Analisi Matematica I (A.A. 2017/18) – Proff. F. Bucci & L. De Pascale

Importante: Per l'elaborato si utilizzino solo i fogli consegnati dai docenti, completi di cognome nome e matricola scritti *in stampatello* in alto a destra. Le risposte della seconda parte vanno *sempre* corredate di motivazioni; le conclusioni vanno riportate in maniera chiara ed esplicita.

I parte: Quesiti preliminari

1. Fissato $\epsilon > 0$ (arbitrario), fornire un'espressione di C_ϵ che renda vera la stima $ab \leq (\epsilon^2 a^2 + C_\epsilon b^2)/2$, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$.

$$C_\epsilon = \frac{1}{\epsilon^2} \quad \text{(si scrive } ab = \epsilon a \frac{b}{\epsilon} \text{ e si utilizza una stima elementare)}$$

2. Per $y > 0$ si consideri l'insieme $E_y = \left\{x > -1 \colon \frac{x^2}{x+1} < y\right\}$. Determinare $\sup E_y$ e $\inf E_y$.

$$\sup E_y = \frac{y + \sqrt{y^2 + 4y}}{2}, \qquad \inf E_y = \frac{y - \sqrt{y^2 + 4y}}{2} > -1$$

3. Qual/Quali è/sono il/i punto/punti di Lagrange ξ (cioè il/i punto/i ξ nell'assunto del Teorema di Lagrange) della funzione $f(x) = x^3 - x$ nell'intervallo $[-1, 1]$?

$$\xi_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

4. Scrivere una primitiva $U(x)$ della funzione $u(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ (a, b, c sono i coefficienti del polinomio, cioè delle costanti).

$$U(x) = -\big[(ax^2 + (2a + b)x + (2a + b + c)\big]e^{-x}$$

5. Il valore dell'esponente r per cui vale la stima asintotica $e^{1-\frac{x}{\sin x}} - 1 = O(x^r)$, per $x \to 0$, è

$$r = 2 \qquad \text{(esponente } \textit{ottimale}\text{)}$$

6. Stabilire se la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$$

è convergente, divergente o indeterminata, spiegando brevemente perché.

È divergente: si ha $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x \log x}\, dx = +\infty$, e valgono le ipotesi del criterio integrale

7. Dire per quale/quali delle seguenti equazioni differenziali ordinarie è appropriata l'affermazione "tutte le soluzioni sono limitate". (Il simbolo $'$ indica $\frac{d}{dt}$, e le soluzioni sono funzioni $t \longmapsto x(t)$.)

☐ $x'' + 2x' + x = 0$ ☐ $x'' + x' - 2x = 0$ ☑ $x'' + x = 0$ ☐ $x'' + x' = 0$

II parte: Problemi

8. Si consideri la successione $\{a_n\}_n$ definita per ricorrenza come segue:

$$\begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_{n+1} = \left(2a_n + \frac{1}{8}\right)^2 \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

assumendo $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Si chiede di

(a) stabilire se essa risulta monotona crescente o decrescente (almeno definitivamente), al variare di α;

(b) stabilire, sempre al variare di α, se esiste $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ e nel caso calcolarlo.

9. Descrivere qualitativamente il grafico della funzione $x \longmapsto f(x)$ definita da

$$f(x) = \int_x^1 \arctan(t^{-m})\, dt$$

quando $m = 2$. Solo successivamente, si evidenzino le principali discrepanze tra i casi $m = 2$ e $m = 1$.

10. Dopo aver precisato in che senso va inteso l'integrale – se secondo Riemann, oppure in senso generalizzato – calcolare

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{2}\cos x} - \frac{1}{1 - \frac{1}{4}\cos x}\right) dx\,.$$

II Parte: Svolgimento

8. Si osserva preliminarmente che ogni termine della successione $\{a_n\}_{n\geq 0}$ è non negativo. Infatti, per ipotesi $a_0 = \alpha \geq 0$, mentre a_{n+1} è un quadrato dunque $a_{n+1} \geq 0$ per ogni $n \geq 0$, cioè $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 0$, ...

8a. Al fine di stabilire se $\{a_n\}_n$ è monotona (crescente o decrescente), si calcola esplorativamente $a_1 = (2\alpha + 1/8)^2 = 4\alpha^2 + \alpha/2 + 1/64$: si ha quindi $a_1 \geq a_0 = \alpha$ se e solo se $4\alpha^2 - \alpha/2 + 1/64 \geq 0$ cioè $(2\alpha - 1/8)^2 \geq 0$, che è vera per ogni α; in particolare, $a_1 = a_0$ solamente quando $\alpha = 1/16$. Allo stesso modo si vede che $a_{n+1} \geq a_n$ equivale a $(2a_n - 1/8)^2 \geq 0$, che è vera qualsiasi sia a_n, con $a_{n+1} = a_n$ se e solo se $a_n = 1/16$. Si deduce quindi che

i) se $a_0 = \alpha = \frac{1}{16}$, si ha $a_n = \frac{1}{16}$ per ogni $n \geq 0$, cioè la successione è *costante*;

ii) per ogni $\alpha \geq 0$, $\alpha \neq \frac{1}{16}$, la successione risulta crescente *in senso stretto.*

(Si osservi che le argomentazioni di carattere algebrico utilizzate sopra sono sufficienti nel caso specifico. È importante sottolineare però che in generale occorre avvalersi del Principio di induzione. Ai fini della monotonia, ad esempio, si introduce la proposizione

$$\mathcal{P}(n): \qquad a_{n+1} \geq a_n$$

e dopo aver verificato la validità di $\mathcal{P}(0)$ ($a_1 \geq a_0$), l'obbiettivo è quello di provare – assumendo $\mathcal{P}(n)$ vera per un certo $n \geq 0$ – che $\mathcal{P}(n)$ implica $\mathcal{P}(n+1)$. Il Principio di induzione assicura la validità di $\mathcal{P}(n)$ *per ogni* $n \geq 0$.)

8b. Dall'analisi effettuata in 8a. segue immediatamente che se $\alpha = 1/16$, banalmente $a_n \longrightarrow 1/16$, ché $a_n = 1/16$ per ogni n. Per gli altri valori di α, a_n risulta strettamente crescente e per il Teorema sul limite delle successioni monotone essa ammette limite ℓ, finito o infinito (precisamente, $+\infty$, dato che $a_n > 0$ per ogni $n \geq 1$). Se ℓ è finito, passando al limite nella legge di ricorrenza si ottiene

$$\ell = \left(2\ell + \frac{1}{8}\right)^2,$$

cioè $\ell = 1/16$. D'altra parte, se $a_0 = \alpha > 1/16$, poiché a_n è crescente (e $a_n > a_0 > 1/16$ per ogni n) non potrà essere $\ell = 1/16$; in questo caso il limite è $+\infty$.

È facile dimostrare che se invece $0 \leq \alpha < 1/16$, si ha $a_n < 1/16$ per ogni $n \geq 0$: infatti, si avrà $a_{n+1} = (2a_n + 1/8)^2 < 1/16$ se e solo se $2a_n + 1/8 \leq 1/4$, che equivale a $a_n < 1/16$. Si ha dunque: $a_0 < 1/16$, e inoltre $a_n < 1/16$ per qualche n implica $a_{n+1} < 1/16$; il Principio di induzione assicura la validità dell'asserzione "$a_n < 1/16$ per ogni $n \geq 0$". In tal caso, a_n risulta limitata anche dall'alto ed il suo limite ℓ è finito.

Si conclude che per ogni $\alpha \geq 0$ esiste $\lim_{n\to\infty} a_n$, e si ha

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \frac{1}{16} & \text{se } 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{16}, \\ +\infty & \text{se } \alpha > \frac{1}{16}. \end{cases}$$

9. (Il caso $m = 2$) Sia $g(t) = \arctan(t^{-2})$, $t \neq 0$. Stabilire se $x \in \mathrm{dom}(f)$ equivale a stabilire se esiste (secondo Riemann o in senso generalizzato) l'integrale della funzione $g(\cdot)$ nell'intervallo di estremi 1 e x. La funzione g appartiene a $C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$: inoltre, poichè $g(t) \to \pi/2$ per $t \to 0$, essa può essere prolungata con continuità in $t = 0$. Di conseguenza $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$ e si ha quantomeno $f \in C^1(\mathbb{R})$.
Il fatto che sia $g(t) > 0$ per ogni t implica che $f(x) > 0$ se $x < 1$, mentre $f(x) < 0$ se $x > 1$. Naturalmente $f(1) = 0$.
Simmetrie Poichè g è una funzione pari, la funzione $x \mapsto \int_0^x g(t)\,dt$ è dispari. Dunque $f(x) = \int_0^1 g(t)\,dt - \int_0^x g(t)\,dt$ è la differenza tra una costante ed una funzione dispari.
Limiti Poiché $\arctan z \sim z$, per $z \to 0$, si ha $g(t) \sim t^{-2}$, per $|t| \to +\infty$; il criterio del confronto asintotico assicura l'esistenza dei limiti $L_1 = \lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $L_2 = \lim_{x\to-\infty} f(x)$. I due limiti sono legati dalla relazione $L_2 = 2\int_0^1 \arctan(t^{-2})dt - L_1$.
Derivate I e II Per il *Teorema fondamentale del calcolo integrale* si ha $f'(x) = -g(x)$ per ogni $x \neq 0$, ed esiste $f'(0) = -\pi/2$ dato che $f'(x) \to -\pi/2$, per $x \to 0$. Quindi $f'(x) < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e f risulta strettamente decrescente.
Per $x \neq 0$, esiste $f''(x) = \frac{2x}{x^4+1}$; si noti inoltre che $f''(x) \to 0$, per $x \to 0$, che implica l'esistenza di $f''(0)$, con $f''(0) = 0$, assieme alla continuità della derivata seconda. Dal segno di $f''(x)$ si deduce che f è concava in $(-\infty, 0)$ ed è convessa in $(0, +\infty)$, c'è un cambio di concavità in 0 (punto di flesso).

Tracciare il grafico con le informazioni raccolte è, a questo punto, facile.

Breve confronto con il caso $m = 1$ Sia ora $g(t) = \arctan(t^{-1})$. In questo caso $g \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, $g(t) \to \pi/2$ per $t \to 0^+$, mentre $g(t) \to -\pi/2$ per $t \to 0^-$, cioè g è una funzione limitata e continua – dunque l'integrale di g esiste nel senso di Riemann –, ma non estendibile con continuità di $t = 0$. Segue che $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$, e su tale dominio f è solo C^0; si ha poi $f \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$.

Anche in questo caso si può usare l'identità $f(x) = \int_0^1 g(t)\,dt - \int_0^x g(t)\,dt$: a differenza del caso precedente, però, il sottraendo è pari e la differenza tra una costante ed una funzione pari (quindi f) è pari. È dunque sufficiente limitare l'analisi al caso $x \geq 0$.
Per $x > 0$ si ha $f'(x) = -\arctan(x^{-1}) < 0$, per cui f risulta decrescente in $\mathbb{R}^+$ (si ha $f'_+(0) = -\pi/2 \neq f'_-(0) = \pi/2$); inoltre $f''(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$ e quindi f è ivi convessa. Dal fatto che $g(t) \sim t^{-1}$ segue che $f(x) =\to -\infty$ per $x \to +\infty$ (l'integrale improprio è divergente). Per simmetria si deducono le proprietà di f su $(-\infty, 0)$.

Infine, si osservi che nel caso $m = 1$ l'integrale può essere calcolato (per parti) esplicitamente, ottenendo $f(x) = \pi/4 - x\arctan(1/x) + \big(\log 2 - \log(1 + x^2)\big)/2$, con il naturale prolungamento in $x = 0$.

10. Si osserva preliminarmente che da $-1 \leq \cos x \leq 1$ (per ogni x) segue facilmente che le funzioni $f(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}\cos x}$ e $g(x) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}\cos x}$ sono entrambe (positive e) *limitate* nell'intervallo $[-\pi, \pi]$. L'integrale è dunque da intendersi secondo Riemann, e la continuità della funzione integranda $h(x) = f(x) - g(x)$ ne garantisce l'esistenza, mentre la linearità dell'integrale consente di ottenerne il valore come differenza degli integrali di $f(\cdot)$ e $g(\cdot)$ in $(-\pi, \pi)$. Utilizzando anche che $\cos x$ è una funzione pari, si ottiene

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\frac{1}{1+\frac{1}{2}\cos x} - \frac{1}{1-\frac{1}{4}\cos x} \Big)\, dx = 2\int_0^{\pi} \Big(\frac{1}{1+\frac{1}{2}\cos x} - \frac{1}{1-\frac{1}{4}\cos x} \Big)\, dx =$$
$$= 2\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\frac{1}{2}\cos x}\, dx - 2\int_0^{\pi} \frac{1}{1-\frac{1}{4}\cos x}\, dx = 2(I_1 - I_2)\,.$$

Ai fini del computo del valore dell'integrale, si introduce la sostituzione *ad hoc* $t \longmapsto x(t) = 2\arctan t$, appartenente a $C^1(\mathbb{R})$ e invertibile da $\mathbb{R}$ in $(-\pi, \pi)$. Per $x \in (-\pi, \pi)$, si ha

$$t = \tan\Big(\frac{x}{2}\Big)\,, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,,$$

per cui

$$I_1 - I_2 = \int_0^{\infty} \frac{1}{\frac{3+t^2}{2(1+t^2)}}\, \frac{2}{1+t^2}\, dt - \int_0^{\pi} \frac{1}{\frac{3+5t^2}{4(1+t^2)}}\, \frac{2}{1+t^2}\, dt =$$
$$= 4\int_0^{\infty} \frac{1}{3+t^2}\, dt - 8\int_0^{\pi} \frac{1}{3+5t^2}\, dt = \frac{4}{3}\int_0^{\infty} \frac{1}{1+\big(t/\sqrt{3}\big)^2}\, dt -$$
$$- \frac{8}{3}\int_0^{\infty} \frac{1}{1+\big(t/\sqrt{3/5}\big)^2}\, dt =$$
$$= \frac{4}{3}\left[\sqrt{3}\arctan\Big(\frac{t}{\sqrt{3}}\Big) - 2\sqrt{\frac{3}{5}}\arctan\Big(\frac{t}{\sqrt{3/5}}\Big) \right]_0^{\infty} =$$
$$= \frac{4}{3}\Big(\sqrt{3}\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{3}{5}}\frac{\pi}{2} \Big) = 2\pi\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{15}}\,.$$

Si conclude che

$$I = 4\pi\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{15}}\,.$$