Analisi Matematica I (A.A. 2017/18) – Proff. F. Bucci & L. De Pascale

Importante: Per l'elaborato si utilizzino solo i fogli consegnati dai docenti, completi di cognome nome e matricola scritti *in stampatello* in alto a destra. Le risposte della seconda parte vanno *sempre* corredate di motivazioni; le conclusioni vanno riportate in maniera chiara ed esplicita.

I parte: Quesiti preliminari

1. Data $f(x) = \cos(x^2) - (\cos x)^2$, indicare quale tra le stime asintotiche seguenti è corretta (o e O indicano i simboli di Landau "o piccolo" e "O grande").

   ☐ $f(x) = 2 + O(x^4)$, per $x \to 0$ ☐ $f(x) = o(x^4)$, per $x \to 0$
   ☐ $f(x) \sim -\frac{3}{4}x^4$, per $x \to 0$ ☑ $f(x) \sim x^2$, per $x \to 0$

2. Scrivere (in forma più 'depurata' possibile) la derivata seconda di
$$f(x) = x^2\Big(\frac{\pi}{2} - \arctan x\Big) + x\log(1+x^2)\,, \qquad x \ge 0\,,$$
   e cosa se ne può dedurre.

   $f''(x) = 2\Big[\frac{\pi}{2} - \arctan x + \frac{x}{(1+x^2)^2}\Big] \ge 0$ (di conseguenza, f è convessa in $[0,\infty)$)

3. La funzione $\arctan x$ è lipschitziana e la (migliore) costante di Lipschitz è $L = 1$

4. Stabilire quali tra le proprietà enunciate sotto sono corrette per la funzione
$$F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt\,.$$
   ☐ discontinua in $x_0 = 0$ ☐ continua in $\mathbb{R}$ ma ivi non uniformemente continua
   ☐ non derivabile su tutto $\mathbb{R}$ ☑ lipschitziana e quindi uniformemente continua in $\mathbb{R}$

5. L'area della figura piana delimitata dalla curva di equazione $y = 2 - \cosh x$ e l'asse x è
$$2\big(2\log(2+\sqrt{3}) - \sqrt{3}\big)$$

6. Calcolare la somma s della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{7^n}$.
$$s = \frac{3}{28}$$

7. Sia data la successione $a_n = \frac{n+e^{-n}}{2\sin n + 3n^2}$. Stabilire se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ risulta convergente, divergente, o indeterminata, spiegando molto sinteticamente perché.

   La serie è divergente, perché $a_n \sim \dfrac{1}{3n}$

II parte: Problemi

8. Data la funzione

$$f(x) = x\log(1+\sin(2x)) - (\sin x)\log(1+2x)\,,$$

si chiede di dedurre $f^{(4)}(0)$ senza un calcolo esplicito di alcuna derivata.

Il punto di partenza sono gli sviluppi noti

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)\,,\ t \longrightarrow 0\,; \quad \sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + o(t^4)\,,\ t \longrightarrow 0\,.$$

Sostituendo $t = 2x$, poiché $x \to 0$ se e solo se $t \to 0$, si deducono le formule asintotiche

$$\log(1+2x) = 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)\,,\ x \longrightarrow 0\,; \quad \sin(2x) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^4)\,,\ x \longrightarrow 0\,.$$

Per la funzione $f(x)$ del testo si ha quindi

$$\begin{aligned} f(x) = x\log\Big[1 + \big(2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^4)\big)\Big] - \\ - \Big(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\Big)\Big(2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)\Big)\,,\ \text{per } x \longrightarrow 0; \end{aligned}$$

utilizzando nuovamente lo sviluppo di $\log(1+t)$ (per esprimere il minuendo) e proseguendo con i calcoli si ottiene

$$\begin{aligned} f(x) &= x\Big[\big(2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^4)\big) - \frac{1}{2}\big(2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^4)\big)^2 + \\ &\quad + \frac{1}{3}\big(2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^4)\big)^3 + o(x^3)\Big] - 2x^2 + 2x^3 - \frac{8}{3}x^4 + \frac{x^4}{3} + o(x^4) = \\ &= x\Big[2x - \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)\Big] - 2x^2 + 2x^3 - \frac{7}{3}x^4 + o(x^4) = -x^4 + o(x^4)\,, \end{aligned}$$

per $x \to 0$, cioè

$$f(x) = -x^4 + o(x^4)\,, \qquad \text{per } x \to 0.$$

In virtù dell'unicità del polinomio di Taylor-MacLaurin si deduce che $-x^4$ è il polinomio di MacLaurin di grado 4 della funzione $f(x)$; di conseguenza, poiché il coefficiente di x^4 (in questo caso -1) è uguale a $f^{(4)}(0)/4!$, si ha

$$f^{(4)}(0) = -4! = -24\,.$$

9. Data $f(x) = (x^2-3x+2)e^{-x^2}$, disegnare il grafico della funzione $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ dopo aver precisato per F dominio, eventuali simmetrie, regolarità, comportamento asintotico, intervalli di monotonia, proprietà di convessità (se e ove possibile), ecc.

Si osserva preliminarmente che $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Poiché f è continua in $\mathbb{R}$ essa è integrabile secondo Riemann in intervalli limitati, in particolare in ogni intervallo di estremi 0 e x (per ogni x); dunque la funzione integrale $F(x)$ è definita per ogni x, cioè $\mathrm{dom}(F) = \mathbb{R}$. La funzione integranda f non è né pari né dispari, e lo stesso vale per F (si poteva osservare che $F(\cdot)$ è la differenza tra una funzione dispari ed una pari.)

Dal fatto che e^{x^2} è un infinito di ordine superiore ad ogni potenza positiva di x, per $|x| \to +\infty$, segue che $|f(x)|/(1/x^2) = x^2|f(x)| = x^2\,|x^2-3x+2|/e^{x^2} \longrightarrow 0$, per $|x| \to +\infty$. Il Criterio del confronto asintotico stabilisce che esistono *finiti* entrambi i limiti $L_1 = \lim_{x\to-\infty} F(x)$ e $L_2 = \lim_{x\to+\infty} F(x)$, e le rette di equazione $y = L_2$ e $y = L_1$ sono asintoti orizzontali, rispettivamente per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$. È in effetti possibile determinare i valori di L_2 e L_1: facili calcoli producono

$$\begin{aligned}\int_0^c (x^2-3x+2)e^{-x^2}\,dx &= \int_0^c x\left(xe^{-x^2}\right)dx - 3\int_0^c xe^{-x^2}\,dx + 2\int_0^c e^{-x^2}\,dx = \\ &= \Big[x\Big(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big)\Big]_0^c + \frac{1}{2}\int_0^c e^{-x^2}\,dx + \frac{3}{2}\big[e^{-x^2}\big]_0^c + 2\int_0^c e^{-x^2}\,dx = \\ &= -\frac{1}{2}c\,e^{-c^2} + \frac{5}{2}\int_0^c e^{-x^2}\,dx + \frac{3}{2}\Big(e^{-c^2}-1\Big).\end{aligned}$$

Passando al limite per $c \to +\infty$, utilizzando il valore dell'integrale della funzione di Gauss su $\mathbb{R}$ (per cui $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}/2$), si ottiene $L_2 = \frac{5}{4}\sqrt{\pi} - \frac{3}{2} > 0$; $L_1 = -\frac{5}{4}\sqrt{\pi} - \frac{3}{2} < 0$ è dedotto in maniera simile.

Poiché $f \in C(\mathbb{R})$ il Teorema fondamentale del calcolo integrale assicura che $F \in C^1(\mathbb{R})$, con $F'(x) = f(x) = (x-1)(x-2)e^{-x^2}$; si ha quindi $F'(x) > 0$ in $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$, $F'(x) < 0$ in $(1,2)$. Si deduce che F risulta crescente in $(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$ e decrescente altrimenti, e che i punti $x = 1$ e $x = 2$ sono rispettivamente di massimo e minimo relativo per F.

Si noti che poiché $F(\cdot)$ è crescente in $(-\infty,1]$ e $F(0) = 0$, si ha $F(x) < 0$ per $x < 0$, mentre $F(x) > 0$ in un intorno destro di $x_0 = 0$; dal fatto che $L_2 > 0$, esiste $\overline{x} > 2$ tale che $F(x) > 0$ per $x \geq \overline{x}$.

Infine, da $F'(x) = f(x)$ segue che F è derivabile due volte, con

$$F''(x) = f'(x) = -(2x^3 - 6x^2 + 2x + 3)e^{-x^2}$$

per ogni x (più precisamente, $F \in C^\infty(\mathbb{R})$); i limiti di F'' all'infinito mostrano che esistono $x_1 < 0$ e $x_2 > 0$ tali che F è (strettamente) convessa in $(-\infty,x_1)$ e concava in $(x_2,+\infty)$. Tenendo conto di tutte le proprietà dedotte è possibile tracciare un grafico qualitativo di F (anche con qualche informazione quantitativa).

10. Al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$ si consideri la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^x}{(n+1)!}.$$

Per quali x la serie converge? Calcolare la somma della serie per $x = 1$.

La serie non è ben definita per $x = 0$, perché il primo addendo perde di significato; per lo stesso motivo si esclude $x < 0$. Sia dunque $x > 0$: la serie è a termini positivi, e posto

$$a_n(x) := \frac{n^x}{(n+1)!} \,,$$

si ha

$$\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} = \frac{(n+1)^x}{(n+2)!} \, \frac{(n+1)!}{n^x} = \frac{1}{n+2}\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^x \longrightarrow 0 \,, \quad \text{per } n \to +\infty,$$

dato che $(1 + 1/n)^x = e^{x \log(1+1/n)} \longrightarrow e^0 = 1$, per ogni $x > 0$. Per il Criterio del rapporto $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)$ risulta convergente per ogni $x > 0$.
(È importante sottolineare che se la serie 'parte' da $n = 1$ anziché da $n = 0$, allora essa converge per ogni valore di $x \in \mathbb{R}$.)

Per il calcolo della somma della serie per $x = 1$, si osserva che

$$a_n(1) = \frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} =: b_n - b_{n+1} \,,$$

con $b_n := \frac{1}{n!}$; la serie è telescopica, b_n ha limite finito $b = 0$, per $n \to +\infty$, e pertanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(1) = b_0 - b = 1 \,.$$

Parimenti si poteva osservare che per la convergenza della serie $\sum_n \frac{1}{n!}$, si può scrivere

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(1) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n - \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \,;$$

d'altra parte

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e \,,$$

per cui

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(1) = e - (e-1) = 1 \,.$$