Terzo compitino di Algebra 1
A.A. 2015-16

Esercizio 1 *(7 punti) Provare che* $I = \left\{ f(x) \in \mathbb{Q}[x] | f(1/3) = f(\sqrt{2}) = 0 \right\}$ *è un ideale di* $\mathbb{Q}[x]$. *Determinare un generatore per* I *e tutti gli ideali di* $\mathbb{Q}[x]/I$.

Esercizio 2 *(8 punti) Si considerino i seguenti anelli*

$$A = \frac{\mathbb{R}[x]}{\langle x^2 - 1 \rangle}, \quad B = \frac{\mathbb{R}[x]}{\langle x^2 + x + 1 \rangle}, \quad C = \frac{\mathbb{R}[x]}{\langle x^2 + 4x + 4 \rangle}.$$

Dire, motivando la risposta, se tra questi ci sono coppie di anelli isomorfi.

Esercizio 3 *(10 punti) Sia* p *un numero primo positivo. Si consideri il seguente polinomio a coefficienti in* $\mathbb{Z}_p$

$$f_p = x^{p^2} + x^{2p-1} + 1 \in \mathbb{Z}_p[x].$$

1. *Provare che* f_p *ha almeno una radice in* $\mathbb{Z}_p$ *per ogni* $p \neq 2$.
2. *Provare che* f_2 *è irriducibile.*
3. *Determinare la cardinalità di* $\frac{\mathbb{Z}_2[x]}{\langle f_2 \rangle}$ *e l'inverso di* $x + \langle f_2 \rangle$.

Esercizio 4 *(8 punti) Nell'anello* $\mathbb{Z}[i]$ *siano* $\alpha = 2 + 6i$ *e* $\beta = 5 - 5i$.

1. *Determinare* γ *un* $MCD(\alpha, \beta)$.
2. *Provare che* $\langle \gamma \rangle = \{3a + b + i(-a + 3b) | a, b \in \mathbb{Z}\}$.
3. *Dire, motivando la risposta, se* $\frac{\mathbb{Z}[i]}{\langle \gamma \rangle}$ *è un campo.*