

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI FIRENZE
Facoltà di Scienze M.F.N.
Corso di Laurea in Fisica

Prof. Oscar Adriani

Prof. Andrea Stefanini

**Appunti aggiuntivi al corso di
ESPERIMENTAZIONI I**

**MISURA DELLA DENSITÀ RELATIVA DI UN SOLIDO E DI UN LIQUIDO
MEDIANTE BILANCIA ELETTRONICA DI PRECISIONE**

Anno Accademico 2009-2010

1 Introduzione

Si definisce **densità media assoluta** δ di un corpo il rapporto tra la sua massa ed il suo volume. Nel S.I. la sua unità di misura è il kg/m^3 mentre nel c.g.s. è il g/cm^3 ($1 kg/m^3 = 10^{-3} g/cm^3$).

Si definisce poi **peso specifico assoluto** p_a di un corpo il rapporto tra il suo peso ed il suo volume. Nel S.I. la sua unità di misura è il N/m^3 mentre nel c.g.s. è la $dyne/cm^3$ ($1 N/m^3 = 10^{-1} dyne/cm^3$).

In ogni sistema di unità di misura vale la relazione

$$p_a = g \cdot \delta$$

dove g è il modulo dell'accelerazione di gravità.

Si definisce **peso specifico relativo** p_r di un corpo il rapporto tra il suo peso ed il peso di una quantità di acqua distillata avente lo stesso volume ed una temperatura di $3.98^\circ C$. Tale grandezza è adimensionale e, se i due pesi sono misurati in uno stesso luogo, coincide numericamente con la **densità relativa** δ_r , definita dal rapporto delle densità medie assolute del corpo e dell'acqua. Alla temperatura di riferimento ($3.98^\circ C$) la densità assoluta dell'acqua presenta un massimo piuttosto piatto e quindi un'eventuale incertezza nella determinazione della temperatura ha un effetto ridotto sulla misura di δ_r .

La misura di δ_r prevede l'utilizzo di una bilancia elettronica di precisione, mediante la quale è possibile, con opportune procedure, ottenere la misura delle masse di vari corpi e confrontarle tra loro. Nei successivi paragrafi daremo una descrizione della bilancia e del suo funzionamento, studiando poi le possibili procedure sperimentali al fine di scegliere quella che permette una misura più precisa.

2 La bilancia elettronica



Figura 1: Bilancia elettronica disponibile in laboratorio

La bilancia elettronica di precisione disponibile in laboratorio (modello PCB 1000-2 prodotta dalla KERN & Sohn GmbH), è mostrata in Fig.1; essa è costituita essenzialmente da un piatto porta-oggetti collegato ad un sensore di pressione che fornisce su un display digitale la misura del peso dell'oggetto poggiato sul piatto. Nella parte frontale della bilancia sono disponibili, oltre al display digitale, 5 tasti attraverso i quali è possibile selezionare le modalità di uso della bilancia stessa. La funzione di ciascuno dei tasti è riportata di seguito:

- Tasto **ON/OFF** - Accensione/spengimento della bilancia
- Tasti **PRINT**, **MODE/CAL** e **SET/M** - Selezione delle modalità di funzionamento della bilancia, quali la scelta dell'unità di misura, la taratura della bilancia, la possibilità di realizzare misure di massa relative ed altre.
- Tasto **TARE** - Azzeramento del display in presenza di una tara agente sul sensore di pressione, ivi compresa quella dovuta al piattello porta-oggetti.

Vogliamo sottolineare che, al fine di tener conto delle possibili variazioni dell'accelerazione di gravità g nello spostamento da un luogo di misura ad un altro, la bilancia deve essere ricalibrata ad ogni spostamento, utilizzando un corpo di massa nota fornito dal costruttore¹.

Per calibrare la bilancia, premere il tasto **MODE/CAL**; sul display compare prima la scritta **CAL** e poi **1 kg**. Poggiare il corpo da 1 kg fornito dal costruttore sul piattello porta-oggetti della bilancia e, dopo qualche secondo, premere il tasto **SET/M** per inserire nella memoria della bilancia il valore scritto. Attendere qualche secondo: la bilancia passa alla modalità di pesata e si può verificare se la massa dell'oggetto posato sul piattello viene effettivamente misurata come 1 kg. Se ciò non dovesse avvenire, ripetere la procedura di calibrazione.

Le caratteristiche principali della bilancia, come riportate dal costruttore, sono riassunte nella successiva tabella:

divisione	portata	riproducibilità	linearità	prontezza
0.01 g	1000 g	0.01 g	± 0.03 g	3 s

La **divisione** indica la minima variazione della massa che la bilancia è in grado di segnalare.

La **portata** corrisponde al massimo valore della massa che può essere poggiata sul piattello per avere una misura affidabile e non rischiare di danneggiare la bilancia.

La **riproducibilità** quantifica il contributo alla incertezza di misura dovuto alle fonti accidentali di errore insite nel funzionamento della bilancia.

La **linearità** è la massima differenza tra il valore della massa indicato dalla bilancia e il valore vero.

La **prontezza** corrisponde all'intervallo di tempo caratteristico che la bilancia impiega per raggiungere una condizione di equilibrio statico dopo che sul piattello è stata appoggiata una massa.

L'errore di misura sulla massa è la somma degli errori di linearità e di riproduzione.

Il costruttore raccomanda infine di posizionare l'oggetto sul piattello porta-oggetti in una posizione che disti dal centro meno di un quarto della diagonale del piattello stesso, al fine di evitare effetti sistematici superiori alle precisioni dichiarate.

¹La bilancia misura in pratica la forza peso agente sull'oggetto posato sul piatto ma, con tale calibrazione e con le procedure di taratura che verranno esposte nel seguito, la misura di peso viene riportata a quella della massa.

3 Verifica della linearità della bilancia

La prima operazione richiesta allo studente in laboratorio è quella di controllare la linearità della bilancia. A tal fine è disponibile una serie di masse campione, il cui valore viene fornito con incertezza pari a 0.001 g , che opportunamente combinate permettono la verifica in un ambito di masse tra 0 e 500 g . Lo studente è invitato a combinare le masse in modo da avere almeno una decina di masse equamente distribuite in tutto l'ambito di interesse² e a verificare per via grafica la linearità dichiarata dal costruttore.

Come conseguenza dell'utilizzo di masse campione, la taratura eseguita permetterà di associare ad ogni oggetto posato sul piattello porta-oggetti il valore della sua massa, svincolando quindi le successive misure dal valore dell'accelerazione di gravità locale. A seguito della taratura la bilancia si è quindi trasformata in uno strumento di misura di massa e come tale verrà usato nel seguito dell'esperienza.

4 Misura della densità relativa di un corpo solido

Una prima misurazione della densità relativa di un corpo solido può essere ottenuta dalla misura del suo volume, usando un calibro, e della sua massa con la bilancia elettronica. Si otterrà così un primo risultato, con relative unità di misura ed incertezza, che potrà essere utilizzato nella stima a priori dell'incertezza sulla successiva misura e confrontato con il valore sperimentale finale, discutendone la compatibilità.

Un altro metodo per misurare la densità relativa δ_r di un corpo solido è quello di utilizzare la bilancia elettronica di precisione ed un **picnometro** del tipo di quello mostrato in Fig.2. Esso è essenzialmente costituito da una boccetta di vetro avente un tappo conico smerigliato che si adatta perfettamente al collo della boccetta e in cui è stata realizzata una

scanalatura centrale (capillare) molto sottile per la regolazione fine, tramite un segno di affioramento, del livello del liquido al suo interno.

Con tali strumenti a disposizione si possono individuare due diverse procedure di misure di massa con la bilancia che permettono di determinare (indirettamente) la densità relativa.

La prima procedura prevede la seguente serie di misure di massa:

- si pone sul piattello porta-oggetti il corpo di massa incognita e se ne misura la massa che indicheremo con M_1 ;
- sul piattello porta-oggetti si aggiunge al corpo di massa incognita il picnometro riempito di acqua fino al segno di affioramento e se ne misura la massa che indicheremo con M_2 ;
- si inserisce il corpo di massa incognita all'interno del picnometro e, dopo aver riportato il livello dell'acqua al segno

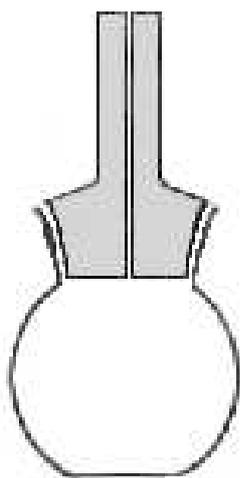


Figura 2: Picnometro

²L'ambito di interesse corrisponde all'intervallo di valori di masse nel quale verranno effettuate le misure. Come sarà descritto nei par. 4 e 5, normalmente tale ambito non supera i 100 g .

di affioramento, lo si pone sul piattello della bilancia misurandone la massa che indicheremo con M_3 .

Dalla definizione di densità relativa δ_r (cfr. par.1) segue immediatamente che

$$\delta_{rm} = \frac{M_1}{M_2 - M_3} \quad (1)$$

essendo, sulla base delle nostre misure, M_1 la massa del corpo di massa incognita e $M_2 - M_3$ la massa di una quantità di acqua avente lo stesso volume del corpo.

È stato aggiunto a δ_r il pedice m per evidenziare che la (1) rappresenta la densità relativa misurata sperimentalmente per via indiretta.

La seconda procedura prevede la seguente serie di misure di massa:

- si pone sul piattello porta-oggetti il picnometro riempito di acqua fino al segno di affioramento e se ne misura la massa che indicheremo con M_a ;
- sul piattello porta-oggetti si aggiunge al picnometro riempito di acqua il corpo di massa incognita e si misura la massa che indicheremo con M_b (coincidente con la massa M_2 del primo metodo);
- si inserisce il corpo di massa incognita all'interno del picnometro e, dopo aver riportato il livello dell'acqua al segno di affioramento, lo si pone sul piattello della bilancia misurandone la massa che indicheremo con M_c (coincidente con la massa M_3 del primo metodo).

Dalla definizione di densità relativa δ_r (cfr. par.1) segue immediatamente che

$$\delta_{rm} = \frac{M_b - M_a}{M_b - M_c} \quad (2)$$

essendo, sulla base delle nostre misure, $M_b - M_a$ la massa del corpo di massa incognita e $M_b - M_c$ la massa di una quantità di acqua avente lo stesso volume del corpo.

Ambedue le procedure portano alla misura indiretta della densità relativa e la scelta tra l'una o l'altra deve essere dettata dalla maggiore precisione raggiungibile nel risultato finale. Lo studente dovrà quindi, sulla base delle incertezze note a priori e dei valori approssimati delle masse in esame (ottenibili eventualmente tramite una misura di prima approssimazione), determinare quale delle due procedure porterà ad un risultato finale più preciso, realizzando poi l'esperienza con la procedura migliore.

Qualsiasi sia la procedura utilizzata, la densità relativa così ottenuta è però riferita all'acqua a temperatura ambiente e non, come riportato nella definizione di par.1, all'acqua a $3.98\text{ }^\circ\text{C}$. Dobbiamo quindi correggere il risultato per un fattore $f(T)$ che tiene conto della variazione della densità dell'acqua con la temperatura T . Nella tabella di seguito

riportata sono elencati i valori della densità dell'acqua δ_A a varie temperature T .

T	$0^\circ C$	$3.98^\circ C$	$5^\circ C$	$10^\circ C$	$15^\circ C$	$20^\circ C$	$25^\circ C$	$30^\circ C$
δ_A (g/cm^3)	0.99984	0.99997	0.99997	0.99970	0.99910	0.99821	0.99705	0.99565

Il fattore correttivo $f(T)$ è dato dalla densità relativa dell'acqua alla temperatura di misura, ovvero dal rapporto $\delta_A(T)/\delta_A(3.98^\circ C)$. Un ulteriore fattore correttivo f_{Arch} deve essere introdotto per tener conto delle spinte di Archimede (vedi Appendice) e quindi la densità relativa del nostro corpo sarà data da

$$\delta_r = \delta_{rm} \cdot f(T) \cdot f_{Arch} \quad (3)$$

Si deve tener conto delle correzioni solo nel caso in cui il loro contributo al risultato finale sia significativo rispetto all'incertezza relativa con cui si è misurato δ_{rm} . In caso contrario δ_r è dato direttamente dalla (1) o dalla (2).

Concludiamo con alcune considerazioni essenziali per la buona riuscita della misura. Lo studente deve fare particolare attenzione a

- eseguire tutte le operazioni centrando gli oggetti rispetto al piattello della bilancia;
- non porre sul piattello corpi la cui massa superi la portata della bilancia, pari a 1000 g;
- eliminare, aiutandosi anche con la siringa, eventuali bolle d'aria nel picnometro ogni volta che si effettua il riempimento con acqua;
- eseguire la regolazione fine del livello dell'acqua nel picnometro utilizzando la siringa;
- dopo il riempimento del picnometro asciugare accuratamente la sua superficie esterna;
- controllare che il livello dell'acqua nel picnometro non vari apprezzabilmente³ durante le misure rispetto al livello di affioramento;
- ripetere più volte (3-4) le misure di massa riposizionando gli oggetti sul piattello in modo da ottenere la miglior stima delle masse e della loro incertezza di misura;
- determinare l'incertezza su δ_r propagando l'incertezza di misura delle grandezze misurate direttamente.

³L'avverbio "apprezzabilmente" sta a significare "in modo da produrre un errore sistematico non trascurabile rispetto alle altre incertezze in gioco"; lasciamo allo studente di valutare, dopo aver misurato il diametro del foro centrale del tappo del picnometro, quale è la massima variazione di livello accettabile.

5 Misura della densità relativa di un liquido

Per misurare la densità relativa δ_r di un liquido si eseguono le misure di massa con la bilancia nelle seguenti configurazioni:

- si pone sul piattello il picnometro vuoto, misurandone la massa che indicheremo con M_1 ;
- si riempie il picnometro di acqua fino al segno di affioramento e lo si pone sul piattello, misurandone la massa che indicheremo con M_2 ;
- si vuota il picnometro, lo si asciuga con il phon ad aria ambiente e, dopo averlo riempito con il liquido di interesse fino al segno di affioramento, lo si pone sul piattello della bilancia, misurandone la massa che indicheremo con M_3 .

Dalla definizione di densità relativa δ_r (cfr. par.1) segue immediatamente che

$$\delta_{rm} = \frac{M_3 - M_1}{M_2 - M_1} \quad (4)$$

essendo, sulla base delle nostre misure, $M_3 - M_1$ la massa del liquido di interesse contenuto nel picnometro ed $M_2 - M_1$ la massa di una quantità di acqua avente lo stesso volume. Anche in questo caso si deve tener conto delle correzioni per la dipendenza dalla temperatura e per le spinte di Archimede solo se il loro contributo al risultato finale è significativo rispetto all'incertezza con cui si è misurato δ_{rm} . In caso contrario δ_r è dato direttamente dalla (4). Valgono infine anche in questo caso le raccomandazioni elencate nel paragrafo precedente.

Appendice

Spinte di Archimede

Nella trattazione riportata nei paragrafi precedenti abbiamo ipotizzato che sui corpi presi in esame agissero esclusivamente le loro forze peso. In realtà dovremo tenere in considerazione anche le spinte di Archimede dovute al fatto che i corpi sono immersi in un fluido pesante (l'aria nel nostro caso ⁴). Per tale motivo nelle considerazioni enunciate per la bilancia elettronica dovremo sostituire al modulo della forza peso Mg il modulo della differenza tra la forza peso e la spinta di Archimede S_{Mg} , che può essere espressa nella forma

$$S_{Mg} = M_a \cdot g = V_M \cdot \delta_a \cdot g = \frac{M}{\delta_M} \cdot \delta_a \cdot g \quad (5)$$

dove V_M è il volume occupato dal corpo e δ_M e δ_a sono le densità del corpo e dell'aria. La spinta di Archimede non è altro che il peso di una quantità di aria (M_a) avente lo stesso volume del corpo.

L'introduzione di tale forza modifica corrispondentemente i valori delle masse misurate dalla bilancia elettronica per un fattore dato da

$$\sigma_M = V_M \cdot \delta_a = \frac{M}{\delta_M} \cdot \delta_a \quad (6)$$

con $\sigma_M = S_{Mg}/g$.

Conseguentemente nelle formule ottenute per la densità relativa viene introdotto un fattore correttivo f_{Arch} che valuteremo nel caso della prima procedura utilizzabile per il corpo solido, lasciando allo studente il compito di determinare l'analoga relazione nel caso della seconda procedura per il solido e nel caso del liquido.

Indicando con:

- B la massa del picnometro riempito con acqua fino al segno di affioramento e V il suo volume,
 - X la massa del corpo solido, V_X il suo volume e $\delta_X = X/V_X$ la sua densità,
 - A la massa dell'acqua fuoriuscita al momento dell'introduzione del corpo solido nel picnometro ($V_A = V_X$) e $\delta_A = A/V_A$ la sua densità,
- per ciascuna delle singole misure avremo quindi:

- $M_1 = X - \sigma_X = X - \delta_a \cdot V_X$
- $M_2 = B + X - \sigma_B - \sigma_X = B + X - \delta_a \cdot (V + V_X)$
- $M_3 = (B - A) + X - (\sigma_B - \sigma_A) - \sigma_X = (B - A) + X - \delta_a \cdot (V - V_A + V_X)$

Dalla prima relazione, ricordando $\delta_X = X/V_X$, si ottiene subito:

⁴Lo studente può facilmente verificare che la spinta di Archimede sul campione immerso nell'acqua del picnometro non dà alcun contributo nelle misure

- $M_1 = X - \frac{X}{\delta_X} \cdot \delta_a = X \cdot \left(1 - \frac{\delta_a}{\delta_X}\right)$

Ricordando poi che $\delta_A = A/V_A$ e che $V_A = V_X$, sottraendo la terza alla seconda si ottiene:

- $M_2 - M_3 = A - \delta_A \cdot V_X = A \cdot \left(1 - \frac{\delta_a}{\delta_A}\right)$

La densità relativa di interesse è data dal rapporto $\delta_r = X/A$ e quindi possiamo ricavare X e A da tali relazioni per ottenere δ_r . Sviluppando al primo ordine la relazione ricavata, si ottiene

$$\delta_r = \frac{X}{A} \simeq \frac{M_1}{M_2 - M_3} \cdot \left(1 + \frac{\delta_a}{\delta_X} - \frac{\delta_a}{\delta_A}\right) \quad (7)$$

Abbiamo quindi che il fattore correttivo è dato da

$$f_{Arch} = \left(1 + \frac{\delta_a}{\delta_X} - \frac{\delta_a}{\delta_A}\right) \quad (8)$$

Il contributo dovuto al fattore correttivo sarà quindi tanto maggiore quanto più differiranno tra loro δ_X e δ_A .

Nella tabella seguente sono riportati i valori della densità dell'aria δ_a alla pressione atmosferica e a varie temperature T :

T	$0^\circ C$	$5^\circ C$	$10^\circ C$	$15^\circ C$	$20^\circ C$	$25^\circ C$	$30^\circ C$
δ_a (kg/m^3)	1.293	1.269	1.247	1.225	1.204	1.184	1.165

Tenendo conto dell'unità di misura, si vede che la correzione è comunque abbastanza piccola e si può inoltre trascurare, alle pressioni che ci interessano, l'ulteriore dipendenza di δ_a dalla pressione, utilizzando semplicemente il valore $\delta_a \simeq 1.2 \cdot 10^{-3} g/cm^3$.