

I Compitino di Algebra

13/11/03

Esercizio 1 Dimostrare che, per ogni numero reale $0 < a < 1$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$, si ha

$$(1 - a)^n < \frac{1}{1 + na}$$

Esercizio 2 Si trovino le soluzioni della congruenza $25x \equiv 10 \pmod{15}$.

Esercizio 3 Si consideri in \mathbb{Z} l'operazione definita da

$$a * b = 2(a + b - 1) - ab.$$

Si dica se l'operazione è associativa, commutativa e se ammette elemento neutro. Se l'elemento neutro esiste si dica quali elementi ammettono inverso.

Esercizio 4 Dato un anello A se ne consideri un suo sottoinsieme S . Definiamo $C(S) = \{x \in A \mid xs = sx \text{ per ogni } s \in S\}$. Dimostrare che $C(S)$ è un sottoanello di A . Trovare $C(\emptyset)$.

Esercizio 5 Sia A un anello e si consideri un suo sottoanello B . Provare che se I è un ideale destro di A allora $J = \{b \in B \mid xb = 0 \ \forall \ x \in I\}$ è ideale bilatero di B .

Esercizio 6 Siano A un anello commutativo ed I un suo ideale tale che, se J è un ideale diverso da A , allora $J \subseteq I$. Dimostrare che ogni elemento di $A \setminus I$ è invertibile. Se p è un primo di \mathbb{Z} , si dimostri che l'anello $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ possiede un ideale I con la proprietà descritta sopra.