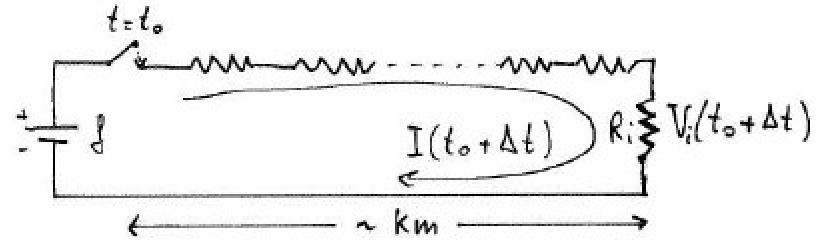
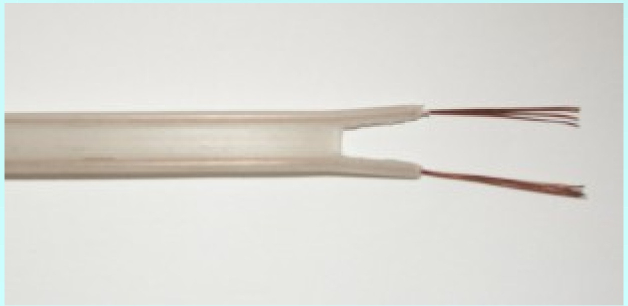
# Linea di trasmissione

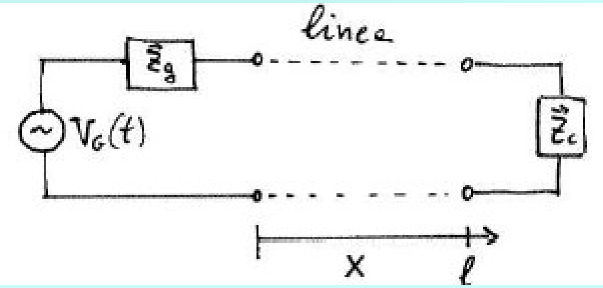
**Si consideri il circuito accanto e si indichi con $R_t$ la resistenza equivalente della serie delle resistenze. Alla chiusura del tasto le leggi dei cricuiti prevedono che istantaneamente si stabilisca una corrente $I = f / R_t$**




**Tale risultato comporterebbe una trasmissione istantanea di informazione, ipotesi che viene meno quanto maggiori sono le dimensioni del circuito oppure quanto minori sono i tempi tipici di variabilità dei segnali.**
**Ad esempio, in un circuito di lunghezza di 1 m risulta difficile ipotizzare che la corrente sia, ad un certo istante, la stessa in tutti i suoi punti se la fem f varia ad una frequenza di 1 GHz, corrispondente ad un periodo di 1 ns, visto che la radiazione elettromagnetica impiegherebbe 3.3 ns per propagarsi nel vuoto per una lunghezza analoga.**

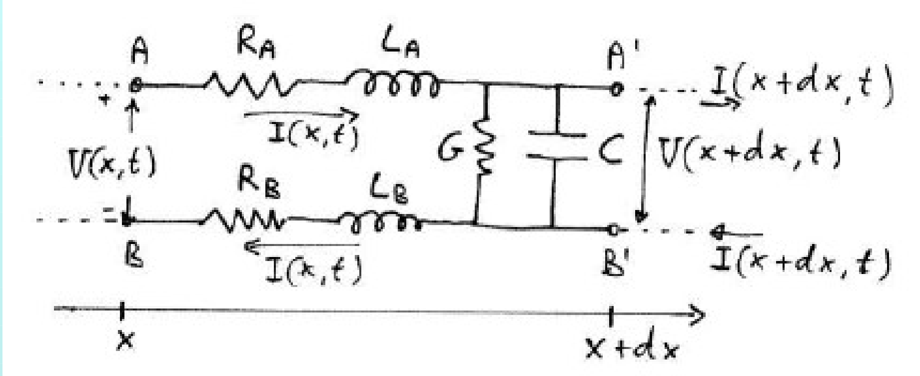
**Schematizziamo la linea di trasmissione come due conduttori che connettono un generatore e un carico.**





# Circuito equivalente

**Ogni linea di ritardo può essere considerata una serie di infiniti elementi infinitesimi di lunghezza dx, caratterizzati elettricamente da:**
**$R_A$ ($R_B$) resistenza del conduttore A (B) = $R_{au}$ dx**
**$L_A$ ($L_B$) induttanza del conduttore A (B) = $L_{au}$ dx**
**G conduttanza tra i due conduttori = $G_u$ dx**
**C capacità tra i due conduttori = $C_u$ dx**




## Cadute di tensione

$$\mathrm{d}V_A = V_{A'}(x+\mathrm{d}x,t) - V_A(x,t) = -R_A\, I(x,t) - L_A \frac{\partial}{\partial t} I(x,t) \qquad (1)$$

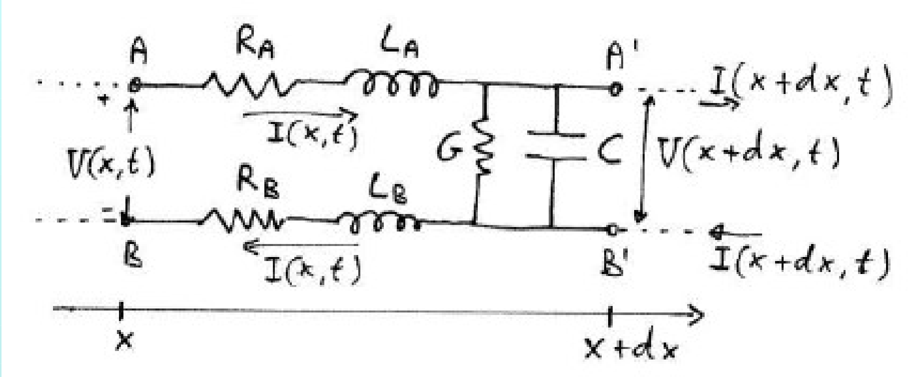
$$\mathrm{d}V_B = V_{B'}(x+\mathrm{d}x,t) - V_B(x,t) = +R_B\, I(x,t) + L_B \frac{\partial}{\partial t} I(x,t). \qquad (2)$$

$$\begin{aligned} V(x+\mathrm{d}x,t) - V(x,t) &= [V_{A'}(x+\mathrm{d}x,t) - V_{B'}(x+\mathrm{d}x,t)] - [V_A(x,t) - V_B(x,t)] \\ &= -(R_A+R_B)\, I(x,t) - (L_A+L_B)\frac{\partial}{\partial t} I(x,t) \\ &= -R\, I(x,t) - L\frac{\partial}{\partial t} I(x,t)\,, \\ &= -\left(R_u + L_u \frac{\partial}{\partial t}\right) I(x,t)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$V(x+\mathrm{d}x,t) - V(x,t) = \frac{\partial V(x,t)}{\partial x}\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = -\left(R_u + L_u \frac{\partial}{\partial t}\right) I(x,t) = -\{Z_u\}\, I(x,t)$$

# Circuito equivalente




## Perdite di corrente

$$\mathrm{d}I(x,t)^{(G)} = -G\,V(x,t)$$

$$\mathrm{d}I(x,t)^{(C)} = -\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} = -C\,\frac{\partial V(x,t)}{\partial t}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}I(x,t) &= I(x+\mathrm{d}x,t) - I(x,t) = -\left(G + C\,\frac{\partial}{\partial t}\right) V(x,t) \\ &= -\left(G_u + C_u\,\frac{\partial}{\partial t}\right) V(x,t)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$\frac{\partial I(x,t)}{\partial x} = -\left(G_u + C_u\,\frac{\partial}{\partial t}\right) V(x,t) = -\{Y_u\}\,V(x,t)$$

## Equazioni differenziali della linea di trasmissione

$$\begin{aligned}\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} &= -\left(R_u + L_u\,\frac{\partial}{\partial t}\right) I(x,t)\,, \\ \frac{\partial I(x,t)}{\partial x} &= -\left(G_u + C_u\,\frac{\partial}{\partial t}\right) V(x,t)\end{aligned}$$

# Regime sinusoidale

**Potremo riscrivere le cadute di tensione e le perdite di corrente usando il metodo simbolico. Dopo un certo tempo gli effetti dei transienti si saranno smorzati e tutte le tensioni e correnti oscilleranno alla stessa frequenza del generatore. Gli effetti di propagazione non istantanea perdureranno e produrranno differenze di fase e ampiezza nei vari tratti del circuito.**

Introducendo l'*impedenza* $\vec{Z}$ e *ammettenza* $\vec{Y}$ del tratto $\mathrm{d}x$

$$\vec{Z} = R + j\,\omega L \qquad \vec{Z}_u\,\mathrm{d}x = (R_u + j\,\omega L_u)\,\mathrm{d}x$$

$$\vec{Y} = G + j\,\omega C \qquad \vec{Y}_u\,\mathrm{d}x = (G_u + j\,\omega C_u)\,\mathrm{d}x$$

**avremo**

$$\mathrm{d}\vec{V} = \frac{\partial \vec{V}(x)}{\partial x}\,\mathrm{d}x = -\vec{Z}\,\vec{I}(x) = -\vec{Z}_u\,\vec{I}(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}\vec{I} = \frac{\partial \vec{I}(x,t)}{\partial x}\,\mathrm{d}x = -\vec{Y}\,\vec{V}(x) = -\vec{Y}_u\,\vec{V}(x)\,\mathrm{d}x$$

Derivando entrambe le equazioni rispetto a $x$ otteniamo

$$\frac{\partial^2 \vec{V}(x)}{\partial x^2} = -\vec{Z}_u\,\frac{\partial \vec{I}(x)}{\partial x} = [\vec{Z}_u\,\vec{Y}_u]\,\vec{V}(x)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{I}(x)}{\partial x^2} = -\vec{Y}_u\,\frac{\partial \vec{V}(x)}{\partial x} = [\vec{Z}_u\,\vec{Y}_u]\,\vec{I}(x)$$

*equazioni dei telegrafisti* (Lord Kelvin)

# Regime sinusoidale

**Ponendo** $$\vec{\gamma} = \sqrt{\vec{Z}_u \, \vec{Y}_u} = \sqrt{(R_u + j\omega L)(G_u + j\omega C)}$$

*parametro di propagazione*

**avremo**

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{V}(x)}{\partial x^2} - \vec{\gamma}^2 \, \vec{V}(x) &= 0 \\ \frac{\partial^2 \vec{I}(x)}{\partial x^2} - \vec{\gamma}^2 \, I(x) &= 0 \end{aligned}$$

**con soluzione**

$$\begin{aligned} \vec{V}(x) &= \vec{A}_1 e^{-\vec{\gamma} x} + \vec{A}_2 e^{\vec{\gamma} x} \\ &= \vec{A}_1 e^{-\alpha x} \, e^{-j\beta x} + \vec{A}_2 e^{\alpha x} \, e^{j\beta x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \mathrm{Re}\, \vec{\gamma} \\ \beta &= \mathrm{Im}\, \vec{\gamma} \end{aligned}$$

**dove α è detta *costante di attenuazione* e β *costante di fase***

**alla quale corrisponde la soluzione fisica**

$$\begin{aligned} V(x,t) &= \mathrm{Re}\left\{ \vec{V}(x) \, e^{j\omega t} \right\} \\ &= \mathrm{Re}\left\{ A_1 \, e^{j\phi_1} \, e^{(-\alpha - j\beta)\, x} \, e^{j\omega t} + A_2 \, e^{j\phi_2} \, e^{+(-\alpha - j\beta)\, x} \, e^{j\omega t} \right\} \\ &= A_1 \, e^{-\alpha\, x} \, \cos(\omega t - \beta x + \phi_1) + A_2 \, e^{+\alpha\, x} \, \cos(\omega t + \beta x + \phi_2) \end{aligned}$$

# Velocità di propagazione e lunghezza d'onda

$$V(x,t) = A_1\, e^{-\alpha\, x} \cos(\omega t - \beta x + \phi_1) + A_2\, e^{+\alpha\, x} \cos(\omega t + \beta x + \phi_2)$$

| | Onda progressiva | Onda regressiva |
|---|---|---|
| Velocità di fase | $\frac{\omega}{\beta}$ | $-\frac{\omega}{\beta}$ |

Lunghezza d'onda

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega} v = \frac{v}{\nu} = v\, T$$

e quindi

$$V(x,t) = A_1\, e^{-\alpha\, x} \cos\left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{2\pi}{\lambda} x + \phi_1\right) + A_2\, e^{+\alpha\, x} \cos\left(\frac{2\pi}{T} t + \frac{2\pi}{\lambda} x + \phi_2\right)$$

dove è messa in evidenza la periodicità nello spazio e nel tempo

# Linea non dissipativa

$R_u = 0 \text{ e } G_u = 0$

$\vec{\gamma} = j\omega\sqrt{L_u C_u}$

$\alpha = 0 \text{ e } \beta = \omega\sqrt{L_u C_u}$

**Velocità di fase**

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_u C_u}}$$

$$V(x,t) = A_1 \cos[\omega(t - \frac{x}{v}) + \phi_1] + A_2 \cos[\omega(t + \frac{x}{v}) + \phi_2]$$

**con onde progressiva e regressiva caratterizzate dalla grandezza** $\tau_0 = \sqrt{L_u C_u}$

**che indica il ritardo per unità di lunghezza**

# Linea non distorcente

**Nel caso generale possiamo scrivere**
$$\vec{\gamma} = \sqrt{L_u C_u}\sqrt{-\omega^2 + j\omega\left(\frac{R_u}{L_u} + \frac{G_u}{C_u} + \frac{R_u\,G_u}{L_u\,C_u}\right)}$$

se vale la relazione $R_u/L_u = G_u/C_u$

$$\vec{\gamma} = \sqrt{L_u C_u}\sqrt{\left(\frac{R_u}{L_u} + j\omega\right)^2} = \sqrt{L_u C_u}\left(\frac{R_u}{L_u} + j\omega\right)$$

$$\alpha = R_u\sqrt{\frac{C_u}{L_u}}$$
$$\beta = \omega\sqrt{L_u C_u}$$

**Costante di attenuazione indipendente dalla frequenza**

**Costante di fase proporzionale a ω e quindi v = ω / β non dipende dalla frequenza**

**ovvero un segnale di forma qualsiasi può essere attenuato ma non viene distorto**

**La condizione** $$\frac{R_u}{L_u} = \frac{G_u}{C_u}$$ **è detta di *non distorsione* (o di Heaviside) e la velocità di fase è la stessa del caso non dissipativo**

**Infine potremo scrivere** $\alpha = R_u/R_0$ ove $R_0 = \sqrt{L_u/C_u}$

# Impedenza caratteristica della linea

**Il rapporto tra tensione e corrente in ogni punto della linea è dato da**

$$\frac{V(x)}{I(x)} = \frac{V_1 e^{\gamma x} + V_2 e^{-\gamma x}}{I_1 e^{\gamma x} + I_2 e^{-\gamma x}}$$

**La corrente I(x) può essere ricavata dalla relazione**

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -IZ$$

**ottenendo**

$$I(x) = -\frac{1}{Z}\frac{\partial V(x)}{\partial x} = -\frac{\gamma}{Z} V_1 e^{+\gamma x} + \frac{\gamma}{Z} V_2 e^{-\gamma x}$$

**da cui**

$$I_1 = -\sqrt{\frac{Y}{Z}}\, V_1 \qquad I_2 = \sqrt{\frac{Y}{Z}}\, V_2$$

$$\longrightarrow \quad \frac{V(x)}{I(x)} = \sqrt{\frac{Z}{Y}} \cdot \frac{V_1 e^{\gamma x} + V_2 e^{-\gamma x}}{-V_1 e^{\gamma x} + V_2 e^{-\gamma x}}$$

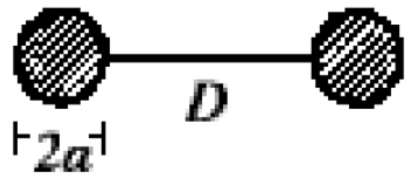
**Se fosse presente una sola onda, ad es. quella diretta, avremmo**

$$\frac{V_2(x)}{I_2(x)} = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = Z_0$$

**Tale rapporto è costante su tutta la linea, nel caso di Heaviside è reale, cioè una resistenza pura $R_0$ senza componente reattiva, non dipende dalla frequenza e prende il nome di impedenza caratteristica della linea**

# Caratteristiche delle linee

## Linea bifilare




**L'induttanza e la capacità per unità di lunghezza sono date da**

$$L = \frac{\mu_0 \mu_r}{\pi} \cosh^{-1}(D/2a) \quad Hm^{-1} \qquad C = \frac{\varepsilon_r}{36 \ \cosh^{-1}(D/2a)} \cdot 10^{-9} \quad Fm^{-1}$$

**Dalle quali si ricavano, nel caso in cui $\mu_r = 1$,**

$$v = (LC)^{-1/2} \ ms^{-1} \qquad Z_0 = \frac{120}{\varepsilon_r^{1/2}} \ \cosh^{-1}(D/2a) \quad \Omega$$

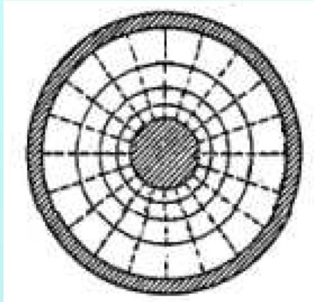
**Per un cavo bipolare con 2a = 2 mm, D = 3mm, $\varepsilon_r$ = 2.5 (PVC) si ottiene**

**$L = 4\ 10^{-7}$ H/m , $C = 7.2\ 10^{-11}$ F/m , $v = 1.8\ 10^{8}$ m/s , $Z_0 = 73\ \Omega$**

**ritardo di 5.6 ns /m**

# Caratteristiche delle linee

## Cavo coassiale



L'induttanza e la capacità per unità di lunghezza sono date da

$$L = (\mu_0 \mu_r / 2\pi) \ln (b/a) \;\; H m^{-1} \qquad C = (2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r) / \ln (b/a) \;\; F m^{-1}$$

dalle quali si ricavano, nel caso in cui $\mu_r = 1$,

$$v = (LC)^{-1/2} = (\mu_0 \varepsilon_0)^{-1/2} (\mu_r \varepsilon_r)^{-1/2} = c \; (\mu_r \varepsilon_r)^{-1/2}$$

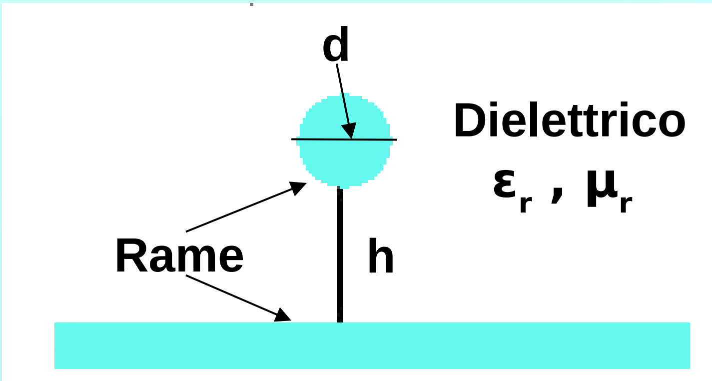
$$R_0 = (60 \varepsilon_r^{-1/2}) \ln (b/a) \;\; \Omega$$

Per un cavo coassiale RG58-C/U a = 0.39 mm, b = 1.475 mm, $\varepsilon_r$ = 2.3 (polietilene) si ottiene

L = 2.7 $10^{-7}$ H/m , C = 9.6 $10^{-11}$ F/m , v = 2.0 $10^{8}$ m/s , R0 = 53 $\Omega$

ritardo di 5 ns /m

# Caratteristiche delle linee
## Filo collegato ad un circuito e sopra un piano di massa




L'induttanza e la capacità per unità di lunghezza sono date da

$$L = (\mu_0 \mu_r / 2\pi) \ln(4h/d) \ \ Hm^{-1} \qquad C = (2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r)/\ln(4h/d) \ \ Fm^{-1}$$

dalle quali si ricavano, nel caso in cui $\mu_r = 1$,

$$v = (LC)^{-1/2} = (\mu_0\varepsilon_0)^{-1/2}(\mu_r\varepsilon_r)^{-1/2} = c\ (\mu_r\varepsilon_r)^{-1/2}$$

$$R_0 = (60\varepsilon_r^{-1/2}) \ln(4h/d)\ \ \Omega$$

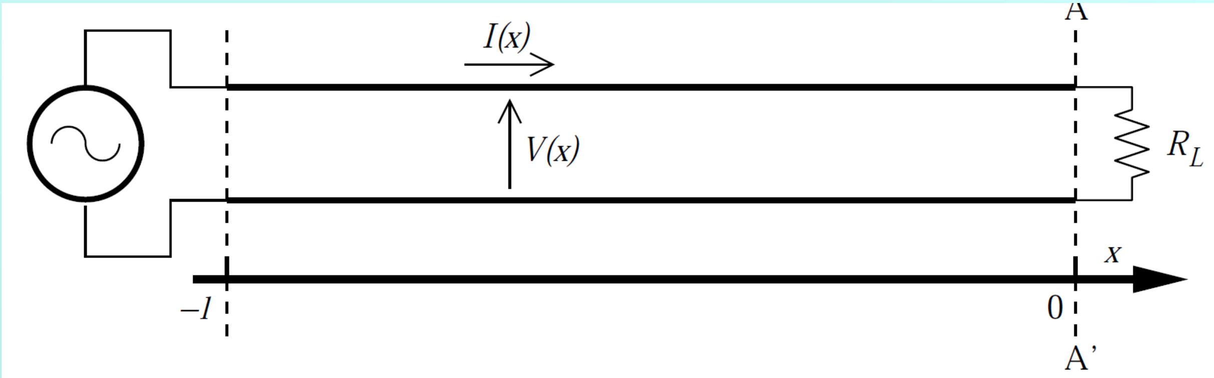
Per un filo di diametro 0.5 mm disposto con l'asse a 1 mm dal piano di massa con interposta la vetronite, $\varepsilon_r = 4$ $\mu_r = 1$, si ottiene

**L = 4.1 $10^{-7}$ H/m , C = 1 $10^{-10}$ F/m , v = 2.0 $10^{8}$ m/s , R0 = 64 Ω**

# Linea di trasmissione chiusa sulla sua resistenza caratteristica

**Durante la propagazione del segnale inviato dal generatore, considerando la sola onda diretta, si ha in ogni punto della linea**

$$V(x) / I(x) = R_0.$$



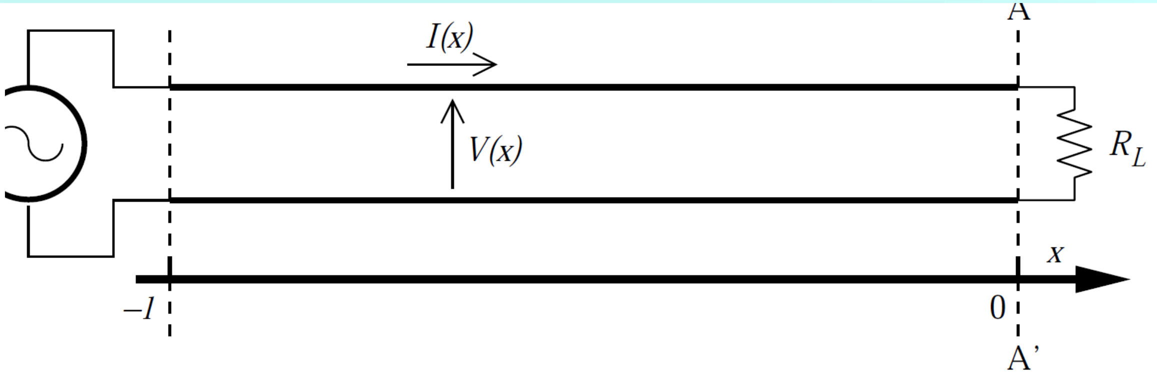

**Questo vale anche alla terminazione AA' dove però deve valere anche l'ulteriore condizione**

$$V / I = R_L.$$

**Se $R_L = R_0$ le condizioni al contorno imposte dalla resistenza di terminazione sono soddisfatte da una soluzione composta dalla sola onda diretta.**

# Linea di trasmissione chiusa su una resistenza diversa dalla caratteristica

**Se $R_L \neq R_0$ le condizioni al contorno imposte dalla resistenza di terminazione non sono soddisfatte dalla sola onda diretta. Il segnale che si propaga da sinistra verso destra non può essere interamente assorbito dalla resistenza $R_L$, ma viene in parte riflesso.**




**In presenza di entrambe le onde, diretta e riflessa, il rapporto V / I è dato da**

$$\frac{V(x)}{I(x)} = R_0 \frac{V_1 e^{j\beta x} + V_2 e^{-j\beta x}}{-V_1 e^{j\beta x} + V_2 e^{-j\beta x}}$$

**Ponendo l'origine di x in AA', ovvero il generatore a x=-l, in AA' avremo**

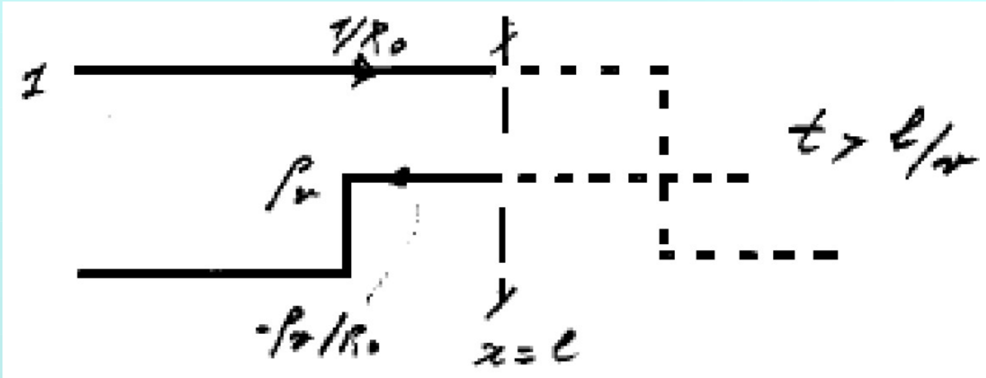
$$\frac{V(0)}{I(0)} = R_0 \frac{V_1 + V_2}{-V_1 + V_2} = R_L \longrightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{R_L - R_0}{R_L + R_0} = \rho_v$$

$\rho_v$ prende il nome di coefficiente di riflessione di tensione $\longrightarrow$ **complesso se carico = $Z_L$**

# Linea di trasmissione chiusa su una resistenza diversa dalla caratteristica

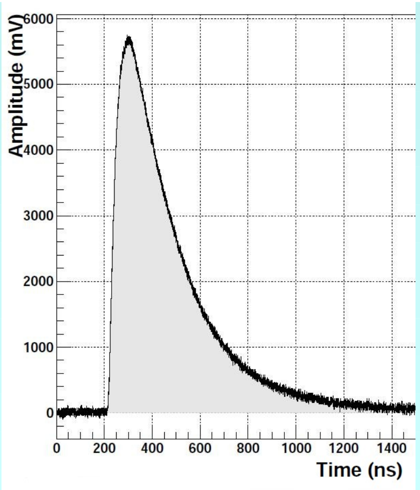
Supponiamo di eccitare la linea con un segnale di tensione a gradino e di ampiezza 1V.

Per $t < t_d = l / v$ si ha una sola onda che viaggia dal generatore al carico e produce una corrente $1V/R_0$.

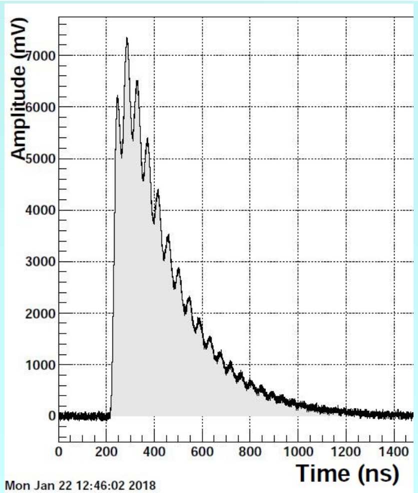



Per $t > t_d$ al carico deve valere $V / I = R_L$ e quindi ci deve essere un'onda riflessa di ampiezza $\rho_v$ che produce una corrente $-\rho_v/R_0$. Sul carico avremo quindi una tensione $1V + \rho_v$ e su di esso scorrerà una corrente $(1V/R_0) - (\rho_v /R_0)$

Cavo terminato su $R_0$




Cavo terminato su $R_L \neq R_0$



# Caratteristiche dei cavi disponibili

| Cavi con connettori BNC | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Sigla | Isolante | Diametro-mm | R caratt. Ω | vel prop | Max HV V | Capacità pF/m | Atten / m dB |
| RG-58/U | polyetilene | 5,0 | 53,5 | 0.659*c | 1900 | 93,5 | 0,174 |
| RG-62/U | sm-polyetilene | 6,1 | 93,0 | 0.840*c | 750 | 101,0 | 0,289 |

| Cavi con connettori LEMO | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| RG-174/U | polyetilene | 2,5 | 50 | 0.659*c | 1500 | 101,0 | 0,289 |

| Cavi con connettori SHV | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| RG-59/U | polyetilene | 6,1 | 73 | 0.659*c | 2300 | 68,9 | 0,112 |