I Compitino di Algebra I
23/11/06

Esercizio 1 Nell'insieme $\mathbb{Z}$ si consideri l'operazione $a * b = ab - (a+b) + 2$. Si dica se l'operazione è commutativa, associativa, se ammette elemento neutro e, nel caso l'elemento neutro esista, quali elementi sono invertibili.

Esercizio 2 Facciamo riferimento all'operazione definita nell'esercizio 1. Per ogni elemento a di $\mathbb{Z}$ poniamo $a[0] = 2$ e, se $n \in \mathbb{N}$ è strettamente maggiore di 0, $a[n] = a[n-1] * a$. Dimostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha $a[n] = (a-1)^n + 1$.

Esercizio 3 Sia A un anello e si consideri l'anello $B = A^{\mathbb{Z}}$ con le usuali operazioni. Dimostrare che la funzione $\sigma : B \longrightarrow A$ definita da $\sigma(f) = f(2)$ è un morfismo di anelli. Si dica se σ è iniettiva o suriettiva. Per ogni $f \in B$ definiamo $\overline{f} \in B$ ponendo, per ogni $x \in \mathbb{Z}$, $\overline{f}(x) = f(x+1)$. Dimostrare che la funzione $\theta : B \longrightarrow B$ definita da $\theta(f) = \overline{f}$ per ogni $f \in B$, è un isomorfismo di anelli.

Esercizio 4 Siano D un dominio e A un suo sottoanello. Consideriamo un elemento $\omega \in D$, tale che $\omega^2 - \omega + 1 = 0$. Dimostrare che l'insieme $B = \{x + y\omega \mid x, y \in A\}$ è un sottoanello di D contenente A. Supponiamo ora che $\{a\omega \mid a \in A\} \cap A = \{0\}$. Provare che porre $\pi(x + y\omega) = x$ definisce una funzione $\pi : B \longrightarrow A$. Dimostrare che, se I è un ideale di B, allora $\pi(I) = \{\pi(r) \mid r \in I\}$ è un ideale di A. Usare questo fatto per provare che, se A è un campo, allora anche B è un campo.

Esercizio 5 Siano A un anello commutativo ed M un suo ideale. Supponiamo che, se J è un ideale tale che $M \subseteq J$, allora $J = M$ o $J = A$. Dimostrare che, se $a, b \in A$ e $ab \in M$, allora $a \in M$ o $b \in M$.