

elementi diagonali coincidenti con gli autovalori di A . Nel caso esistano coppie di autovalori distinti, ma con uguale modulo, come avviene per gli autovalori complessi coniugati, la successione converge alla forma triangolare a blocchi (cfr. Teorema 5.3.4) con blocchi diagonali di ordine 1 o 2, questi ultimi associati agli autovalori complessi.

Infine, per accelerare la convergenza, si procede con la tecnica di shift di spettro, descritta già nel paragrafo 5.7, introducendo opportuni parametri p_k ad ogni passo, cosicché il generico passo del metodo assume la forma

$$\begin{cases} (A_k - p_k I) = Q_k R_k \\ A_{k+1} = R_k Q_k + p_k I. \end{cases}$$

Va sottolineato che, benché il principio su cui si basa questo metodo sia semplice, non altrettanto è la sua implementazione che, per essere realmente efficiente, richiede spesso una serie di accorgimenti che vanno dalla preliminare riduzione a forma di Hessenberg alla tecnica di shift, alla riduzione dell'ordine della matrice quando un autovalore è stato approssimato.

Capitolo 6

Approssimazione di dati e funzioni

6.1. Introduzione

Nelle applicazioni si incorre di frequente nel problema di dover *approssimare* una funzione f ; ciò avviene in varie situazioni delle quali sono tipiche le seguenti: di una funzione f , intesa come descrizione di un fenomeno fisico, si conoscono solo alcuni valori $\{f_i\}$, in corrispondenza a certi valori $\{x_i\}$, $i = 0, 1, \dots, n$ della variabile indipendente, e da questi si vuole risalire ad una rappresentazione analitica globale in un intervallo $[a, b]$, di solito contenente i nodi $\{x_i\}$, del fenomeno fisico che ha generato i dati. Oppure, si ha a che fare con una funzione f , di nota espressione analitica, che presenta, nell'esecuzione di determinate operazioni (quali l'integrazione, la derivazione, o anche la valutazione stessa di f per certi valori x), difficoltà tali da far preferire la sostituzione della f data con un'altra che la approssimi e sulla quale le operazioni richieste siano di più facile esecuzione.

In ogni caso, per approssimare una funzione si deve:

- stabilire la classe \mathbb{F} di funzioni nel cui ambito si vuole eseguire l'approssimazione;
- introdurre un criterio, in base al quale la funzione approssimante va scelta in \mathbb{F} .

Per ciò che riguarda le classi \mathbb{F} , le più usate sono le seguenti:

1) \mathbb{P}_n , insieme dei *polinomi algebrici* p_n di grado n a coefficienti reali:

$$\mathbb{P}_n = \{p_n | p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, a_k \in \mathbb{R}, \forall k\}.$$

\mathbb{P}_n è la classe adatta per rappresentare funzioni appartenenti a $C^n[a, b]$;

2) \mathbb{T}_n , insieme dei *polinomi trigonometrici* t_n di ordine n , a coefficienti reali:

$$\mathbb{T}_n = \left\{ t_n \mid t_n(x) = \sum_{k=0}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx), a_k, b_k \in \mathbb{R}, \forall k \right\}$$

adatta per rappresentare funzioni periodiche.

3) $\mathbb{R}_{n,m}$, insieme delle *funzioni razionali*

$$\mathbb{R}_{n,m} = \left\{ r_{n,m} \mid r_{n,m}(x) = \frac{p_n(x)}{p_m(x)}, p_n \in \mathbb{P}_n, p_m \in \mathbb{P}_m \right\}$$

adatta per rappresentare funzioni con singolarità.

$$4) \mathbb{E}_n = \left\{ g_n \mid g_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k \exp(b_k x), a_k, b_k \in \mathbb{R}, \forall k \right\}$$

adatta per rappresentare fenomeni fisici ad andamento esponenziale.

5) $S_n([a, b], \Delta)$, insieme delle *splines* di grado n , ovvero insieme di funzioni $f \in C^{n-1}[a, b]$, che si riducono a polinomi di grado n , in ogni sottointervallo di una data partizione Δ di $[a, b]$.

I criteri, in base ai quali si seleziona, nella classe prescelta, la funzione approssimante $f_n \in \mathbb{F}$, danno luogo a vari metodi di approssimazione, tra i quali verranno presi in considerazione i seguenti:

a) *interpolazione*: la funzione approssimante f_n è tale che

$$f_n(x_i) = f_i \quad , \quad i = 0, 1, \dots, n$$

dove f_i sono valori disponibili (in generale a seguito di misurazioni sperimentali) ed assunti da una funzione f nei nodi x_i . Si utilizza preferibilmente se i dati f_i sono accurati.

b) *approssimazione ai minimi quadrati discreti*: la funzione approssimante f_m è quell'elemento di \mathbb{F} che rende minima la quantità

$$\sum_{i=0}^n [f_m(x_i) - f_i]^2$$

ovvero minimizza la norma euclidea dal vettore

$$V_n = [f_m(x_0) - f_0, f_m(x_1) - f_1, \dots, f_m(x_n) - f_n].$$

2) \mathbb{T}_n , insieme dei *polinomi trigonometrici* t_n di ordine n , a coefficienti reali:

$$\mathbb{T}_n = \left\{ t_n \mid t_n(x) = \sum_{k=0}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx), a_k, b_k \in \mathbb{R}, \forall k \right\}$$

adatta per rappresentare funzioni periodiche.

3) $\mathbb{R}_{n,m}$, insieme delle *funzioni razionali*

$$\mathbb{R}_{n,m} = \left\{ r_{n,m} \mid r_{n,m}(x) = \frac{p_n(x)}{p_m(x)}, p_n \in \mathbb{P}_n, p_m \in \mathbb{P}_m \right\}$$

adatta per rappresentare funzioni con singolarità.

$$4) \mathbb{E}_n = \left\{ g_n \mid g_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k \exp(b_k x), a_k, b_k \in \mathbb{R}, \forall k \right\}$$

adatta per rappresentare fenomeni fisici ad andamento esponenziale.

5) $S_n([a, b], \Delta)$, insieme delle *splines* di grado n , ovvero insieme di funzioni $f \in C^{n-1}[a, b]$, che si riducono a polinomi di grado n , in ogni sottointervallo di una data partizione Δ di $[a, b]$.

I criteri, in base ai quali si seleziona, nella classe prescelta, la funzione approssimante $f_n \in \mathbb{F}$, danno luogo a vari metodi di approssimazione, tra i quali verranno presi in considerazione i seguenti:

a) *interpolazione*: la funzione approssimante f_n è tale che

$$f_n(x_i) = f_i, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

dove f_i sono valori disponibili (in generale a seguito di misurazioni sperimentali) ed assunti da una funzione f nei nodi x_i . Si utilizza preferibilmente se i dati f_i sono accurati.

b) *approssimazione ai minimi quadrati discreti*: la funzione approssimante f_m è quell'elemento di \mathbb{F} che rende minima la quantità

$$\sum_{i=0}^n [f_m(x_i) - f_i]^2$$

ovvero minimizza la norma euclidea dal vettore

$$V_n = [f_m(x_0) - f_0, f_m(x_1) - f_1, \dots, f_m(x_n) - f_n].$$

Si utilizza quando i dati sono presumibilmente poco accurati ed in numero elevato.

Nel caso in cui alcuni dati si possano ritenere più accurati ed altri meno accurati, si possono introdurre dei "pesi" w_i , cioè attribuire, agli addendi della somma, dei coefficienti reali positivi, che diano maggiore o minore peso rispettivamente agli uni o agli altri; si minimizza allora la quantità

$$\sum_{i=0}^n w_i [f_n(x_i) - f_i]^2.$$

6.2. Interpolazione polinomiale - Formula di Lagrange

Siano assegnati i valori $\{f_i\}$ che una funzione f , di una variabile reale x , assume in $n+1$ nodi distinti $\{x_i\}$, $i = 0, 1, \dots, n$; il problema dell'*interpolazione polinomiale* consiste nella determinazione di un polinomio di grado minimo che passi per i punti $P_i(x_i, f_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$; poiché il numero dei punti è $n+1$, è sufficiente considerare un polinomio $p_n \in \mathbb{P}_n$, tale che risulti

$$(6.2.1) \quad p_n(x_i) = f_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

La soluzione di questo problema è abbastanza semplice; si scriva infatti il polinomio p_n facendo uso della base dei monomi, nella forma

$$(6.2.2) \quad p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n.$$

con coefficienti da determinare in base alla (6.2.1); ciò conduce allora al sistema lineare

$$(6.2.3) \quad \begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n = f_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_n x_1^n = f_1 \\ \dots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_n x_n^n = f_n \end{cases}$$

la cui matrice dei coefficienti

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix}$$

che la loro forma è (abbastanza ovviamente!) indipendente dalla funzione da interpolare, essa dipende solo dai nodi $\{x_i\}$, come segue facilmente dalla (6.2.6); pertanto, una volta fissata una certa distribuzione di nodi, i polinomi di base possono essere valutati una volta per tutte. La seconda osservazione riguarda l'espressione (6.2.7) del polinomio interpolatore; in essa, a differenza di quanto avviene per la (6.2.2), compaiono esplicitamente i valori di f_i con i quali si esegue l'interpolazione. Inoltre la (6.2.7) può essere scritta per qualsiasi distribuzione di nodi, equispaziati o meno che essi siano, e, come si vedrà in seguito, si presta ad una analisi dell'errore generato nel procedimento di interpolazione.

6.3. L'errore nell'interpolazione polinomiale

Per giungere a dare una stima dell'errore connesso al procedimento di interpolazione, è opportuno tenere presente che oltre l'errore di troncamento, derivante dalla sostituzione del polinomio interpolatore alla funzione, un'altra fonte d'errore deriva dal fatto che i dati f_i possono non rappresentare gli esatti valori assunti nei nodi dalla funzione f da ricostruire, ma solo dalle più o meno accurate approssimazioni di essi. Ciò, per esempio, avviene a causa del fatto che i valori f_i possono provenire da misurazioni e, quindi, essere affetti da errori inerenti, oppure possono essere ottenuti da tavole numeriche con arrotondamenti ad una certa cifra decimale. Questa mancanza di precisione nei dati si propaga durante i calcoli e produce in conclusione un errore, che diremo di propagazione, e che va a sommarsi a quello di troncamento.

Tutto ciò si può esprimere mediante la seguente relazione

$$(6.3.1) \quad E_t(x) = f(x) - p_n(x) = f(x) - p_n^*(x) + p_n^*(x) - p_n(x) = E_n(x) + E_n^*(x)$$

dove $p_n^*(x)$ rappresenta il polinomio interpolatore "ideale" calcolato in corrispondenza ai valori esenti da errori, assunti dalla funzione f in corrispondenza ai nodi, e che saranno indicati con $\{f(x_i)\}$, per distinguerli dai valori $\{f_i\}$, dei quali realmente si dispone. In generale sarà $f_i \simeq f(x_i)$ per alcuni o per tutti i valori di i , e gli errori sui dati saranno indicati con

$$(6.3.2) \quad \varepsilon_i = f(x_i) - f_i.$$

Nella (6.3.1), l'errore di troncamento, o teorico, è rappresentato da

$$(6.3.3) \quad E_n(x) = f(x) - p_n^*(x).$$

che la loro forma è (abbastanza ovviamente!) indipendente dalla funzione da interpolare, essa dipende solo dai nodi $\{x_i\}$, come segue facilmente dalla (6.2.6); pertanto, una volta fissata una certa distribuzione di nodi, i polinomi di base possono essere valutati una volta per tutte. La seconda osservazione riguarda l'espressione (6.2.7) del polinomio interpolatore; in essa, a differenza di quanto avviene per la (6.2.2), compaiono esplicitamente i valori di f_i con i quali si esegue l'interpolazione. Inoltre la (6.2.7) può essere scritta per qualsiasi distribuzione di nodi, equispaziati o meno che essi siano, e, come si vedrà in seguito, si presta ad una analisi dell'errore generato nel procedimento di interpolazione.

6.3. L'errore nell'interpolazione polinomiale

Per giungere a dare una stima dell'errore connesso al procedimento di interpolazione, è opportuno tenere presente che oltre l'errore di troncamento, derivante dalla sostituzione del polinomio interpolatore alla funzione, un'altra fonte d'errore deriva dal fatto che i dati f_i possono non rappresentare gli esatti valori assunti nei nodi dalla funzione f da ricostruire, ma solo dalle più o meno accurate approssimazioni di essi. Ciò, per esempio, avviene a causa del fatto che i valori f_i possono provenire da misurazioni e, quindi, essere affetti da errori inerenti, oppure possono essere ottenuti da tavole numeriche con arrotondamenti ad una certa cifra decimale. Questa mancanza di precisione nei dati si propaga durante i calcoli e produce in conclusione un errore, che diremo di propagazione, e che va a sommarsi a quello di troncamento.

Tutto ciò si può esprimere mediante la seguente relazione

$$(6.3.1) \quad E_t(x) = f(x) - p_n(x) = f(x) - p_n^*(x) + p_n^*(x) - p_n(x) = E_n(x) + E_n^*(x)$$

dove $p_n^*(x)$ rappresenta il polinomio interpolatore "ideale" calcolato in corrispondenza ai valori esenti da errori, assunti dalla funzione f in corrispondenza ai nodi, e che saranno indicati con $\{f(x_i)\}$, per distinguerli dai valori $\{f_i\}$, dei quali realmente si dispone. In generale sarà $f_i \simeq f(x_i)$ per alcuni o per tutti i valori di i , e gli errori sui dati saranno indicati con

$$(6.3.2) \quad \varepsilon_i = f(x_i) - f_i.$$

Nella (6.3.1), l'errore di troncamento, o teorico, è rappresentato da

$$(6.3.3) \quad E_n(x) = f(x) - p_n^*(x).$$

Esso dipende solo dalla sostituzione di f con un polinomio e l'errore di propagazione, o aritmetico, è rappresentato da

$$(6.3.4) \quad E_n^*(x) = p_n^*(x) - p_n(x)$$

e dipende dai dati.

La valutazione di $E_n(x)$ è legata alle informazioni che si hanno su f , e non dipende dall'espressione usata per il polinomio interpolatore.

Una espressione di $E_n(x)$, che ha un interesse più teorico che pratico (viste le difficoltà che si possono talora presentare nella valutazione della derivata richiesta), ma non per questo è poco significativa, è individuabile nell'ipotesi che f ammetta derivate fino alla $(n+1)$ -esima nel minimo intervallo chiuso $[a, b]$, contenente sia i nodi che il punto x di interpolazione.

Tale espressione può essere trovata come segue; dalla (6.3.3) riferita ai valori "esatti" $f(x_i)$, segue

$$(6.3.5) \quad E_n(x_i) = f(x_i) - p_n^*(x_i) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

quindi E_n , ammettendo gli $n+1$ zeri $\{x_i\}$ si può porre nella forma

$$(6.3.6) \quad E_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) R_n(x) = \pi_n(x) R_n(x)$$

in cui si è usata la (6.2.5) e si è indicata con $R_n(x)$ una funzione da individuare; per ottenere ciò, pensando di aver fissato il punto x , in cui si vuole valutare l'errore, introduciamo una funzione ausiliaria, nella variabile $t \in [a, b]$:

$$(6.3.7) \quad G(t) = f(t) - p_n^*(t) - \pi_n(t) \cdot R_n(x).$$

La (6.3.5) implica

$$G(x_i) = f(x_i) - p_n^*(x_i) - \pi_n(x_i) \cdot R_n(x) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

le (6.3.3) e (6.3.6) implicano

$$G(x) = f(x) - p_n^*(x) - \pi_n(x) \cdot R_n(x) = E_n(x) - E_n(x) = 0,$$

dunque $G(t)$ presenta (almeno) $n+2$ zeri in $[a, b]$; il teorema di Rolle assicura che $G^{(k)}(t)$ presenta (almeno) $n+2-k$ zeri in (a, b) , $k = 0, 1, \dots, n+1$;

dunque $G^{(n+1)}$ presenta almeno uno zero $\xi \in (a, b)$; dalla (6.3.7) si deduce allora, ricordando che p_n^* e π_n hanno gradi n e $n+1$, rispettivamente

$$G^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - (n+1)! \cdot R_n(x) = 0$$

e pertanto risulta

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!};$$

ovviamente ξ dipende da x , lo indicheremo perciò con $\xi = \xi(x)$, può non essere unico, e non è noto.

L'espressione dell'errore di troncamento, cui si è pervenuti, è infine la seguente

$$(6.3.8) \quad E_n(x) = \pi_n(x) \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}.$$

Va osservato che, in molti casi, della f sono noti solo i valori dei nodi, quindi l'esistenza di $f^{(n+1)}$ può, tutt'alpiù, essere prevista (tenendo conto del significato di esistenza e continuità delle derivate successive) in base all'ulteriore eventuale informazione, che il fenomeno fisico cui i dati si riferiscono sia "regolare".

Ci sono però casi, come avviene nella situazione della quadratura numerica, in cui si dispone dell'espressione di f e, almeno teoricamente, si può riscontrare la validità dell'ipotesi fatta; dal punto di vista computazionale, rimane comunque il limite applicativo della (6.3.8) dovuto alla mancanza di conoscenza del punto ξ . Questa difficoltà può essere superata nell'ipotesi che di $f^{(n+1)}$ siano noti i valori:

$$\inf_{x \in (a,b)} f^{(n+1)}(x) = \lambda \quad , \quad \sup_{x \in (a,b)} f^{(n+1)}(x) = \Lambda ;$$

in tal caso, infatti, dalla (6.3.8) si traggono le limitazioni di notevole interesse, che forniscono stime per *eccesso* e per *difetto* dell'errore

$$(6.3.9) \quad \frac{\lambda \pi_n(x)}{(n+1)!} \leq E_n(x) \leq \frac{\Lambda \pi_n(x)}{(n+1)!} \quad , \quad \text{se } \pi_n(x) > 0$$

$$(6.3.10) \quad \frac{\lambda \pi_n(x)}{(n+1)!} \geq E_n(x) \geq \frac{\Lambda \pi_n(x)}{(n+1)!} \quad , \quad \text{se } \pi_n(x) < 0.$$

dunque $G^{(n+1)}$ presenta almeno uno zero $\xi \in (a, b)$; dalla (6.3.7) si deduce allora, ricordando che p_n^* e π_n hanno gradi n e $n+1$, rispettivamente

$$G^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - (n+1)! \cdot R_n(x) = 0$$

e pertanto risulta

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!};$$

ovviamente ξ dipende da x , lo indicheremo perciò con $\xi = \xi(x)$, può non essere unico, e non è noto.

L'espressione dell'errore di troncamento, cui si è pervenuti, è infine la seguente

$$(6.3.8) \quad E_n(x) = \pi_n(x) \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}.$$

Va osservato che, in molti casi, della f sono noti solo i valori dei nodi, quindi l'esistenza di $f^{(n+1)}$ può, tutt'alpiù, essere prevista (tenendo conto del significato di esistenza e continuità delle derivate successive) in base all'ulteriore eventuale informazione, che il fenomeno fisico cui i dati si riferiscono sia "regolare".

Ci sono però casi, come avviene nella situazione della quadratura numerica, in cui si dispone dell'espressione di f e, almeno teoricamente, si può riscontrare la validità dell'ipotesi fatta; dal punto di vista computazionale, rimane comunque il limite applicativo della (6.3.8) dovuto alla mancanza di conoscenza del punto ξ . Questa difficoltà può essere superata nell'ipotesi che di $f^{(n+1)}$ siano noti i valori:

$$\inf_{x \in (a,b)} f^{(n+1)}(x) = \lambda, \quad \sup_{x \in (a,b)} f^{(n+1)}(x) = \Lambda;$$

in tal caso, infatti, dalla (6.3.8) si traggono le limitazioni di notevole interesse, che forniscono stime per *eccesso* e per *difetto* dell'errore

$$(6.3.9) \quad \frac{\lambda \pi_n(x)}{(n+1)!} \leq E_n(x) \leq \frac{\Lambda \pi_n(x)}{(n+1)!}, \quad \text{se } \pi_n(x) > 0$$

$$(6.3.10) \quad \frac{\lambda \pi_n(x)}{(n+1)!} \geq E_n(x) \geq \frac{\Lambda \pi_n(x)}{(n+1)!}, \quad \text{se } \pi_n(x) < 0.$$

Analogamente la relazione $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$, $x \in [a, b]$ conduce alla stima

$$(6.3.11) \quad |E_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |\pi_n(x)|.$$

rispetto alla quale, le (6.3.9), (6.3.10) hanno il vantaggio di fornire, spesso, anche un'indicazione sul *segno* di $E_n(x)$; ad esempio, se $\lambda > 0$ la (6.3.9) assicura che l'approssimazione ottenuta dal polinomio $p_n^*(x)$ è per difetto ($E_n(x) > 0$!); rimane però da vedere, nella stima dell'errore complessivo (6.3.1) quale è il contributo dovuto agli errori sui dati.

Alla fine di esaminare come varia $E_n(x)$ al variare di x , è significativa un'analisi del comportamento del polinomio nodale $\pi_n(x)$, che nel *caso di nodi equispaziati* può essere condotta come segue.

Ponendo $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, \dots, n$, $x = x_0 + sh$, si ha

$$\pi_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) = s(s-1) \dots (s-n) h^{n+1};$$

posto allora

$$P_7(s) = s(s-1) \dots (s-n)$$

è facile rendersi conto che questo polinomio è simmetrico rispetto al punto $\frac{n}{2}$, e che i massimi valori assoluti, assunti tra uno zero e l'altro sono crescenti, all'allontanarsi dal centro dell'intervallo. A titolo di esempio, si osservi il grafico del polinomio $P_7(x)$ in figura 1.

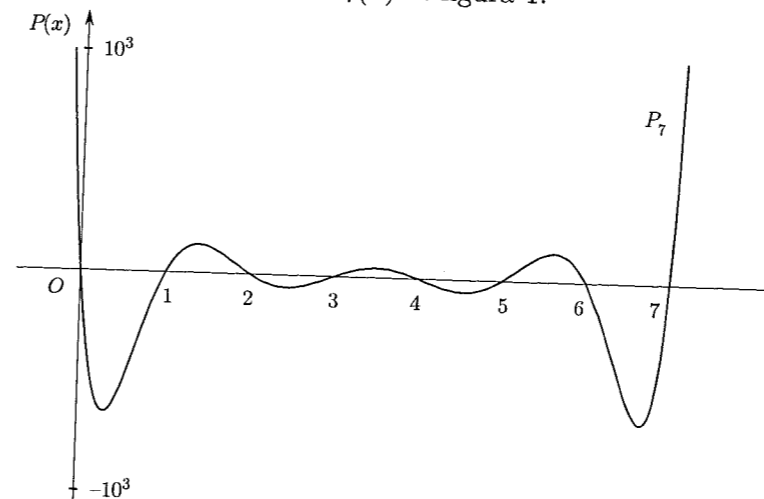


Fig. 1. Grafico del polinomio $P_7(x)$.

Da quanto precede segue che, se $f^{(n+1)}$ varia poco nell'intervallo di interpolazione, l'ordine di grandezza di $E_n(x)$, espresso da (6.3.8) con il cambio di coordinate:

$$E_n(x_0 + hs) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} P_n(s) f^{(n+1)}(x_0 + h\sigma)$$

dipenderà essenzialmente dalle posizioni del punto di interpolazione e risulterà più piccolo se tale punto si troverà nella parte centrale dell'intervallo dei nodi.

L'espressione di Lagrange del polinomio interpolatore è utile per determinare una stima dell'errore di propagazione $E_n^*(x)$; dalle (6.2.7) e (6.3.4) si ottiene infatti

$$E_n^*(x) = p_n^*(x) - p_n(x) = \sum_{i=0}^n l_i(x) f(x_i) - \sum_{i=0}^n l_i(x) f_i$$

e quindi, ammesso che per gli errori sui dati (6.3.2) si possa assumere $|\varepsilon_i| \leq \varepsilon$, $\forall i$, risulta

$$|E_n^*(x)| \leq \varepsilon \sum_{i=0}^n |l_i(x)| = \varepsilon \Lambda(x)$$

con

$$\Lambda(x) = \sum_{i=0}^n |l_i(x)|.$$

Per ogni x , $\Lambda(x)$ rappresenta il coefficiente di amplificazione degli errori, o delle perturbazioni, sui dati; si noti che, in base alla (6.2.9), risulta

$$\Lambda(x) \geq 1.$$

$$\sum l_i(x) = 1$$

Si introduce poi la costante Λ_n

$$\Lambda_n = \max_{a \leq x \leq b} \Lambda(x)$$

detta *costante di Lebesgue* associata ai nodi e all'intervallo $[a, b]$, che rappresenta una maggiorazione dell'amplificazione degli errori sui dati. Il valore di Λ_n dipendendo dai polinomi fondamentali di Lagrange, dipende dalla

Da quanto precede segue che, se $f^{(n+1)}$ varia poco nell'intervallo di interpolazione, l'ordine di grandezza di $E_n(x)$, espresso da (6.3.8) con il cambio di coordinate:

$$E_n(x_0 + hs) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} P_n(s) f^{(n+1)}(x_0 + h\sigma)$$

dipenderà essenzialmente dalle posizioni del punto di interpolazione e risulterà più piccolo se tale punto si troverà nella parte centrale dell'intervallo dei nodi.

L'espressione di Lagrange del polinomio interpolatore è utile per determinare una stima dell'errore di propagazione $E_n^*(x)$; dalle (6.2.7) e (6.3.4) si ottiene infatti

$$E_n^*(x) = p_n^*(x) - p_n(x) = \sum_{i=0}^n l_i(x) f(x_i) - \sum_{i=0}^n l_i(x) f_i$$

e quindi, ammesso che per gli errori sui dati (6.3.2) si possa assumere $|\varepsilon_i| \leq \varepsilon$, $\forall i$, risulta

$$|E_n^*(x)| \leq \varepsilon \sum_{i=0}^n |l_i(x)| = \varepsilon \Lambda(x)$$

con

$$\Lambda(x) = \sum_{i=0}^n |l_i(x)|.$$

Per ogni x , $\Lambda(x)$ rappresenta il coefficiente di amplificazione degli errori, o delle perturbazioni, sui dati; si noti che, in base alla (6.2.9), risulta

$$\Lambda(x) \geq 1.$$

Si introduce poi la costante Λ_n

$$\Lambda_n = \max_{a \leq x \leq b} \Lambda(x)$$

detta costante di Lebesgue associata ai nodi e all'intervallo $[a, b]$, che rappresenta una maggiorazione dell'amplificazione degli errori sui dati. Il valore di Λ_n dipendendo dai polinomi fondamentali di Lagrange, dipende dalla

distribuzione, oltreché dal numero dei nodi; è possibile dimostrare che sussistono i seguenti risultati:

- se gli $n+1$ nodi $\{x_i\}$ sono equispaziati, risulta

$$\Lambda_n \sim \frac{2^{n+1}}{en \log n}, \quad n \rightarrow \infty$$

- se i nodi sono scelti come segue:

$$(6.3.12) \quad x_i = \frac{(b-a)}{2} \cos \frac{2i+1}{n+1} \frac{\pi}{2} + \frac{b+a}{2}, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

risulta

$$\Lambda_n \sim \frac{2}{\pi} \log n, \quad n \rightarrow \infty.$$

I nodi (6.3.12) sono denominati: *nodì di Chebyshev*, e saranno trattati con maggiori dettagli nel paragrafo 6.10.

Queste ultime valutazioni mostrano come l'aumento del numero dei nodi, benché comporti un aumento dei punti di coincidenza tra funzione e polinomio, produce al contempo un aumento consistente dell'amplificazione degli errori sui dati.

Esmpio 6.3.1

Data la seguente tavola di valori della funzione $f(x) = 1/x$

x	2.70	2.72	2.74
y	0.3704	0.3676	0.3650

dare un valore approssimato di $\frac{1}{2.718}$ mediante il polinomio interpolatore di secondo grado, dare una stima dell'errore, e dopo aver valutato quali cifre si possono considerare esatte, calcolare il logaritmo naturale del numero così ottenuto, confrontandolo con $\log(1/e)$. Si eseguano i calcoli arrotondando sulla sesta cifra decimale.

Usando la formula di interpolazione di Lagrange si ha

$$l_0(2.718) = 0.055, \quad l_1(2.718) = 0.99, \quad l_2(2.718) = -0.045$$

oppure

$$E_n(x) \simeq T_{n2},$$

a seconda del tipo di percorso seguito nella costruzione della formula.

6.10. Convergenza dei polinomi interpolatori

Si è già visto che un aumento del numero dei nodi nelle formule di interpolazione, influisce negativamente sull'errore di propagazione (cfr. paragrafo 6.3); di più, può addirittura avvenire che, per $n \rightarrow \infty$, i polinomi interpolatori *non* convergano alla funzione f da interpolare.

Esempio 6.10.1

Si può dimostrare che, se si considera la funzione

$$(6.10.1) \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in [a, b] = [-5, 5]$$

e si costruisce la successione dei polinomi interpolatori $\{p_n(x)\}$, sui nodi

$$x_i = a + i(b-a)/n,$$

non sussiste la convergenza, ovvero *non* sussiste la relazione: $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) = f(x)$. Senza addentrarci nella dimostrazione, riportiamo i grafici dei polinomi interpolatori di grado 9 e 15, rispettivamente, a confronto con il grafico di f .

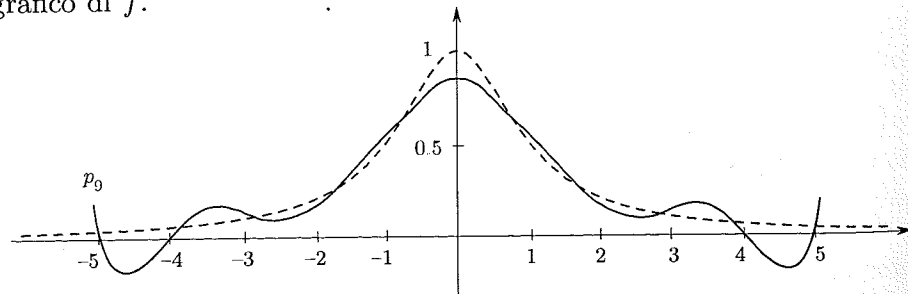


Fig. 3. Fenomeno di Runge. Grafici della funzione $f(x) = 1/(1+x^2)$ (linea tratteggiata) e del polinomio interpolatore di grado 9 (linea continua).

oppure

$$E_n(x) \simeq T_{n2},$$

a seconda del tipo di percorso seguito nella costruzione della formula.

6.10. Convergenza dei polinomi interpolatori

Si è già visto che un aumento del numero dei nodi nelle formule di interpolazione, influisce negativamente sull'errore di propagazione (cfr. paragrafo 6.3); di più, può addirittura avvenire che, per $n \rightarrow \infty$, i polinomi interpolatori *non* convergano alla funzione f da interpolare.

Esempio 6.10.1

Si può dimostrare che, se si considera la funzione

$$(6.10.1) \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in [a, b] = [-5, 5]$$

e si costruisce la successione dei polinomi interpolatori $\{p_n(x)\}$, sui nodi

$$x_i = a + i(b-a)/n,$$

non sussiste la convergenza, ovvero *non* sussiste la relazione: $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) = f(x)$. Senza addentrarci nella dimostrazione, riportiamo i grafici dei polinomi interpolatori di grado 9 e 15, rispettivamente, a confronto con il grafico di f .

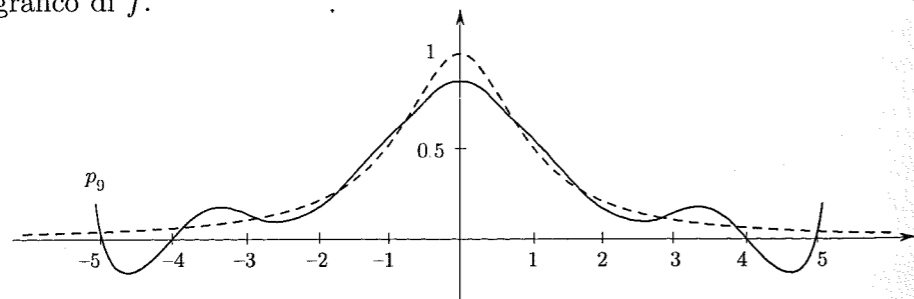


Fig. 3. Fenomeno di Runge. Grafici della funzione $f(x) = 1/(1+x^2)$ (linea tratteggiata) e del polinomio interpolatore di grado 9 (linea continua).

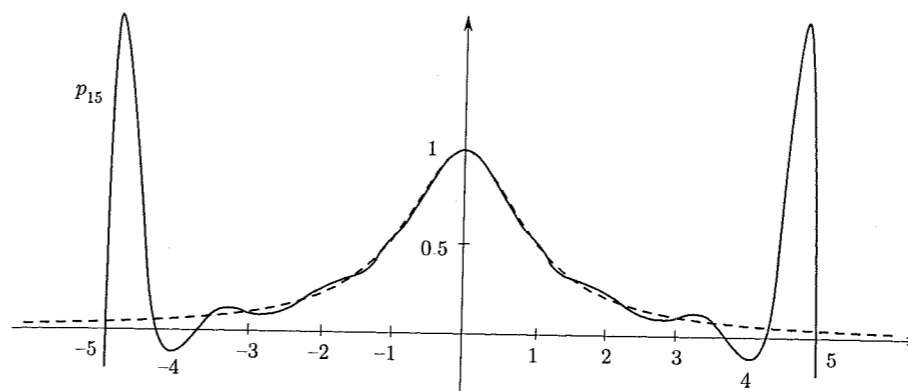


Fig. 4. Fenomeno di Runge. Grafici della funzione $f(x) = 1/(1+x^2)$ (linea tratteggiata) e del polinomio interpolatore di grado 15 (linea continua).

Una parziale spiegazione di questi andamenti può essere individuata attraverso l'analisi dei seguenti teoremi che danno delle condizioni *sufficienti* di convergenza dei polinomi interpolatori a f .

TEOREMA 6.10.1. Se $f \in C^\infty[a, b]$, e, posto $|f^{(k)}(x)| \leq M_k, k = 0, 1, \dots; x \in [a, b]$, risulta

$$(6.10.2) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(b-a)^k}{k!} M_k = 0$$

allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) = f(x) \quad \text{uniformemente in } [a, b].$$

Dimostrazione - Risulta, ammesso di operare con dati esenti da errori, ricordando la (6.3.8) e tenendo conto che $|x - x_i| \leq b - a, \forall i$,

$$0 \leq |f(x) - p_n(x)| = |E_n(x)| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}$$

e quindi la tesi. ■

È da tenere presente che nessuna condizione viene posta sulla distribuzione dei nodi, che possono pertanto essere scelti con un qualsiasi criterio.

La condizione (6.10.2), in particolare, è soddisfatta da funzioni che abbiano derivate equilimitate in $[a, b]$; per tali funzioni si ha quindi non solo la sviluppabilità in serie di Taylor, ma anche la convergenza uniforme delle successioni dei polinomi interpolatori. Esempi di queste funzioni sono

ben noti; $\sin x$, $\cos x$, e^x , e varie altre, se $[a, b]$ è limitato, sono del tipo detto.

Si consideri ora la variabile complessa z , e la funzione $F(z)$ tale che

$$F(z) = f(x) \quad \text{per } z \in [a, b]$$

TEOREMA 6.10.2. *Se $F(z)$ è olomorfa in un campo $A \supset [a, b]$, e detta d la distanza di ∂A da $[a, b]$ risulta*

$$d > b - a$$

allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) = f(x) \quad \text{uniformemente in } [a, b].$$

Non diamo la dimostrazione di questo teorema, il cui significato può essere molto grossolanamente così espresso: la convergenza dei polinomi interpolatori è assicurata, purché i punti di singolarità di $F(z)$ siano “abbastanza” lontani dall’intervallo di interpolazione.

III Esempio 6.10.2

Si giustifichi il risultato dell’esempio 6.10.1 e si dimostri che assumendo, per la stessa funzione (6.10.1), $[a, b] = [2, 3]$, la successione dei polinomi interpolatori su nodi equidistanti, *converge* uniformemente a f .

A tale scopo basta osservare che si ha

$$F(z) = \frac{1}{1+z^2}, \quad A = \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}, \quad \partial A = \pm i,$$

pertanto se $[a, b] = [-5, 5]$, risulta

$$d_1 = 1 < b - a = 10;$$

non essendo verificata la condizione di Teorema 6.10.2 non è detto che si verifichi convergenza uniforme dei polinomi interpolatori a f , e infatti non si verifica.

Se invece $[a, b] = [2, 3]$, risulta

$$d_2 = \sqrt{5} > b - a = 1$$

ben noti; $\sin x$, $\cos x$, e^x , e varie altre, se $[a, b]$ è limitato, sono del tipo detto.

Si consideri ora la variabile complessa z , e la funzione $F(z)$ tale che

$$F(z) = f(x) \quad \text{per } z \in [a, b]$$

TEOREMA 6.10.2. *Se $F(z)$ è olomorfa in un campo $A \supset [a, b]$, e detta d la distanza di ∂A da $[a, b]$ risulta*

$$d > b - a$$

allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) = f(x) \quad \text{uniformemente in } [a, b].$$

Non diamo la dimostrazione di questo teorema, il cui significato può essere molto grossolanamente così espresso: la convergenza dei polinomi interpolatori è assicurata, purché i punti di singolarità di $F(z)$ siano "abbastanza" lontani dall'intervallo di interpolazione.

III Esempio 6.10.2

Si giustifichi il risultato dell'esempio 6.10.1 e si dimostri che assumendo, per la stessa funzione (6.10.1), $[a, b] = [2, 3]$, la successione dei polinomi interpolatori su nodi equidistanti, converge uniformemente a f .

A tale scopo basta osservare che si ha

$$F(z) = \frac{1}{1+z^2}, \quad A = \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}, \quad \partial A = \pm i,$$

pertanto se $[a, b] = [-5, 5]$, risulta

$$d_1 = 1 < b - a = 10;$$

non essendo verificata la condizione di Teorema 6.10.2 non è detto che si verifichi convergenza uniforme dei polinomi interpolatori a f , e infatti non si verifica.

Se invece $[a, b] = [2, 3]$, risulta

$$d_2 = \sqrt{5} > b - a = 1$$

ed è assicurata la convergenza uniforme. In figura 5 il grafico è riferito al piano complesso \mathbb{C} .

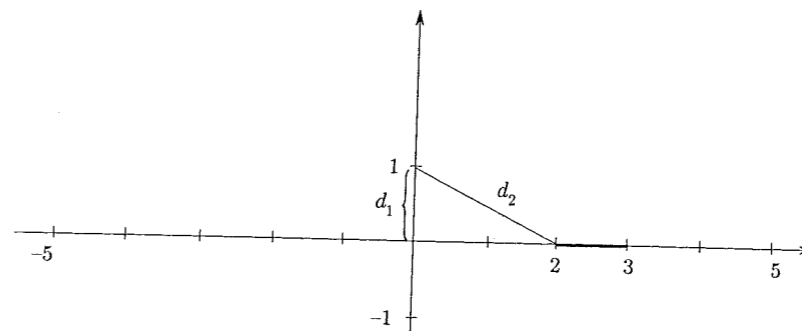


Fig. 5. Distanza dei punti di non olomorfia della funzione $F(z) = 1/(1+z^2)$ dall'intervallo $[2, 3]$.

Una terza condizione sufficiente di convergenza può essere stabilita ponendo delle condizioni sulla distribuzione dei nodi dell'interpolazione, anziché sulla sola funzione e sulla struttura dell'intervallo, come nei precedenti teoremi.

La scelta dei nodi che si manifesta particolarmente adatta allo scopo è quella dei nodi introdotti dalla formula (6.3.12), che forniscono anche uno dei valori più contenuti per la funzione di Lebesgue, rispetto ad altre disposizioni dei nodi.

Prima di caratterizzare questi nodi, che vengono detti nodi di Chebyshev, enunciamo il teorema di cui non diamo dimostrazione

TEOREMA 6.10.3. *Se f è lipschitziana in $[a, b]$, la successione $\{P_n^*(x)\}$ dei polinomi interpolatori sui nodi di Chebyshev, converge a f , uniformemente in $[a, b]$.*

La natura dei nodi di Chebyshev può essere descritta con maggiore semplicità, se si assume $[a, b] = [-1, 1]$, nel qual caso la (6.3.12) fornisce

$$(6.10.3) \quad x_i = \cos \frac{2i+1}{n+1} \frac{\pi}{2}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

ovviamente i nodi (6.3.12) sono i trasformati dei (6.10.3) quando l'intervallo $[-1, 1]$ è trasformato linearmente in un qualsiasi intervallo $[a, b]$.

Per $x \in [-1, 1]$ si può porre

$$x = \cos \vartheta$$

e introdurre una famiglia di polinomi $\{T_n(x)\}$, detti *polinomi di Chebyshev*, definiti dalla relazione

$$(6.10.4) \quad T_n(x) = \cos n\vartheta = \cos n(\arccos x) \quad , \quad n = 0, 1, \dots$$

Che $T_n(x)$ rappresenti un polinomio di grado n in x , si trae facilmente dalle osservazioni seguenti. Si ha ovviamente

$$T_0(x) = 1 \quad T_1(x) = x,$$

inoltre dalla nota formula

$$x = \cos \vartheta$$

$$2 \cos \vartheta \cos n\vartheta = \underbrace{\cos(n+1)\vartheta}_{T_{n+1}(x)} + \underbrace{\cos(n-1)\vartheta}_{T_{n-1}(x)}$$

si deduce: $2xT_n(x) = T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x)$, ovvero:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x);$$

pertanto è possibile ottenere in modo ricorsivo tutti i $T_n(x)$, $n \geq 2$, a partire dalla conoscenza di $T_0(x)$ e $T_1(x)$; questi essendo polinomi, tali sono anche tutti i $T_n(x)$, $n \geq 2$.

I primi polinomi del sistema $\{T_n(x)\}$ sono

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1, \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x.$$

Dalla definizione (6.10.4) si ottengono immediatamente gli zeri di $T_{n+1}(x)$; infatti

$$T_{n+1}(x) = 0 \iff (n+1)\vartheta = (2i+1)\frac{\pi}{2}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

e quindi

$$x_i = \cos \frac{2i+1}{n+1} \frac{\pi}{2}.$$

Pertanto, per ogni n , gli $n+1$ nodi di Chebyshev altro non sono che gli zeri del polinomio di Chebyshev di grado $n+1$.

Se si considera il generico intervallo $[a, b]$, poiché il cambiamento di coordinate $x = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}$, riconduce $[a, b]$ a $[-1, 1]$, i nodi di Chebyshev

e introdurre una famiglia di polinomi $\{T_n(x)\}$, detti *polinomi di Chebyshev*, definiti dalla relazione

$$(6.10.4) \quad T_n(x) = \cos n\vartheta = \cos n(\arccos x) \quad , \quad n = 0, 1, \dots$$

Che $T_n(x)$ rappresenti un polinomio di grado n in x , si trae facilmente dalle osservazioni seguenti. Si ha ovviamente

$$T_0(x) = 1 \quad T_1(x) = x,$$

inoltre dalla nota formula

$$x = \cos \vartheta \quad 2 \cos \vartheta \cos n\vartheta = \underbrace{\cos(n+1)\vartheta}_{T_{n+1}(x)} + \underbrace{\cos(n-1)\vartheta}_{T_{n-1}(x)}$$

si deduce: $2xT_n(x) = T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x)$, ovvero:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x);$$

pertanto è possibile ottenere in modo ricorsivo tutti i $T_n(x)$, $n \geq 2$, a partire dalla conoscenza di $T_0(x)$ e $T_1(x)$; questi essendo polinomi, tali sono anche tutti i $T_n(x)$, $n \geq 2$.

I primi polinomi del sistema $\{T_n(x)\}$ sono

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1, \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x.$$

Dalla definizione (6.10.4) si ottengono immediatamente gli zeri di $T_{n+1}(x)$; infatti

$$T_{n+1}(x) = 0 \iff (n+1)\vartheta = (2i+1)\frac{\pi}{2}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

e quindi

$$x_i = \cos \frac{2i+1}{n+1} \frac{\pi}{2}.$$

Pertanto, per ogni n , gli $n+1$ nodi di Chebyshev altro non sono che gli zeri del polinomio di Chebyshev di grado $n+1$.

Se si considera il generico intervallo $[a, b]$, poiché il cambiamento di coordinate $x = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}$, riconduce $[a, b]$ a $[-1, 1]$, i nodi di Chebyshev

in $[a, b]$ sono dati da

$$\tilde{x}_i = \frac{b-a}{2} \cos \frac{2i+1}{n+1} \frac{\pi}{2} + \frac{a+b}{2}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Il considerevole interesse riservato a questi nodi è dovuto non solo al sussistere del Teorema 6.10.3, ma anche alla seguente notevole proprietà (di cui non riportiamo la dimostrazione), che riguarda il polinomio nodale e quindi la stima dell'errore di troncamento (6.3.8) nell'interpolazione. Posto $\tilde{\pi}(x) = \prod_{i=0}^n (x - \tilde{x}_i)$, risulta

$$\max_{x \in [a, b]} |\tilde{\pi}_n(x)| = \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}, \quad = 2 \left[\frac{b-a}{4} \right]^{n+1} \quad \text{vd. Font-Pasquali}$$

mentre, con qualsiasi altra scelta di nodi, per il corrispondente polinomio nodale si ha

$$\max_{x \in [a, b]} |\pi_n(x)| > \max_{x \in [a, b]} |\tilde{\pi}_n(x)|.$$

6.11. Funzioni Spline - Splines cubiche interpolanti

Siano assegnati i dati (x_i, f_i) , $i = 0, 1, 2, \dots, n$, dove i valori f_i assunti dalla funzione f nei nodi x_i si possono supporre valutati con buona accuratezza ed il numero n sia abbastanza elevato. In tal caso, a sua volta, è elevato il grado del polinomio interpolatore e questo può comportare (anche se non necessariamente) la presenza di oscillazioni che potrebbero essere estranee all'andamento della funzione da approssimare.

L'accuratezza dei dati, però, può consigliare di procedere imponendo comunque, alla funzione approssimante, il passaggio per i punti (x_i, f_i) .

Le funzioni atte a realizzare una forma di interpolazione senza dar luogo ad oscillazioni indesiderate, sono le funzioni "spline" (la parola "spline", in inglese, denota uno strumento usato dai disegnatori per tracciare curve che si "appoggino" in dati punti, ad una forma prestabilita).

Dato un intervallo $[a, b]$, se ne consideri una partizione Δ mediante i punti x_i , $i = 0, 1, \dots, n$, con

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b;$$

si definisce *funzione spline* di grado m associata alla partizione Δ di $[a, b]$ una funzione $S(x)$ tale che

I risultati dell'approssimazione polinomiale ai minimi quadrati possono essere estesi facilmente al caso in cui si generalizza la (6.12.1), considerando come funzione approssimante una funzione del tipo

$$(6.12.10) \quad f_n(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \dots + a_n\varphi_n(x) = \alpha^T \Phi(x)$$

dove le funzioni $\{\varphi_n(x)\}$ sono assegnate, e si è posto $\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_n]^T$, $\Phi = [\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n]^T$; il caso polinomiale corrisponde a $\varphi_k(x) = x^k$.

La matrice $A_\varphi (m \times (n+1))$, analoga alla (6.12.8), è data da

$$(6.12.11) \quad A_\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_n(x_1) \\ \varphi_0(x_2) & \varphi_1(x_2) & \dots & \varphi_n(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0(x_m) & \varphi_1(x_m) & \dots & \varphi_n(x_m) \end{bmatrix}$$

e indicato con

$$(6.12.12) \quad H_\varphi \alpha = V_\varphi$$

il sistema delle equazioni normali, analogo a (6.12.7), risulta

$$(6.12.13) \quad H_\varphi = A_\varphi^T A_\varphi, \quad V_\varphi = A_\varphi^T Y.$$

Amnesso che sia $r(A_\varphi) = n+1$, l'unica soluzione del problema dei minimi quadrati, è la funzione f_n ottenuta assumendo, in (6.12.10), come α il valore $\tilde{\alpha}$ soluzione unica del problema (6.12.12), ovvero

$$\tilde{\alpha} = H_\varphi^{-1} V_\varphi = (A_\varphi^T A_\varphi)^{-1} A_\varphi^T Y.$$

||| 6.13. Approssimazioni trigonometriche

Il problema dell'approssimazione di una funzione $f(x)$, $x \in [0, 2\pi)$, periodica di periodo 2π , viene generalmente affrontato utilizzando, come classe \mathbb{F} di funzioni approssimanti, l'insieme Π_n dei polinomi trigonometrici, già introdotta nel paragrafo 6.1.

I risultati dell'approssimazione polinomiale ai minimi quadrati possono essere estesi facilmente al caso in cui si generalizza la (6.12.1), considerando come funzione approssimante una funzione del tipo

$$(6.12.10) \quad f_n(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \dots + a_n\varphi_n(x) = \alpha^T \Phi(x)$$

dove le funzioni $\{\varphi_n(x)\}$ sono assegnate, e si è posto $\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_n]^T$, $\Phi = [\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n]^T$; il caso polinomiale corrisponde a $\varphi_k(x) = x^k$.

La matrice $A_\varphi (m \times (n+1))$, analoga alla (6.12.8), è data da

$$(6.12.11) \quad A_\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_n(x_1) \\ \varphi_0(x_2) & \varphi_1(x_2) & \dots & \varphi_n(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0(x_m) & \varphi_1(x_m) & \dots & \varphi_n(x_m) \end{bmatrix}$$

e indicato con

$$(6.12.12) \quad H_\varphi \alpha = V_\varphi$$

il sistema delle equazioni normali, analogo a (6.12.7), risulta

$$(6.12.13) \quad H_\varphi = A_\varphi^T A_\varphi, \quad V_\varphi = A_\varphi^T Y.$$

Amesso che sia $r(A_\varphi) = n+1$, l'unica soluzione del problema dei minimi quadrati, è la funzione f_n ottenuta assumendo, in (6.12.10), come α il valore $\tilde{\alpha}$ soluzione unica del problema (6.12.12), ovvero

$$\tilde{\alpha} = H_\varphi^{-1} V_\varphi = (A_\varphi^T A_\varphi)^{-1} A_\varphi^T Y.$$

6.13. Approssimazioni trigonometriche

Il problema dell'approssimazione di una funzione $f(x), x \in [0, 2\pi)$, periodica di periodo 2π , viene generalmente affrontato utilizzando, come classe \mathbb{F} di funzioni approssimanti, l'insieme Π_n dei polinomi trigonometrici, già introdotta nel paragrafo 6.1.

Si pone perciò, per $x \in [0, 2\pi)$,

$$(6.13.1) \quad f(x) \simeq t_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

e si determinano i $2n+1$ coefficienti $\{a_k\}, \{b_k\}$ in base ad un dato criterio di approssimazione; ad esempio, tali coefficienti possono essere quelli dello sviluppo in *serie di Fourier*, che è noto essere convergente a f , sotto opportune ipotesi (per esempio, $f \in C^0([0, 2\pi))$); e allora si ha

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

Un altro possibile approccio è quello ai minimi quadrati, dal quale si perviene anche all'interpolazione trigonometrica, nel caso in cui $2n+1$ uguagli il numero dei dati. L'approssimazione trigonometrica ai minimi quadrati può essere trattata utilizzando quanto visto a fine paragrafo 6.12, quando si assuma come sistema $\{\varphi_k\}$ quello delle $2n+1$ funzioni $\{\cos kx, \sin kx\}$, $k = 0, 1, \dots, n$. Su tale base, forniremo ora l'espressione dei coefficienti $\{a_k\}, \{b_k\}$, considerando il caso di m nodi equispaziati in $[0, 2\pi)$, con $m \geq 2n+1$:

$$(6.13.2) \quad x_i = (i-1) \frac{2\pi}{m}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

La matrice (6.12.11) ha la forma seguente

$$A_\varphi = \begin{bmatrix} 1 & \cos x_1 & \sin x_1 & \dots & \cos nx_1 & \sin nx_1 \\ 1 & \cos x_2 & \sin x_2 & \dots & \cos nx_2 & \sin nx_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \cos x_m & \sin x_m & \dots & \cos nx_m & \sin nx_m \end{bmatrix}$$

di conseguenza la matrice $H_\varphi = A_\varphi^T A_\varphi$, (cfr. (6.12.13)), simmetrica, di

Handwritten notes:
 $x_1 = 0$
 $x_m = \frac{(m-1) \cdot 2\pi}{m}$
sono m
non si fa m
a 2π
giusto! siamo
in $[0, 2\pi)$

ordine $2n + 1$, è la seguente

$$H_\varphi = \begin{bmatrix} m \sum_{i=1}^m \cos x_i & \sum_{i=1}^m \sin x_i & \dots & \dots & \sum_{i=1}^m \sin nx_i \\ * & \sum_{i=1}^m \cos^2 x_i & \sum_{i=1}^m \sin x_i \cos x_i & \dots & \sum_{i=1}^m \sin nx_i \cos x_i \\ * & * & \sum_{i=1}^m \sin^2 x_i & \dots & \sum_{i=1}^m \sin nx_i \sin x_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & * & \dots & \sum_{i=1}^m \cos^2 nx_i & \sum_{i=1}^m \sin nx_i \cos nx_i \\ * & * & * & \dots & * & \sum_{i=1}^m \sin^2 nx_i \end{bmatrix}$$

dove sono stati riportati esplicitamente solo gli elementi diagonali e sopra diagonali, vista la simmetria di H_φ .

Per la distribuzione dei nodi equispaziati, data da (6.13.2), sono valide le seguenti condizioni di "ortogonalità", ove $r > 0, s \geq 0$,

la matrice r, s variano con n differenziale

$$\sum_{i=1}^m \cos rx_i \cos sx_i = \begin{cases} 0, & \text{se } r \neq s, \\ \frac{m}{2}, & \text{se } r = s \neq 0 \text{ e } m \text{ dispari}; (r = s \neq 0, m/2) \text{ e } m \text{ pari} \\ m, & \text{se } r = s = 0 \text{ e } m \text{ dispari}; (r = s = 0, m/2) \text{ e } m \text{ pari} \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^m \sin rx_i \sin sx_i = \begin{cases} 0, & \text{se } r \neq s, \\ 0, & \text{se } r = s = m/2 \text{ e } m \text{ è pari,} \\ \frac{m}{2}, & \text{se } r = s \neq 0 \text{ e } m \text{ dispari}; (r = s \neq 0, m/2) \text{ e } m \text{ pari} \end{cases}$$

non è zero nella diagonale

$$\sum_{i=1}^m \sin rx_i \cos sx_i = 0, \quad \forall r, s;$$

pertanto la matrice H_φ è diagonale, ed essendo per ipotesi $n < m/2$, tutti gli elementi diagonali di H_φ sono non nulli e si ha

$$H_\varphi = \text{diag} \left(m, \frac{m}{2}, \dots, \frac{m}{2} \right),$$

H_φ è regolare e immediatamente invertibile; il problema ha quindi soluzione

L'uno! m al max è n-1

ordine $2n + 1$, è la seguente

$$H_\varphi = \begin{bmatrix} m & \sum_{i=1}^m \cos x_i & \sum_{i=1}^m \sin x_i & \dots & \dots & \sum_{i=1}^m \sin nx_i \\ * & \sum_{i=1}^m \cos^2 x_i & \sum_{i=1}^m \sin x_i \cos x_i & \dots & \dots & \sum_{i=1}^m \sin nx_i \cos x_i \\ * & * & \sum \sin^2 x_i & \dots & \dots & \sum_{i=1}^m \sin nx_i \sin x_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & * & \dots & \sum_{i=1}^m \cos^2 nx_i & \sum_{i=1}^m \sin nx_i \cos nx_i \\ * & * & * & \dots & * & \sum_{i=1}^m \sin^2 nx_i \end{bmatrix}$$

dove sono stati riportati esplicitamente solo gli elementi diagonali e sopra diagonali, vista la simmetria di H_φ .

Per la distribuzione dei nodi equispaziati, data da (6.13.2), sono valide le seguenti condizioni di "ortogonalità", ove $r > 0, s \geq 0$,

solo metrica r s variando con n

$$\sum_{i=1}^m \cos rx_i \cos sx_i = \begin{cases} 0, & \text{se } r \neq s, \\ \frac{m}{2}, & \text{se } r = s \neq 0 \text{ e } m \text{ dispari; } (r = s \neq 0, m/2) \text{ e } m \text{ pari} \\ m, & \text{se } r = s = 0 \text{ e } m \text{ dispari; } (r = s = 0, m/2) \text{ e } m \text{ pari} \end{cases}$$

non si sono mai visti

$$\sum_{i=1}^m \sin rx_i \sin sx_i = \begin{cases} 0, & \text{se } r \neq s, \\ 0, & \text{se } r = s = m/2 \text{ e } m \text{ è pari,} \\ \frac{m}{2}, & \text{se } r = s \neq 0 \text{ e } m \text{ dispari; } (r = s \neq 0, m/2) \text{ e } m \text{ pari} \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^m \sin rx_i \cos sx_i = 0, \quad \forall r, s;$$

pertanto la matrice H_φ è diagonale, ed essendo per ipotesi $n < m/2$, tutti gli elementi diagonali di H_φ sono non nulli e si ha

$$H_\varphi = \text{diag} \left(m, \frac{m}{2}, \dots, \frac{m}{2} \right),$$

H_φ è regolare e immediatamente invertibile; il problema ha quindi soluzione

2. vero! non c'è autov...

m al max e' m-1

unica e dalla (6.12.13) si ricava il vettore $\tilde{\alpha} = [a_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n]$ con

$$(6.13.3) \quad \begin{cases} a_k = \frac{2}{m} \sum_{i=1}^m f_i \cos kx_i, & k = 0, 1, 2, \dots, n, \\ b_k = \frac{2}{m} \sum_{i=1}^m f_i \sin kx_i, & k = 1, 2, \dots, n; \end{cases}$$

f₁ - f_m due le inf

sono questi i valori da sostituire in (6.13.1) per avere il polinomio trigonometrico approssimante ai minimi quadrati.

Se il numero dei coefficienti incogniti è pari al numero $m = 2n + 1$ dei dati si ricade in un problema di *interpolazione trigonometrica* e la (6.13.1) con i coefficienti (6.13.3) dà l'espressione del polinomio interpolatore relativo a $2n + 1$ dati.

Anche nel caso che il numero dei dati sia pari, ad esempio $m = 2n$, si può ottenere l'espressione del polinomio interpolatore seguendo lo stesso procedimento, ma assumendo ora $2n$ (anziché $2n + 1$) funzioni base: $1, \{\cos kx, \sin kx\}_{k=1, \dots, n-1}, \cos nx$; in questo modo la matrice del sistema delle equazioni normali, sia \tilde{H}_φ , è ottenuta da H_φ sopprimendo le ultime riga e colonna. Per le condizioni di ortogonalità \tilde{H}_φ è ancora diagonale ma è data da

$$\tilde{H}_\varphi = \text{diag} \left(m, \frac{m}{2}, \dots, \frac{m}{2}, m \right)$$

quindi il polinomio interpolatore relativo a $2n$ dati è il seguente

$$t_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) + \frac{a_n}{2} \cos nx.$$

con i coefficienti espressi ancora dalle (6.13.3).

Il costo computazionale del metodo descritto è determinato dal numero di operazioni necessarie per calcolare i coefficienti (6.13.3) di t_n ; il calcolo di ognuno di essi richiede m operazioni (ognuna intesa come una moltiplicazione seguita da un'addizione) escludendo dal computo il calcolo di $2/m$, fattore comune a tutti i coefficienti; quindi la valutazione di t_n richiede $(2n + 1)m$ operazioni, che nel caso dell'interpolazione diventano m^2 . La determinazione di tali coefficienti costituisce la cosiddetta *analisi di Fourier Discreta* (DFA) e può essere molto dispendiosa. Tuttavia, ammesso di considerare dei valori $m = b^N$, con $b \in \mathbb{N}^+$, e riferendosi al caso della interpolazione, è possibile ridurre il numero di operazioni da m^2 a $mb \log_b m$, mediante l'algoritmo della *trasformata rapida di Fourier* (FFT, Fast Fourier Transform) che sarà descritto nel prossimo paragrafo.

le varie potenze di ω diventano

$$\begin{aligned} \omega^{kp_{N-1}} &= \omega^{(k_0+k_1 2^+ \dots + k_{N-1} 2^{N-1})p_{N-1}} \\ \omega^{kp_{N-2} 2} &= \omega^{(k_0+k_1 2^+ \dots + k_{N-1} 2^{N-1})p_{N-2} 2} = \omega^{(k_0+k_1 2^+ \dots + k_{N-2} 2^{N-2})p_{N-2} 2} \\ &\dots \dots \dots \\ \omega^{kp_0 2^{N-1}} &= \omega^{k_0 p_0 2^{N-1}} \end{aligned}$$

Ne segue la rappresentazione

$$c_k = \frac{1}{m} \left\{ \sum_{p_{N-1}=0}^1 \dots \left[\sum_{p_1=0}^1 \left(\sum_{p_0=0}^1 f_p \omega^{k_0 p_0 2^{N-1}} \right) \omega^{(k_0+k_1 2)p_1 2^{N-2}} \dots \right. \right. \\ \left. \left. \dots \omega^{(k_0+k_1 2^+ \dots + k_{N-1} 2^{N-1})p_{N-1}} \right] \right\},$$

dalla quale si deduce che l'introduzione delle mN quantità, da valutare ricorsivamente,

$$\begin{aligned} S_1(k_0, p_1, \dots, p_{N-1}) &= \sum_{p_0=0}^1 f_p \omega^{k_0 p_0 2^{N-1}} \\ S_2(k_0, k_1, p_2, \dots, p_{N-1}) &= \sum_{p_1=0}^1 S_1(k_0, p_1, \dots, p_{N-1}) \omega^{(k_0+k_1 2)p_1 2^{N-2}} \\ &\dots \dots \dots \\ S_N(k_0, k_1, \dots, k_{N-1}) &= \\ &= \sum_{p_{N-1}=0}^1 S_{N-1}(k_0, k_1, \dots, k_{N-2}, p_{N-1}) \omega^{(k_0 + \dots + k_{N-1} 2^{N-1})p_{N-1}} \end{aligned}$$

consente il calcolo di tutti i c_k poiché

$$c_k = S_N(k_0, k_1, \dots, k_{N-1});$$

e questo richiede $2mN$ operazioni, ossia un costo computazionale di $\sim m \log_2 m$ operazioni.

6.15. Derivazione numerica

Un'applicazione di notevole interesse della formula di interpolazione di Lagrange si ha nella *derivazione numerica* di una funzione f , di cui siano assegnati $n + 1$ valori $\{f_i\}$, $i = 0, 1, \dots, n$, nota o meno che ne sia l'espressione analitica.

Considerando la derivata k -esima, $k \geq 1$, di entrambi i membri della (6.2.8), si ottiene la seguente formula di derivazione numerica

$$(6.15.1) \quad f^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^n l_i^{(k)}(x) f_i + \frac{d^k}{dx^k} E_t(f)$$

che consente il calcolo approssimato di $f^{(k)}(x)$ mediante una combinazione lineare di $n + 1$ valori di f .

Esaminiamo in particolare il caso $k = 1$; supponendo in un primo momento che i dati siano esatti, cioè $f_i = f(x_i)$, l'errore E_t si riduce all'errore di troncamento E_n e può quindi essere espresso mediante la (6.3.8) nell'ipotesi che f ammetta derivata $(n + 1)$ -esima in $[a, b]$, minimo intervallo contenente i nodi e il punto x .

Si ha pertanto

$$(6.15.2) \quad \frac{d}{dx} E_n(x) = \pi'_n(x) \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} + \pi_n(x) \frac{d}{dx} \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!};$$

vale inoltre il seguente teorema di cui si omette la dimostrazione

TEOREMA 6.15.1. *Se $f \in C^{n+2}([a, b])$, esiste almeno un punto $\eta(x) \in [a, b]$ per cui risulta*

$$\frac{d}{dx} \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+2)}(\eta(x))}{(n+2)!}.$$

Si può concludere dunque che, se $f \in C^{n+1}([a, b])$, sussiste la seguente formula

$$(6.15.3) \quad f'(x) = \sum_{i=0}^n l'_i(x) f_i + \pi'_n(x) \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} + \pi_n(x) \frac{f^{(n+2)}(\eta(x))}{(n+2)!}$$

In particolare, nelle applicazioni, è interessante il caso $x = x_i$, che dà luogo all'annullamento dell'ultimo termine di (6.15.3).

Riportiamo ora, senza entrare nel dettaglio dei calcoli, (che possono peraltro essere sviluppati senza difficoltà) i valori della derivata prima nei nodi di una tavola, supposto che sia $n = 2$, i nodi siano *equispaziati* con passo h , e denotati con x_{-1}, x_0, x_1 :

$$(6.15.4) \quad \begin{cases} f'(x_{-1}) = \frac{1}{2h}(-f_1 + 4f_0 - 3f_{-1}) + \frac{h^2}{3}f'''(\tau_{-1}) \\ f'(x_0) = \frac{1}{2h}(f_1 - f_{-1}) - \frac{h^2}{6}f'''(\tau_0) \\ f'(x_1) = \frac{1}{2h}(3f_1 - 4f_0 + f_{-1}) + \frac{h^2}{3}f'''(\tau_1) \end{cases}$$

dove $\tau_{-1}, \tau_0, \tau_1$ denotano opportuni punti di (x_{-1}, x_1) .

Per quanto riguarda la propagazione degli errori sui dati, esaminiamo in particolare la valutazione di $f'(x_0)$, supponendo ora che risulti

$$f_i = f(x_i) + \varepsilon_i, \quad |\varepsilon_i| \leq \varepsilon, \quad i = -1, 0, 1;$$

dalla (6.15.4) segue allora che nella parte approssimante di $f'(x_0)$ il contributo η degli errori sui dati è il seguente

$$\eta = \frac{1}{2h}(\varepsilon_1 - \varepsilon_{-1}).$$

La presenza di h nel denominatore di η indica che la scelta di un passo piccolo, se da un lato tende a ridurre l'errore di troncamento (2° addendo a 2° membro delle (6.15.4)), d'altro lato tende ad amplificare gli errori sui dati.

Queste considerazioni suggeriscono la scelta di un passo tale che i contributi dei due tipi di errore si equilibrino, con ciò intendendo quanto segue: posto $|f'''(x)| \leq M$, per gli errori di troncamento e di propagazione si hanno le seguenti maggiorazioni

$$\left| \frac{h^2}{6}f'''(\tau_0) \right| \leq \frac{h^2}{6}M; \quad |\eta| \leq \frac{\varepsilon}{h},$$

si determina allora h , in modo tale che risulti

$$\frac{h^2}{6}M = \frac{\varepsilon}{h} \quad h^3 = \frac{6\varepsilon}{M}$$

Riportiamo ora, senza entrare nel dettaglio dei calcoli, (che possono peraltro essere sviluppati senza difficoltà) i valori della derivata prima nei nodi di una tavola, supposto che sia $n = 2$, i nodi siano *equispaziati* con passo h , e denotati con x_{-1}, x_0, x_1 :

$$(6.15.4) \quad \begin{cases} f'(x_{-1}) = \frac{1}{2h}(-f_1 + 4f_0 - 3f_{-1}) + \frac{h^2}{3}f'''(\tau_{-1}) \\ f'(x_0) = \frac{1}{2h}(f_1 - f_{-1}) - \frac{h^2}{6}f'''(\tau_0) \\ f'(x_1) = \frac{1}{2h}(3f_1 - 4f_0 + f_{-1}) + \frac{h^2}{3}f'''(\tau_1) \end{cases}$$

dove $\tau_{-1}, \tau_0, \tau_1$ denotano opportuni punti di (x_{-1}, x_1) .

Per quanto riguarda la propagazione degli errori sui dati, esaminiamo in particolare la valutazione di $f'(x_0)$, supponendo ora che risulti

$$f_i = f(x_i) + \varepsilon_i, \quad |\varepsilon_i| \leq \varepsilon, \quad i = -1, 0, 1;$$

dalla (6.15.4) segue allora che nella parte approssimante di $f'(x_0)$ il contributo η degli errori sui dati è il seguente

$$\eta = \frac{1}{2h}(\varepsilon_1 - \varepsilon_{-1}).$$

La presenza di h nel denominatore di η indica che la scelta di un passo piccolo, se da un lato tende a ridurre l'errore di troncamento (2° addendo a 2° membro delle (6.15.4)), d'altro lato tende ad amplificare gli errori sui dati.

Queste considerazioni suggeriscono la scelta di un passo tale che i contributi dei due tipi di errore si equilibrino, con ciò intendendo quanto segue: posto $|f'''(x)| \leq M$, per gli errori di troncamento e di propagazione si hanno le seguenti maggiorazioni

$$\left| \frac{h^2}{6}f'''(\tau_0) \right| \leq \frac{h^2}{6}M; \quad |\eta| \leq \frac{\varepsilon}{h},$$

si determina allora h , in modo tale che risulti

$$\frac{h^2}{6}M = \frac{\varepsilon}{h}. \quad h^3 = \frac{6\varepsilon}{M}$$

Ne segue l'individuazione di un *valore ottimale* di h , dato da

$$h_{\text{ott}} = \sqrt[3]{\frac{6\varepsilon}{M}}.$$

Per l'approssimazione delle derivate seconde si hanno formule analoghe alle (6.15.4); anche in questo caso non si riportano i calcoli ma solo i risultati del caso $n = 2$

$$(6.15.5) \quad \begin{cases} f''(x_{-1}) = \frac{1}{h^2}(f_1 - 2f_0 + f_{-1}) - hf'''(\tau_{-1}) + \frac{h^2}{6}f^{iv}(\gamma_{-1}) \\ f''(x_0) = \frac{1}{h^2}(f_1 - 2f_0 + f_{-1}) - \frac{h^2}{12}f^{iv}(\gamma_0) \\ f''(x_1) = \frac{1}{h^2}(f_1 - 2f_0 + f_{-1}) + hf'''(\tau_1) - \frac{h^2}{6}f^{iv}(\gamma_1) \end{cases}$$

dove γ_i e τ_i denotano opportuni punti di (x_{-1}, x_1) .