Secondo compitino
Algebra 1
A.A. 2012/2013

Esercizio 1 Nell'anello $\mathbb{Z}$ si definisca l'operazione $\odot$, ponendo per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$

$$a \odot b := a + b + ab.$$

Dire se $\odot$ è associativa/commutativa e se ammette elemento neutro.
Trovare gli elementi invertibili di $\mathbb{Z}$ rispetto $\odot$.

Esercizio 2 Sia ω un numero complesso tale che $\omega^2 + \omega + 5 = 0$ e sia

$$\mathbb{Z}[\omega] = \{a + b\omega |\, a, b \in \mathbb{Z}\}\,.$$

1. Provare che $\mathbb{Z}[\omega]$ è , rispetto alle usuali operazioni di $\mathbb{C}$, un anello.
2. Per ogni $z \in \mathbb{Z}$ si ponga $\overline{z} = z + 2\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Provare che l'applicazione definita da

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{Z}[\omega] &\longrightarrow M\big(2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\big) \\ a + b\omega &\longmapsto \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{b} & \overline{a} + \overline{b} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   definisce un omomorfismo di anelli.
3. Trovare $\ker(\varphi)$ e la cardinalità di $\mathbb{Z}[\omega]/\ker(\varphi)$.
4. Dire quanti elementi invertibili possiede l'anello $\mathbb{Z}[\omega]/\ker(\varphi)$.

Esercizio 3 Sia R il seguente sottoanello di $M(2, \mathbb{Z})$

$$R := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} |\, a \in \mathbb{Z},\, b \in 2\mathbb{Z} \right\}.$$

1. Mostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, e ogni $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in R$: $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$.

2. Provare che il sottoinsieme $I := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x \in 36\mathbb{Z} \right\}$ è un ideale di R.

3. Dire se R/I possiede elementi nilpotenti. In caso affermativo, trovarli.

Esercizio 4 Sia S un insieme non vuoto e indichiamo con Ω l'anello booleano $(\mathcal{P}(S), +, \cdot)$ (ricordiamo che $+$ indica la differenza simmetrica e $\cdot$ l'intersezione). Provare quanto segue

1. Ogni elemento di Ω, diverso dallo zero e dall'unità, è un divisore dello zero.

2. L'ideale principale generato da un arbitrario elemento $X \in \Omega$ è $\langle X \rangle = \mathcal{P}(X)$.

3. Se X è un arbitrario elemento di Ω, mostrare che

$$\Gamma = \{Y \in \Omega | \, X \cdot Y = 0_\Omega\}$$

è un ideale principale di Ω.