Università degli Studi di Firenze
Facoltà di Scienze Mat., Fis. e Nat.
Corso di Laurea in Fisica

Corso di Esperimentazioni I

Prof. R. Falciani

Prof. A. Stefanini

Appunti su:

PROPAGAZIONE DEGLI ERRORI NELLE MISURE INDIRETTE

1 Introduzione

La misura di una grandezza fisica implica la determinazione di due quantità: la miglior stima del valore *vero* della grandezza in esame e la miglior stima dell'incertezza di misura. La miglior stima del valore *vero* g_v della grandezza misurata è data in generale dal valore medio dei valori ottenuti in una serie di misure; tale affermazione, basata sostanzialmente sul "buon senso", è giustificata dalla statistica matematica quando le nostre misure sono affette solo da errori accidentali.
Vediamo ora come ci si deve porre rispetto alla determinazione dell'errore di misura. Per raggiungere tale scopo si possono individuare due fasi: la stima *a priori* delle incertezze di misura e la valutazione *a posteriori* dell'entità degli errori che hanno influito sul risultato finale.
Non sempre è possibile eseguire le due fasi: discuteremo di seguito i casi in cui l'una o l'altra, o ambedue, possono essere fatte.

2 Stima *a priori* delle incertezze di una misura in una misura diretta

La stima *a priori* **deve** essere fatta **sempre** prima di eseguire effettivamente la misura in laboratorio; è importante eseguire correttamente questa stima anche per scegliere una strumentazione di sensibilità e di qualità opportuna per poter, alla fine, garantire che il risultato della misura della grandezza fisica g sia affetto da un "errore" Δg che assicuri di raggiungere la precisione relativa $\Delta g/g$ necessaria a risolvere il problema per il quale la misura è stata progettata. Se poi non si ha la possibilità di scegliere la strumentazione, la stima a priori può risultare importante per capire in anticipo quali sono le fasi della misura più critiche per raggiungere il miglior risultato finale.
Si devono distinguere due casi, quello in cui la misura può essere affetta anche da errori sistematici e quello in cui sono presenti solo errori accidentali.

a) errori sistematici

Abbiamo già visto (par. 1.12 di [1]) che tali errori, una volta fissate le condizioni di misura, modificano il risultato della misura in un solo *verso* (per eccesso o per difetto). Nell'esecuzione di una serie di misure di una grandezza fisica dovremo quindi preliminarmente esaminare con estrema cura tutte le modalità d'esecuzione della misura stessa per rimuovere le cause di errori sistematici, che altererebbero il risultato della misura stessa. Tra i più comuni esempi di fonti di errori sistematici ricordiamo, ad esempio, l'offset di un calibro o di un compasso di Palmer, un catetometro non in bolla, un cannocchiale non aggiustato all'infinito nello spettroscopio, un effetto di parallasse nella lettura di uno strumento con indice,etc.. .
Succede talvolta di non poter eliminare tali errori sistematici pur avendoli individuati: è questo il caso delle misure con strumenti tarati, per i quali il costruttore fornisce una incertezza nella taratura (accuratezza dello strumento) che si ripercuote in una incertezza Δg_{sist} sul valore della grandezza misurata. Per eliminare tale contributo dovremmo essere in condizione di verificare la taratura dello strumento considerato; se ciò non è possibile

dovremmo tenere conto di tale fonte di errore nella stima *a priori* dell'incertezza di misura, introducendo un termine $\pm\Delta g_{sist}$ in tale valutazione *a priori*.

b) errori casuali

Il contributo agli errori casuali dovuto alla apparecchiatura o alla procedura di misura potrà essere variato con una opportuna scelta della strumentazione o della procedura di misura stessa. Esistono poi alcuni processi fisici intrinsecamente casuali (quale, ad es., il decadimento di una sorgente radioattiva), la cui trattazione quantitativa dovrà prevedere un contributo all'incertezza della misura indipendente dagli effetti strumentali e procedurali sopra menzionati. Tale trattazione sarà descritta negli opportuni corsi specialistici; ci occuperemo nel seguito solo degli effetti strumentali e procedurali.
La stima *a priori* dell'incertezza sulla misura diretta di una grandezza fisica dovrà sempre essere ricavata da una analisi critica del procedimento di misura e delle modalità con cui la misura viene eseguita. Tale incertezza potrà essere talvolta data direttamente dall'errore di sensibilità s dello strumento con il quale tale misura è eseguita. Ad esempio, se si misura lo spessore l di una sbarretta con un calibro ventesimale, si ha $\Delta l = 0.05$ mm. Consideriamo invece la misura del periodo di oscillazione di un pendolo, eseguita attraverso un cronometro manuale che ha la sensibilità di 0.01 s. Si esegue la misura facendo partire il cronometro quando il pendolo assume una determinata posizione e arrestando il cronometro quando il pendolo riassume la stessa posizione dopo n periodi. Se t è il tempo misurato, il periodo T è ovviamente dato da $T = t/n$. In questo caso sarebbe del tutto erroneo assumere come stima *a priori* dell'errore su t la sensibilità del cronometro $\Delta t = 10^{-2}$ s perché, così facendo, si farebbe completamente astrazione dell'incertezza insita nelle operazioni manuali consistenti nel far partire e nell'arrestare il cronometro. Una stima più ragionevole potrebbe essere, in questo caso, $\Delta t \simeq 0.2$ s, dovuto essenzialmente al tempo di reazione dello sperimentatore.

c) errori sia casuali che sistematici

In tal caso dovremo eseguire le due valutazioni riportate nei punti a) e b) e dare una stima dell'incertezza tenendo separati i contributi dovuti agli errori sistematici da quelli dovuti agli errori casuali.

3 Stima *a priori* delle incertezze in una misura indiretta

La maggior parte delle misure fisiche vengono effettuate utilizzando misure indirette e la grandezza fisica g si ottiene dalla misura di altre grandezze fisiche x, y, z...., che vengono misurate **indipendentemente** le une dalle altre. Conoscendo la relazione funzionale $g = f(x, y, z, ...)$ otterremo la miglior stima del valore "vero", g_v, sostituendo nella relazione funzionale i valori misurati x_v, y_v, z_v,..., ovvero $g_v = f(x_v, y_v, z_v, ...)$.
Ognuna delle grandezze x, y, z,... sarà affetta da un'incertezza di misura Δx, Δy, Δz,.... e dovremo quindi stabilire criteri *"ragionevoli"* e quantitativamente ben definiti per dedurre l'incertezza Δg su g_v. Ricordando che le misure delle grandezze $x, y, z,$.. devono essere

indipendenti tra loro possiamo assimilare, limitandoci ad una trattazione al primo ordine (come meglio specificato alla fine del paragrafo), l'incertezza su g al differenziale della funzione f, che permette di valutare la variazione del valore di tale funzione in un intorno infinitesimo di un qualunque punto del suo campo di esistenza rispetto alle variazioni infinitesime delle variabili indipendenti della funzione stessa. Per collegare quantitativamente le incertezze delle grandezze fisiche indipendenti Δx, Δy, Δz,... alla incertezza globale Δg sulla grandezza fisica dipendente g possiamo quindi applicare gli algoritmi dell'analisi matematica per il calcolo dei differenziali . In questo senso parliamo anche di *metodo della propagazione delle incertezze o degli errori.*

Avremo quindi, nell'ipotesi di considerare la funzione $g = f(x, y, z, ...)$, che il suo differenziale totale dg sarà dato da:

$$\mathrm{d}g = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x_v,y_v,z_v,..} \cdot \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x_v,y_v,z_v,..} \cdot \mathrm{d}y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x_v,y_v,z_v,..} \cdot \mathrm{d}z + ... \qquad (1)$$

dove $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x_v,y_v,z_v,..}$ indica il valore della derivata parziale della funzione f rispetto alla variabile x nel punto considerato e così via.
Sostituiamo agli incrementi infinitesimi dx,dy,dz,... le incertezze di misura $\Delta x, \Delta y, \Delta z, ...$, e teniamo inoltre conto del fatto che i segni delle derivate parziali possono essere sia positivi che negativi. Mettendoci nelle condizioni più sfavorevoli dobbiamo prendere i valori assoluti di tutti termini dell'eq.(1), cosicché avremo che l'incertezza totale stimata sul valore g_v sarà data da:

$$\Delta g = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_v,y_v,z_v,..} \cdot \Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x_v,y_v,z_v,..} \cdot \Delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{x_v,y_v,z_v,..} \cdot \Delta z + ... \qquad (2)$$

Ovviamente le varie derivate parziali devono essere valutate in corrispondenza dei valori misurati $x_v, y_v, z_v, ...$ delle grandezze fisiche in gioco. Tuttavia, nel caso in cui il numero di addendi nell'eq.(2) è elevato, oppure nel caso in cui si ha a che fare solo con errori accidentali, possiamo tener conto in qualche modo che è altamente improbabile che gli errori si presentino in modo tale da avere termini dello stesso segno nell'equazione (2). Per questo talvolta si preferisce sostituire l'equazione (2) con l'equazione

$$\Delta g = \sqrt{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x_v,y_v,z_v} \cdot \Delta x\right]^2 + \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x_v,y_v,z_v} \cdot \Delta y\right]^2 + ...} \qquad (3)$$

C'è da notare che le eq. (2) e (3) danno lo stesso risultato quando esiste solo un addendo, oppure quando uno fra i vari addendi è preponderante rispetto agli altri. In ogni caso, il valore per Δg che fornisce la eq.(3) è minore di quello fornito dalla eq.(2). Nel caso in cui tutti gli addendi diano contributi rigorosamente uguali il rapporto fra i due valori di Δg è pari a $\sqrt{N}$, dove N è il numero degli addendi.

La stima dell'incertezza relativa ε nella misura di g_v sarà semplicemente:

$$\varepsilon = \frac{\Delta g}{g_v} \tag{4}$$

Come già accennato, in questo paragrafo e nei successivi presentiamo una trattazione al primo ordine nelle incertezze. Dovrà quindi essere valutata caso per caso la necessità di tenere conto anche dei termini di ordine superiore. Ad esempio se consideriamo la relazione

$$g = \text{sen}x + y \tag{5}$$

con $x_v = 1.57$ rad, $\Delta x = 0.01$ rad, $y_v = 0.5283$ e $\Delta y = 1 \cdot 10^{-4}$, applicando la trattazione al primo ordine otteniamo

$$\Delta g = \cos x_v \cdot \Delta x + \Delta y \simeq 8 \cdot 10^{-6} + 1 \cdot 10^{-4} \simeq 1 \cdot 10^{-4} \tag{6}$$

In tal modo si sono però trascurati i termini al secondo ordine, considerando i quali avremo

$$\Delta g = \cos x_v \cdot \Delta x + \frac{1}{2} \mid -\text{sen}x_v \mid \cdot (\Delta x)^2 + \Delta y \simeq 8 \cdot 10^{-6} + 0.5 \cdot 10^{-4} + 1 \cdot 10^{-4} \simeq 1.5 \cdot 10^{-4} \tag{7}$$

In tal caso i termini del secondo ordine forniscono quindi un contributo non trascurabile alla valutazione di Δg.

4 Valutazione *a posteriori* degli errori

Per quanto detto nel par. 2, non ha senso cercare di determinare la stima *a posteriori* dell'effetto degli errori sistematici sulla misura in esame. Non potremo infatti ricavare alcuna informazione su tali effetti ripetendo più volte la misura. Per gli errori sistematici dovremo quindi accontentarci della stima *a priori* precedentemente descritta, sia per le misure dirette che per quelle indirette.

Nel caso di errori accidentali, la valutazione *a posteriori* degli errori della serie di misure eseguita sarà fatta applicando i risultati della statistica matematica, disciplina sviluppata proprio per la trattazione quantitativa dei fenomeni casuali. Nell'ipotesi di aver effettuato una serie di N misure indipendenti g_i si puo' dimostrare che la distribuzione in frequenza dei dati è *compatibile* con una distribuzione *normale* (o gaussiana) e che il valore più probabile per il valore *vero* g_v della grandezza misurata è rappresentato dalla media aritmetica delle singole misure, cioe' $g_v = \Sigma g_i/N$. In questo modo si rende minima la varianza σ^2 degli scarti $\varepsilon_i = g_i - g_v$ delle singole misure, $\sigma^2 = \Sigma\ \varepsilon_i^2/(\text{N-1})$. La deviazione standard $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\Sigma(g_i - g_v)^2/(N-1)}$ rappresenterà l'errore quadratico medio della serie di misure, per cui il risultato finale delle N misure sarà dato da $g_v \pm \sigma$. L'errore quadratico medio relativo sarà ovviamente σ/g_v. Nell'intervallo $\mid g_v - \sigma,\ g_v + \sigma \mid$ cadranno circa il 67% delle N misure.

Nel caso di misure indirette è possibile dimostrare che l'errore *a posteriori* sulla grandezza g legata alle grandezze x, y, z misurate direttamente ed affette esclusivamente da errori accidentali è dato dalla eq.(3).

Bisogna anche ricordare che, perché si possa valutare la media e la deviazione standard dalla serie di misure g_i della grandezza g, è necessario disporre di strumenti tali da avere un errore di sensibilità minore, o almeno paragonabile, al valore della standard deviation σ.

Molto spesso abbiamo la possibilità di eseguire solo un numero molto limitato di misure ($N \leq 10$) per cui siamo in condizioni molto lontane dalle ipotesi fondamentali della statistica matematica; pertanto la valutazione "a posteriori" dell'entità dell'errore della misura finale puo' essere fatta seguendo criteri di "buon senso", come quello, ad esempio, di assumere per l'errore lo scarto massimo dalla media, ϵ_{max}, della serie di misure a disposizione. (Ovviamente, possono esistere dei casi in cui tutte le N misure danno lo stesso risultato. In tali casi risulterebbe $\epsilon_{max} = 0$ e la stima dell'errore deve di nuovo essere effettuata tenendo conto della sensibilità dello strumento come nel caso degli errori *a priori*.)
Volendo determinare l'incertezza di misura *a posteriori*, seguiremo ancora criteri di buon senso applicando una propagazione lineare dell'errore, data dalla eq.(2) con i vari $\Delta x, \Delta y, \Delta z, ...$ dati dagli errori *a posteriori* .

In tutti i casi il confronto tra la stima *a priori* e la valutazione *a posteriori* dell'incertezza della misura rappresenta, quando tali valori differiscono, un utile strumento per caratterizzare la precisione della misura eseguita.

5 Propagazione dell'incertezza relativa

Presentiamo in questo paragrafo un metodo alternativo per stimare *a priori* l'incertezza relativa $\varepsilon = \frac{\Delta g}{g_v}$ della misura indiretta che andiamo ad eseguire. In molti casi tale metodo è più rapido di quello che risulta dall'applicazione dell'eq.(2)-(3) e (4). Sappiamo, dall'analisi matematica, che $\frac{\mathrm{d}f}{f} = \mathrm{d}(\ln f)$; quindi potremo ottenere immediatamente $\varepsilon = \frac{\Delta g}{g_v} = \Delta(\ln g_v)$. Questo metodo sarà particolarmente utile quando g è espresso tramite una serie di prodotti di espressioni, ognuna delle quali contiene solo una grandezza fisica indipendente. Infatti se

$$g = \phi(x) \cdot \theta(y) \cdot \lambda(z)..... \tag{8}$$

avremo che:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}g}{g} &= \mathrm{d}\ \ln g = \mathrm{d}\ \ln[\phi(x) \cdot \theta(y) \cdot \lambda(z).....] = \mathrm{d}\ \ln\phi(x) + \mathrm{d}\ \ln\theta(y) + \mathrm{d}\ \ln\lambda(z) + ... \qquad (9) \\ &= \frac{\mathrm{d}\phi}{\phi} + \frac{\mathrm{d}\theta}{\theta} + \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda} + ... = \frac{1}{\phi} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right) \cdot \mathrm{d}x + \frac{1}{\theta} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}y}\right) \cdot \mathrm{d}y + \frac{1}{\lambda} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}z}\right) \cdot \mathrm{d}z + ... \end{aligned}$$

da cui

$$\frac{\Delta g}{g_v} = \left|\frac{1}{\phi(x_v)} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right)_{x_v}\right| \Delta x + \left|\frac{1}{\theta(y_v)} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}y}\right)_{y_v}\right| \Delta y + \left|\frac{1}{\lambda(z_v)} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}z}\right)_{z_v}\right| \Delta z + ... \tag{10}$$

in cui abbiamo usato ancora la convenzione di esprimere $\frac{\Delta g}{g_v}$ tramite la somma dei valori assoluti dei singoli termini per metterci sempre nelle condizioni più sfavorevoli. E' ovvia la semplicità del calcolo della derivata logaritmica rispetto al calcolo delle derivate parziali e successivo rapporto con g_v per la valutazione dell'incertezza relativa $\frac{\Delta g}{g_v}$. Tuttavia la situazione è effettivamente semplice solo quando la g_v ha l'espressione (8), dove tutte le variabili del problema sono indipendenti le une dalle altre. Nel caso contrario occorre porre molta attenzione nell'applicazione del metodo della derivata logaritmica, come gli esempi che seguono possono illustrare. Se, tuttavia, si hanno dubbi sulla correttezza dell'applicazione del metodo della derivata logaritmica in casi particolarmente complessi (dal punto di vista delle relazioni analitiche che legano fra loro le varie grandezze), è consigliabile valutare il Δg tramite l'eq.(2) e successivamente valutare $\varepsilon = \frac{\Delta g}{g_v}$.

Coerentemente con quanto detto nel par.2, in presenza di soli errori accidentali la eq.(7) sarà sostituita dalla seguente formula:

$$\frac{\sigma_g}{g_v} = \sqrt{\left(\frac{1}{\phi(x_v)}\right)^2 \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right)^2_{x_v} \cdot \sigma_x^2 + \left(\frac{1}{\theta(y_v)}\right)^2 \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}y}\right)^2_{y_v} \cdot \sigma_y^2 + \left(\frac{1}{\lambda(z_v)}\right)^2 \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}z}\right)^2_{z_v} \cdot \sigma_z^2 + ...} \tag{11}$$

6 Alcuni casi particolari

Negli esempi che seguono ometteremo per semplicità il pedice v nelle relazioni funzionali relative all'incertezze di misura.

1. Supponiamo che le grandezze fisiche "indipendenti" x e y siano legate alla grandezza fisica g, che dobbiamo misurare, dalla relazione

$$g = \frac{x^2 + y^2}{kx^3} \tag{12}$$

con $k = 1.3800, x = 4.35, \frac{\Delta x}{x} \simeq 2 \cdot 10^{-3}, y = 10.485, \frac{\Delta y}{y} \simeq 10^{-4}$.

Il valore di g risulta quindi $g = 1.134$.
Valutiamo inizialmente l'incertezza Δg tramite il metodo delle derivate parziali:

$$\mathrm{d}g = -\frac{x^2 + 3y^2}{kx^4}\mathrm{d}x + \frac{2y}{kx^3}\mathrm{d}y \tag{13}$$

da cui

$$\Delta g = \left| -\frac{x^2+3y^2}{kx^4} \right| \Delta x + \left| \frac{2y}{kx^3} \right| \Delta y \tag{14}$$

$$\Delta g = 0.706 \cdot \Delta x + 0.185 \cdot \Delta y = 6.1 \cdot 10^{-3} + 0.2 \cdot 10^{-3} = 6.3 \cdot 10^{-3} \tag{15}$$

Si vede quindi che l'incertezza sulla grandezza x produce un effetto su Δg di oltre un ordine di grandezza superiore rispetto a quello prodotto dall'incertezza sulla grandezza y.
Dividendo per g otterremo quindi

$$\frac{\Delta g}{g} \simeq 5.6 \cdot 10^{-3} \tag{16}$$

Applichiamo adesso il metodo della derivata logaritmica:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}g}{g} &= \mathrm{d}\ \ln g = \mathrm{d}\ \ln\left(\frac{x^2+y^2}{kx^3}\right) = \mathrm{d}[\ln(x^2+y^2) - \ln k - \ln x^3] = \frac{\mathrm{d}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} - \frac{\mathrm{d}(x^3)}{x^3} \\ &= \frac{2x\mathrm{d}x + 2y\mathrm{d}y}{x^2+y^2} - \frac{3\mathrm{d}x}{x} = \left(\frac{2x^2}{x^2+y^2} - 3\right)\frac{\mathrm{d}x}{x} + \left(\frac{2y^2}{x^2+y^2}\right)\frac{\mathrm{d}y}{y} \end{aligned} \tag{17}$$

Sviluppando e passando ai valori finiti, avremo

$$\frac{\Delta g}{g} = \left| -\frac{x^2+3y^2}{x^2+y^2} \right| \frac{\Delta x}{|\, x\, |} + \left| \frac{2y^2}{x^2+y^2} \right| \frac{\Delta y}{|\, y\, |}. \tag{18}$$

Si noti che la stessa espressione può essere ricavata anche attraverso le eq. (14) e (12). Sostituendo nell'eq.(18) i valori numerici, si ritrova ovviamente il risultato dell'eq.(16).

Ovviamente anche la valutazione numerica dei termini che compaiono nell'espressione di $\frac{\Delta g}{g}$ ci porta alla conclusione che l'effetto su $\frac{\Delta g}{g}$ dell'incertezza relativa alla grandezza x è di circa un ordine di grandezza più elevato dell'effetto dell'incertezza relativa a y, come avevamo già precedentemente visto dall'esame dei valori numerici dei termini contenuti in Δg.
Facciamo notare che nell'applicazione del metodo della derivata logaritmica si deve procedere con la massima attenzione fino ad ottenere l'espressione di $\frac{\mathrm{d}g}{g}$ in funzione della somma (algebrica!) dei vari termini, ognuno dei quali porta a fattore il differenziale relativo $\frac{\mathrm{d}x}{x}$, $\frac{\mathrm{d}y}{y}$,ecc. Successivamente, come ultimo "passaggio", si passa ai valori finiti dell'incertezza relativa stimata per g prendendo il valore assoluto di ciascuno dei termini.

2. Supponiamo di considerare adesso la relazione

$$g = x^2 \cdot \frac{\mathrm{sen}(x+y)}{(x-y)\cdot\sqrt{y}} \tag{19}$$

con $x = 45°, y = 60°$ e $\Delta x = \Delta y = 30''$. Dopo aver espresso gli angoli in radianti ($x = 0.7854$ rad, $y = 1.0472$ rad , $\Delta x = \Delta y = 1.5 \cdot 10^{-4}$ rad), si ottiene $g = -2.224$. Applichiamo il metodo della derivata logaritmica

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}g}{g} &= \frac{2\mathrm{d}x}{x} + \frac{\mathrm{d}[\mathrm{sen}(x+y)]}{\mathrm{sen}(x+y)} - \frac{\mathrm{d}(x-y)}{(x-y)} - \frac{\mathrm{d}(\sqrt{y})}{\sqrt{y}} = \\ &= +2\frac{\mathrm{d}x}{x} + [\mathrm{cotg}(x+y)](\mathrm{d}x+\mathrm{d}y) - \frac{\mathrm{d}x-\mathrm{d}y}{(x-y)} - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}y}{y} = \\ &= \left[x\mathrm{cotg}(x+y) + \frac{x-2y}{x-y}\right]\frac{\mathrm{d}x}{x} + \left[y\mathrm{cotg}(x+y) + \frac{3y-x}{2(x-y)}\right]\frac{\mathrm{d}y}{y}\end{aligned} \tag{20}$$

Passando ai valori finiti

$$\frac{\Delta g}{g} = \left|x\mathrm{cotg}(x+y) + \frac{x-2y}{x-y}\right|\frac{\Delta x}{|\,x\,|} + \left|y\mathrm{cotg}(x+y) + \frac{3y-x}{2(x-y)}\right|\frac{\Delta y}{|\,y\,|} \tag{21}$$

Sostituendo i valori numerici otterremo

$$\frac{\Delta g}{g} = 4.79\frac{\Delta x}{|\,x\,|} + |\,-4.78\,|\,\frac{\Delta y}{|\,y\,|} \simeq 1.6 \cdot 10^{-3} \tag{22}$$

3. Supponiamo invece di considerare la relazione

$$g = \frac{ab^2c^3}{k(z-t)}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) \tag{23}$$

con x, y, z, t, a, b, c grandezze (positive) misurate direttamente e k costante. Applichiamo il metodo della derivata logaritmica (invitando lo studente anche a valutare Δg usando le derivate parziali e successivamente trovare $\frac{\Delta g}{g}$)

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}g}{g} &= \frac{\mathrm{d}a}{a} + 2\frac{\mathrm{d}b}{b} + 3\frac{\mathrm{d}c}{c} - \frac{\mathrm{d}z}{(z-t)} + \frac{\mathrm{d}t}{(z-t)} + \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)}{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)} = \\ &= \frac{\mathrm{d}a}{a} + 2\frac{\mathrm{d}b}{b} + 3\frac{\mathrm{d}c}{c} - \frac{z}{(z-t)}\frac{\mathrm{d}z}{z} + \frac{t}{(z-t)}\frac{\mathrm{d}t}{t} - \frac{y}{(y-x)}\frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{x}{(y-x)}\frac{\mathrm{d}y}{y}\end{aligned} \tag{24}$$

Passando ai valori finiti

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta a}{a} + 2\frac{\Delta b}{b} + 3\frac{\Delta c}{c} + \left|-\frac{z}{z-t}\right|\frac{\Delta z}{z} + \left|\frac{t}{z-t}\right|\frac{\Delta t}{t} + \left|-\frac{y}{y-x}\right|\frac{\Delta x}{x} + \left|\frac{x}{y-x}\right|\frac{\Delta y}{y} \tag{25}$$

4. Supponiamo infine di considerare la relazione

$$g = \frac{x^2 - z^2}{y^2 - z^2} \tag{26}$$

dove x, y, z sono grandezze positive misurate direttamente.
Applicando il metodo della derivata logaritmica otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{dg}{g} &= \frac{\mathrm{d}(x^2 - z^2)}{(x^2 - z^2)} - \frac{\mathrm{d}(y^2 - z^2)}{(y^2 - z^2)} = \\ &= \frac{2x^2}{x^2 - z^2}\frac{dx}{x} - \frac{2y^2}{y^2 - z^2}\frac{dy}{y} + \frac{2z^2(x^2 - y^2)}{(y^2 - z^2)(x^2 - z^2)}\frac{dz}{z} \end{aligned} \tag{27}$$

Passando ai valori finiti

$$\frac{\Delta g}{g} = \left|\frac{2x^2}{x^2 - z^2}\right|\frac{\Delta x}{x} + \left|-\frac{2y^2}{y^2 - z^2}\right|\frac{\Delta y}{y} + \left|\frac{2z^2(x^2 - y^2)}{(y^2 - z^2)(x^2 - z^2)}\right|\frac{\Delta z}{z} \tag{28}$$

I più vivi ringraziamenti vanno al collega prof. E. Landi Degl'Innocenti per i suggerimenti e le critiche costruttive forniti durante la stesura di questi appunti.

[1] R.Falciani, A.Stefanini: Appunti su "Misure in Fisica, equazioni dimensionali e sistemi di unità di misura"