1.1 Problemi

P.1.1.
Una particella si sposta da A(1,2,3) a B(1,3,1). Si determinino i vettori posizione iniziale e finale rispetto all'origine e l'espressione del vettore spostamento.

P.1.2.
Dati due punti in un piano cartesiano:

$$A(1,1,1)\,, \quad B(2,-1,3)$$

si determini l'espressione del versore **u** che individua la direzione ed il verso del vettore (B-A) che congiunge i suddetti punti.

P.1.3.
Dati i due vettori

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{u}_x - \frac{1}{2}\mathbf{u}_y\,, \quad \mathbf{v}_2 = -\sqrt{2}\mathbf{u}_x + 2\mathbf{u}_y$$

si calcolino:
(i) il vettore somma $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$;
(ii) il prodotto scalare $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$;
(iii) il prodotto vettoriale $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$;
(iv) la componente del vettore $\mathbf{w} = 3\mathbf{u}_x - 2\mathbf{u}_y$ nella direzione e verso del vettore somma determinato al punto (i).

P.1.4.
Si determini l'angolo compreso tra i due vettori:

$$\mathbf{v}_1 = 3\mathbf{u}_x + 4\mathbf{u}_y - 5\mathbf{u}_z$$
$$\mathbf{v}_2 = -\mathbf{u}_x + 2\mathbf{u}_y + 6\mathbf{u}_z$$

P.1.5.
Si calcoli il prodotto vettoriale tra gli stessi due vettori dell'esercizio precedente.

P.1.6.
Si determini il modulo quadro del vettore somma $|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2|^2$ dei due vettori del problema P.1.4 e si verifichi la seguente relazione:

$$|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2|^2 = |\mathbf{v}_1|^2 + |\mathbf{v}_2|^2 + |\mathbf{v}_1||\mathbf{v}_1| \cos\vartheta \,,$$

dove ϑ è l'angolo compreso tra i due vettori.

P.1.7.
Si determini l'espressione di un vettore $\mathbf{v}_3$ di modulo pari a 5 e con direzione ortogonale ai seguenti due vettori:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= 2\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y - 3\mathbf{u}_z \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{u}_x - 2\mathbf{u}_y + \mathbf{u}_z \end{aligned}$$

P.1.8.
Dati due vettori:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= 4\mathbf{u}_x + 2\mathbf{u}_y - 7\mathbf{u}_z \\ \mathbf{v}_2 &= 3\mathbf{u}_x - 3\mathbf{u}_y + \mathbf{u}_z \end{aligned}$$

si determini la componente z del seguente vettore:

$$\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{u}_x - \mathbf{u}_y + z\mathbf{u}_z \,,$$

affinché i tre vettori siano complanari.

P.1.9.
Si calcoli la derivata dei seguenti vettori rispetto al parametro t:
(i) $\mathbf{v}_1 = t\,\mathbf{u}_x + \sqrt{3}t\,\mathbf{u}_y$;
(ii) $\mathbf{v}_2 = \cos t\,\mathbf{u}_x + \sin t\,\mathbf{u}_y$.
Si determini inoltre la quantità:

$$\int_0^a [\mathbf{v}_1(t) - \mathbf{v}_2(t)]\ dt.$$