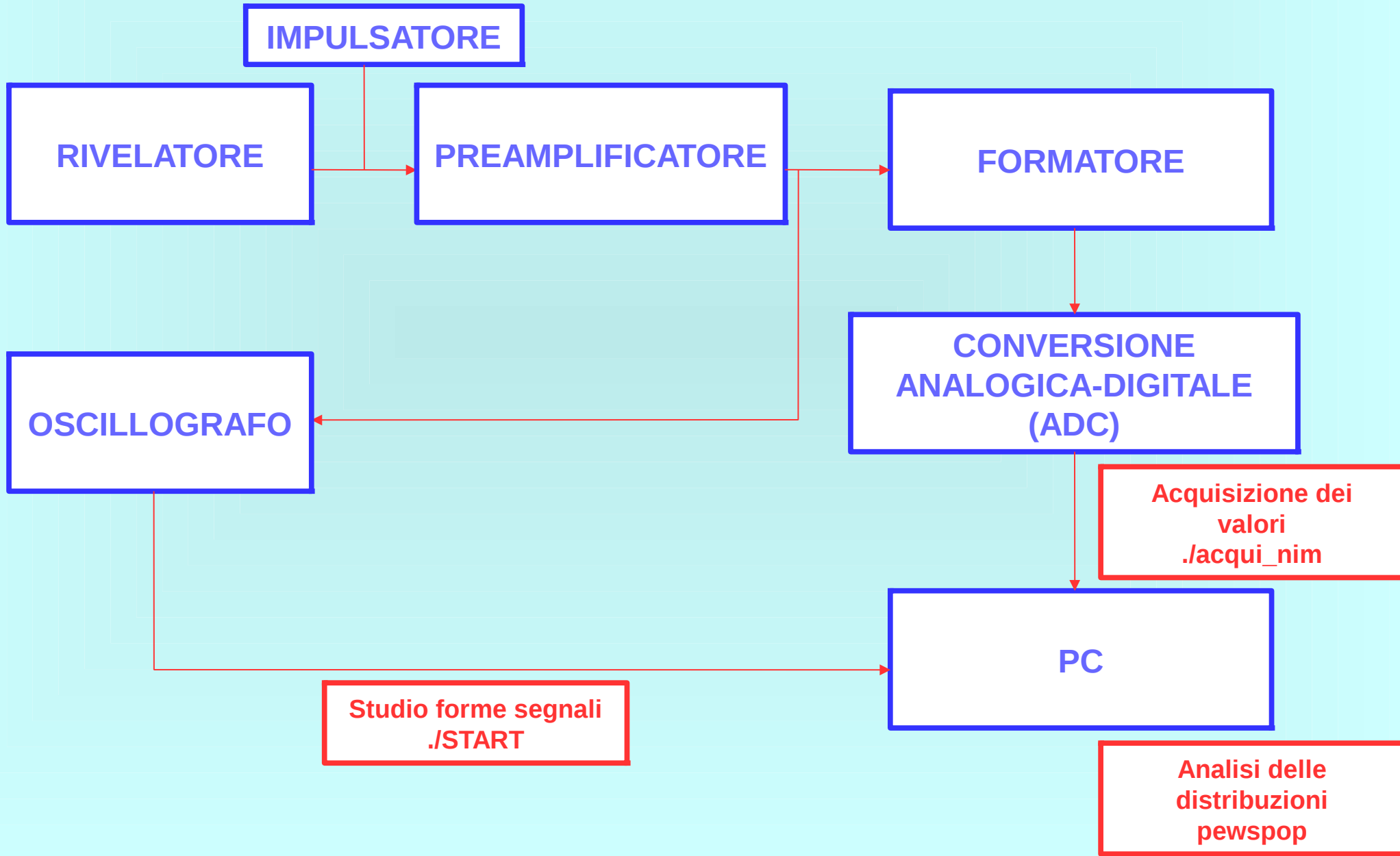
CONVERSIONE  
ANALOGICA-DIGITALE  
(ADC)

Acquisizione dei  
valori  
.acqui\_nim

PC

Studio forme segnali  
.START

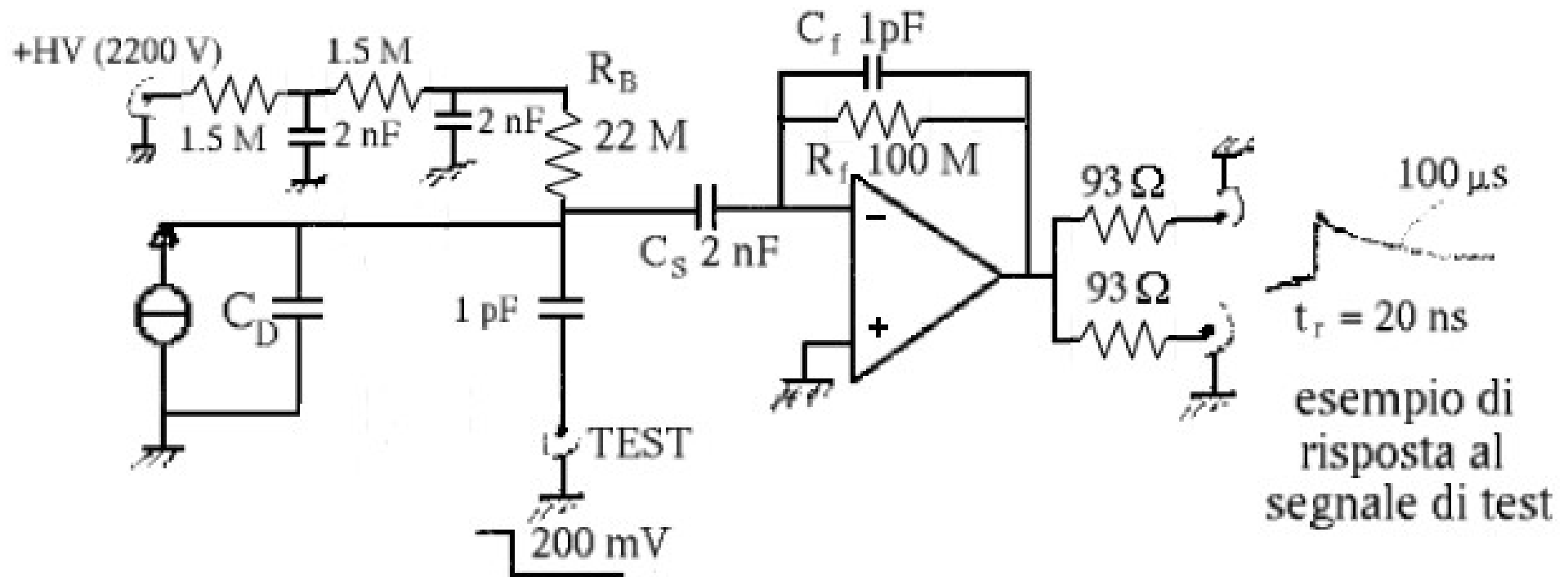
Analisi delle  
distribuzioni  
pewspop



# Rivelatori a gas proporzionali

geometria cilindrica

preamplificatore



$$C_D = 2\pi\epsilon\ell/\ln(r_2/r_1) \approx 1.2 \text{ pF}$$

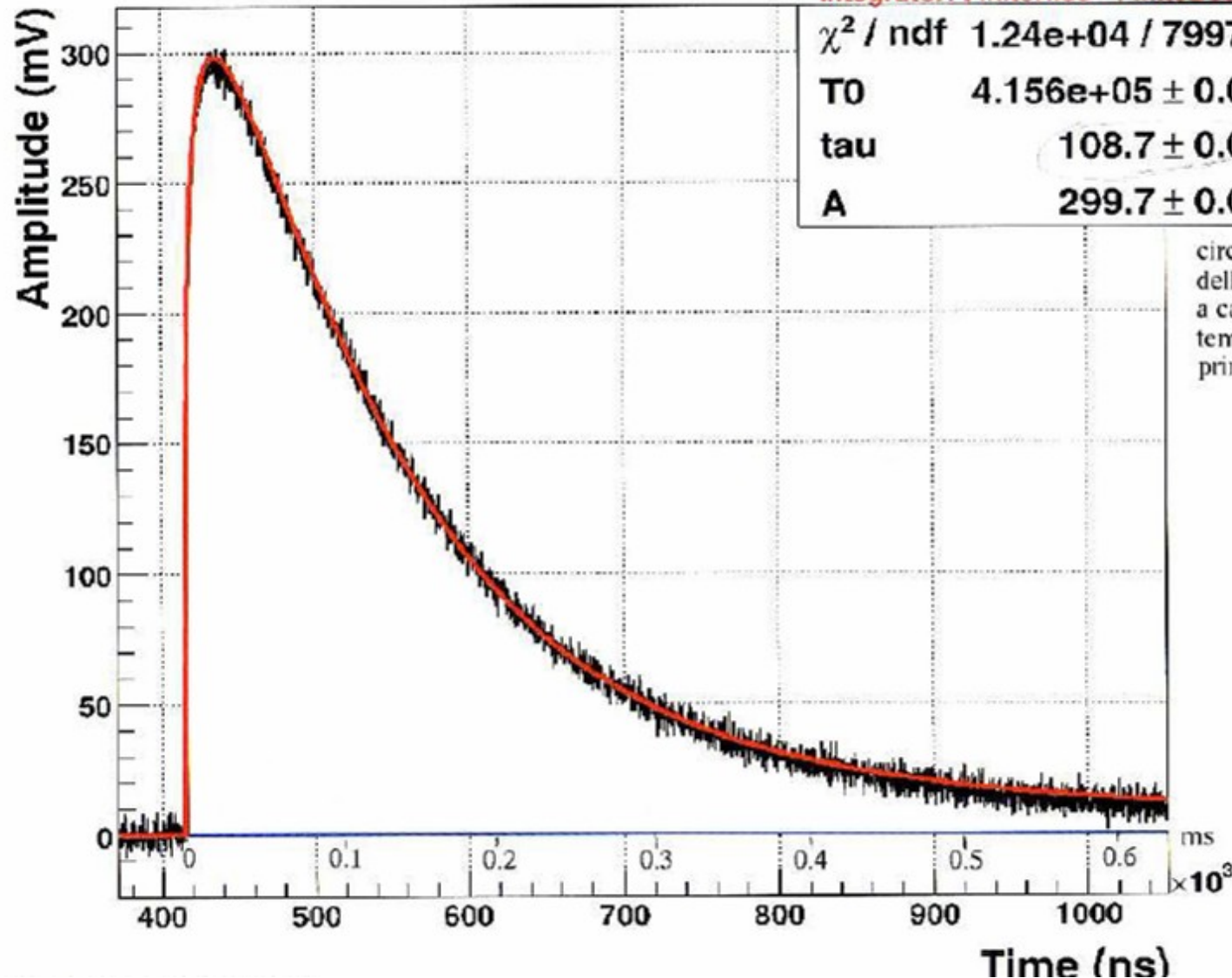
# Rivelatori a gas proporzionali

geometria cilindrica

Scope data - [ 0.00 GS/s ]

Current:  $1/(1+t/\tau)$

Integrator: FiniteRise - FiniteDecay



circa 10 volte maggiore del  $\tau$   
della formula 2.2.9 (v. testo)  
a causa della distribuzione dei  
tempi di arrivo degli elettroni  
primari

# Rivelatori a gas proporzionali

geometria cilindrica

$$Q = Mn_0e \longrightarrow \left(\frac{\sigma_Q}{Q}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_{n_0}}{n_0}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_M}{M}\right)^2$$

$$M = \frac{1}{n_0} \sum_{i=1}^{n_0} A_i = \bar{A}$$

$$\sigma_M^2 = \left(\frac{1}{n_0}\right)^2 \sum_{i=1}^{n_0} \sigma_A^2 = \frac{1}{n_0} \sigma_A^2$$

$$\left.\vphantom{\begin{matrix} M \\ \sigma_M^2 \end{matrix}}\right\} \longrightarrow \left(\frac{\sigma_Q}{Q}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_{n_0}}{n_0}\right)^2 + \frac{1}{n_0} \left(\frac{\sigma_A}{\bar{A}}\right)^2$$

modello proposto da Byrne

$$\left(\frac{\sigma_A}{\bar{A}}\right)^2 = \left(\frac{1}{\bar{A}}\right) + b$$

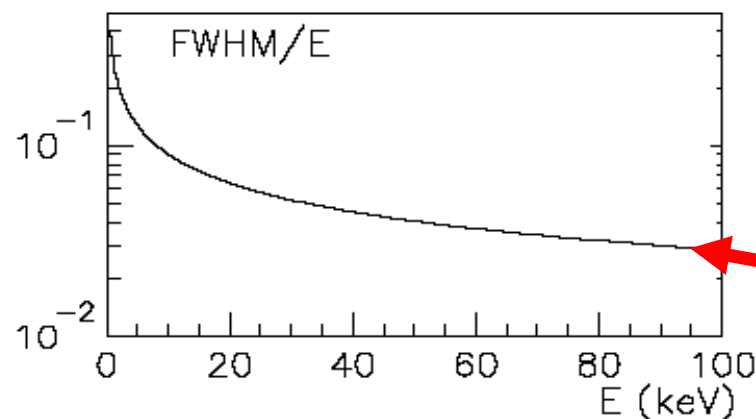
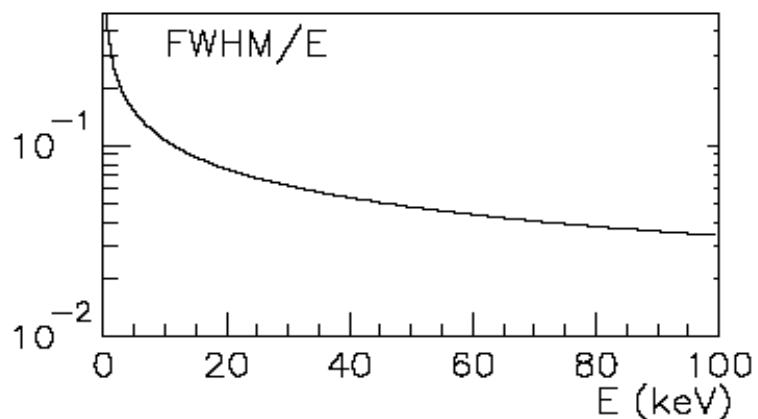
$$\sigma_{n_0}^2 = F \cdot n_0$$

$$\left.\vphantom{\begin{matrix} (\sigma_A/\bar{A})^2 \\ \sigma_{n_0}^2 \end{matrix}}\right\} \longrightarrow \left(\frac{\sigma_Q}{Q}\right)^2 \approx \frac{(F+b)}{n_0}$$

$$\frac{\sigma_Q}{Q} = \left(\frac{W(F+b)}{E}\right)^{1/2} = \left(\frac{C}{E}\right)^{1/2}$$

Xenon

Argon



$$F = 0.05 \div 0.20$$

$$b = 0.4 \div 0.7$$

$$F=0.17$$

$$b=0.5$$