

Università degli Studi di Firenze
Facoltà di Scienze Mat., Fis. e Nat.
Corso di Laurea in Matematica

Appunti del corso di Laboratorio di Fisica 1
Anno Accademico 2008-2009

Prof. Andrea Stefanini

Appunti su:

VERIFICA DELLA LEGGE DI BOYLE e MARIOTTE

La legge di Boyle e Mariotte fu enunciata per la prima volta da Robert Boyle (1627-1691) che nel 1662 pubblicò “A Defence of the Doctrine Touching the Spring and Weight of the Air”. Questa legge venne formulata in modo più preciso da Edme Mariotte (1620-1684) nel 1676, che, confermando i dati di Boyle, specificò che la legge vale soltanto se la temperatura del gas è costante.

La legge afferma che, in una trasformazione quasi-statica a temperatura costante, la pressione di un gas è inversamente proporzionale al suo volume, ovvero in formule

$$PV = C \quad (a T \text{ costante}) \quad (1)$$

dove P è la pressione del gas che occupa il volume V e C è una costante (direttamente proporzionale alla quantità di gas utilizzato).

La legge è rigorosamente valida per un gas le cui condizioni siano assimilabili a quelle di un gas perfetto e quindi può essere verificata sperimentalmente per temperature molto maggiori di quella critica del gas utilizzato e per gas molto rarefatti.

L'apparecchio disponibile in laboratorio (vedi Fig.1) è costituito da un cilindro graduato in cm, dentro il quale scorre un pistone P a tenuta, che può essere manovrato tramite una manopola esterna E connessa ad esso, attraverso un passante, con una vite millimetrica (il cui passo è 3 mm).

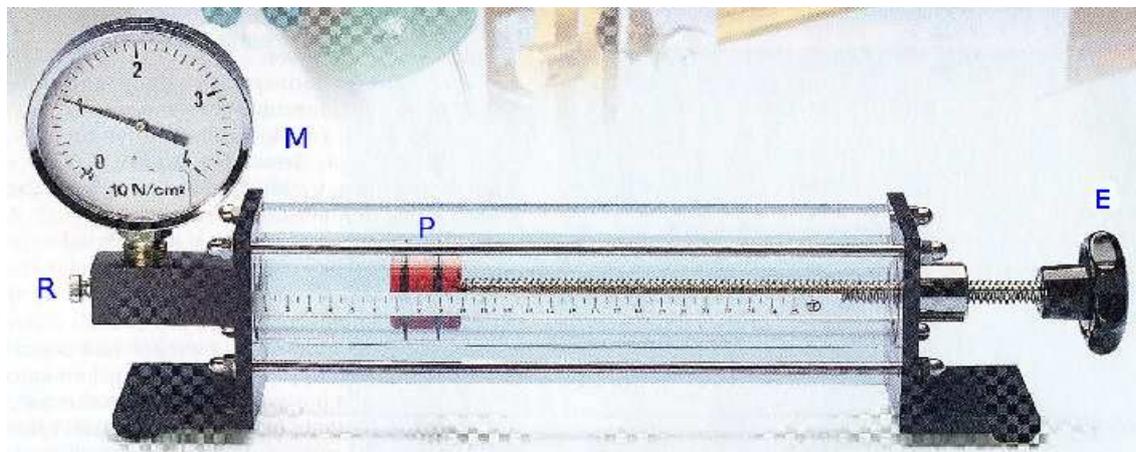


Figura 1:

Il gas utilizzato nella misura è l'aria; la sua pressione P dentro al cilindro è misurata da un manometro M . Il rubinetto R consente di mettere in comunicazione l'interno del cilindro con l'ambiente esterno.

Prima di iniziare l'esperienza è importante stimare a priori gli errori su P , dovuto essenzialmente alla sensibilità del manometro, e su V , sapendo che il cilindro ha un diametro

interno di $D = (4.00 \pm 0.01)$ cm. In tal modo, volendo verificare la legge in un ambito di pressioni variabile tra il doppio e la metà della pressione atmosferica, si potrà scegliere il valore del volume iniziale (V_0) dal quale iniziare la misura per minimizzare l'incertezza finale.

La successiva procedura di misura può essere riassunta nei seguenti punti:

- Con il rubinetto R aperto si porti, ruotando la manopola E, il pistone alla posizione del volume iniziale V_0 precedentemente scelto.
- Chiudere il rubinetto e registrare i valori iniziali di pressione P_0 e volume V_0 . Si legga anche il valore P_{atm} della pressione atmosferica indicata dal barometro a mercurio di Fortin presente in laboratorio; tale strumento permette infatti di ottenere un valore $P_0 = P_{atm}$ molto più preciso di quello misurato dal manometro M.
- Spostare quindi il pistone P (per esempio di 1 cm) nella direzione in cui il volume dell'aria nel cilindro viene diminuito e leggere il nuovo valore di P . Tale operazione deve essere fatta "lentamente" in modo da poter mantenere costante la temperatura del gas all'interno del cilindro, profittando del fatto che il cilindro è un buon conduttore e che l'aria dell'ambiente esterno agisce da termostato.
- Eseguire altre misure simili, comprimendo ulteriormente l'aria all'interno, fino a raggiungere un valore di P pari a circa il doppio del valore iniziale.
- Tornare quindi ai valori iniziali di pressione e volume e controllare che anche la pressione torni al valore iniziale
- Aprire e richiudere il rubinetto per assicurare di essersi riportati nelle condizioni iniziali.
- Fare alcune misure per valori di P inferiori alla pressione atmosferica (aumentando il volume occupato dall'aria dentro il cilindro), fino a raggiungere un valore di P pari a circa la metà del valore iniziale.
- All'inizio e alla fine della procedura di misura sopra riportata si registri la temperatura ambiente con il termometro disponibile in laboratorio.

La procedura sopra illustrata comporta la misura di diverse coppie di valori (P_i, V_i) , corrispondenti a differenti condizioni del gas nel cilindro. Le caratteristiche costruttive dell'apparato creano tuttavia un problema per quanto riguarda i valori V_i del volume del gas. La scala graduata all'interno del cilindro indica infatti la distanza h della posizione del pistone rispetto a quella di "battuta" nel cilindro e quindi la determinazione del volume dalle misure di h e D si riferisce solo a una parte del volume, che indicheremo in seguito con V_m , occupato dal gas nel cilindro, senza considerare ad esempio il volume

che il gas occupa nella connessione con il manometro e la non perfetta planarità della superficie del pistone. Per tener conto di tale contributo e non incorrere in un errore di misura sistematico è necessario riscrivere la legge di Boyle e Mariotte nella forma

$$PV = P(V_m + V_x) = C \quad (a \ T \ costante) \quad (2)$$

dove V_x è il volume incognito aggiuntivo rispetto a quello misurato V_m .

La complicazione dovuta alla presenza del termine incognito V_x implica che l'esperienza dovrà essere condotta in due passi: il primo passo mirato alla miglior determinazione di V_x e il secondo mirato ad una più precisa verifica della legge di Boyle e Mariotte. La necessità di operare in due passi diversi è dovuta al fatto che le condizioni migliori per la determinazione di V_x (quelle per cui il volume totale del gas nel cilindro $V_m + V_x$ è confrontabile con V_x) non sono quelle ottimali per la verifica della legge di Boyle e Mariotte (condizioni determinate inizialmente con la scelta del miglior valore di V_0).

Per la miglior determinazione di V_x si eseguiranno i primi quattro passi della procedura sopra elencata, partendo da un valore del volume corrispondente ad $h = 7 \text{ cm}$ e spostando il pistone a passi di 0.5 cm nella direzione che diminuisce il volume occupato dal gas. La relazione (2) può essere utilmente riscritta nella forma:

$$V_m = \frac{C}{P} - V_x \quad (a \ T \ costante)$$

In base a tale relazione si può riportare in grafico i valori di V_m in funzione dei corrispondenti valori della grandezza $1/P$ e verificare la legge di Boyle e Mariotte controllando la consistenza dei dati con un andamento lineare. Dal fit grafico di tale andamento si potranno determinare le migliori stime (con incertezza) delle incognite C e V_x .

Con il valore di V_x così determinato è possibile ora realizzare la verifica più precisa della legge di Boyle e Mariotte, partendo dalle condizioni iniziali ottimali determinate a priori (V_0). Si eseguiranno quindi tutti i passi della procedura elencata e con le coppie di dati (P_i, V_i) , dove i V_i contengono già il termine aggiuntivo V_x , si potrà verificare la legge di Boyle e Mariotte (1) accertando la consistenza delle coppie di valori in $\ln P$ e $\ln V$ con un andamento lineare avente pendenza unitaria. Eseguendo poi il fit grafico di tale andamento si potrà anche determinare la miglior stima (con incertezza) dell'incognita C .

Dal valore di C ottenuto si ricava, tenendo conto che dalla legge dei gas perfetti, $C = nRT$ dove $R = 8.314510 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ (utilizzare le cifre significative necessarie!) e T la temperatura del gas in K , il numero delle moli n che costituiscono il nostro campione di gas con la relativa incertezza di misura Δn .

Il valore ottenuto $n \pm \Delta n$ può essere confrontato con quello ottenibile dividendo il nostro volume a pressione ambiente $V_0 + V_x$ per il volume molare di un gas perfetto in condizioni analoghe di temperatura e pressione $V_m(T)$. Ricordando che, per la legge di Gay-Lussac, $V_m(T) = V_{0m} \alpha T$, dove $V_{0m} = 22.414 \text{ dm}^3$ è il volume molare di un gas perfetto in condizioni standard ($T = 273.15 \text{ K}$ e $P = 100 \text{ kPa}$) e $\alpha = (1/273.15) \text{ K}^{-1}$, si valuti se, tenendo conto dell'incertezza con cui è stato misurato $V_0 + V_x$, per operare il confronto è necessario utilizzare il valore $V_m(T)$ oppure se è sufficiente usare quello di V_{0m} . Come ulteriore controllo del risultato sperimentale ottenuto per $n \pm \Delta n$ lo si confronti con quello ricavabile direttamente dall'equazione di stato dei gas perfetti, utilizzando solo il valore del volume iniziale $V_0 + V_x$ e il valore della pressione atmosferica P_{atm} misurato con il barometro di Fortin nella relazione

$$n = \frac{(V_0 + V_x) \cdot P_{atm}}{RT}$$

Con il valore misurato di n si stimi infine la massa e il numero delle molecole d'aria introdotte inizialmente nell'apparecchio, sempre con le relative incertezze, tenendo conto che la densità dell'aria nelle condizioni tipiche di misura in laboratorio è 1.20 kg/m^3 e che il numero di Avogadro è $N_0 = 6.022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.