

1 Rappresentazione grafica delle relazioni fra grandezze fisiche

L'indagine quantitativa di un fenomeno naturale si realizza attraverso la misura delle grandezze fisiche che lo caratterizzano; la comprensione del fenomeno richiede spesso di individuare una correlazione, un legame o una dipendenza funzionale fra di esse. Questa indagine può essere utilmente condotta utilizzando metodologie grafiche finalizzate alla rappresentazione delle relazioni fra due o più grandezze fisiche.

La compatibilità di un insieme di dati sperimentali di due grandezze fisiche x e y con una ipotetica relazione del tipo $y = f(x)$ può essere verificata riportando i dati sperimentali su un piano con riferimento cartesiano ortogonale. Gli assi del riferimento cartesiano saranno etichettati con i simboli delle grandezze fisiche riportate (x e y nel nostro caso) e con le corrispondenti unità di misura (ad es. nella forma $x(u_x)$ e $y(u_y)$) e copriranno un ambito di valori leggermente maggiore di quello misurato sperimentalmente. Per una facile lettura del grafico, gli assi cartesiani saranno poi suddivisi in intervalli di uguale ampiezza, i cui estremi siano esprimibili con valori numerici aventi il minimo numero di cifre.

In tale riferimento i dati sperimentali saranno rappresentati da coppie ordinate di valori con la loro incertezza ($x_i \pm \Delta x_i, y_i \pm \Delta y_i$).

Nel caso di incertezze ottenute come scarto massimo, il dato sperimentale è rappresentato da un rettangolo centrato nel punto di coordinate (x_i, y_i) , i cui vertici sono ottenuti dalle 4 possibili combinazioni delle incertezze con i segni + e -.

Con tale impostazione è possibile ottenere una rappresentazione del tipo di quella riportata nella fig.1 e la ricerca della relazione fra le due grandezze corrisponde a trovare le curve $y = f(x)$ compatibili con i dati sperimentali (come le f_1 e f_2 in figura).

Vedremo nei successivi paragrafi alcune tecniche per ottenere tale risultato, partendo dai casi più semplici.

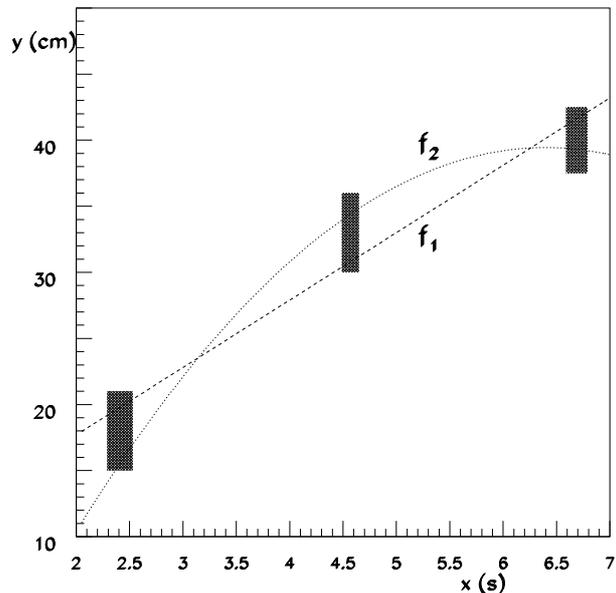


Figura 1:

2 Relazioni lineari e stima dei parametri

Sono molti i fenomeni naturali in cui il legame tra due grandezze fisiche x e y è ben rappresentato da una relazione lineare del tipo

$$y = ax + b \quad (1)$$

dove a e b sono altre grandezze fisiche che hanno il ruolo di costanti. Il grafico corrispondente è quello di una retta di coefficiente angolare a e passante per il punto $(0,b)$. La verifica della compatibilità dei dati sperimentali con una legge lineare (vedi fig.2) si concretizza nella ricerca delle rette che intersecano tutti i rettangoli associati ai punti sperimentali. In generale tale procedura porta a determinare un insieme di rette aventi coefficiente angolare compreso tra quello di massima (indicata con max in figura) e quello di minima (indicata con min) pendenza compatibile con i dati ¹. Ad ognuna di queste rette è associato un termine noto e si ha quindi un ambito di valori permessi per esso ². Metodi analitici più raffinati di determinazione dei parametri della relazione lineare saranno esaminati nel caso in cui le incertezze sulle grandezze misurate siano date non come scarti massimi ma come deviazioni standard. Ne rimandiamo la trattazione al capitolo dedicato all'analisi statistica dei dati sperimentali.

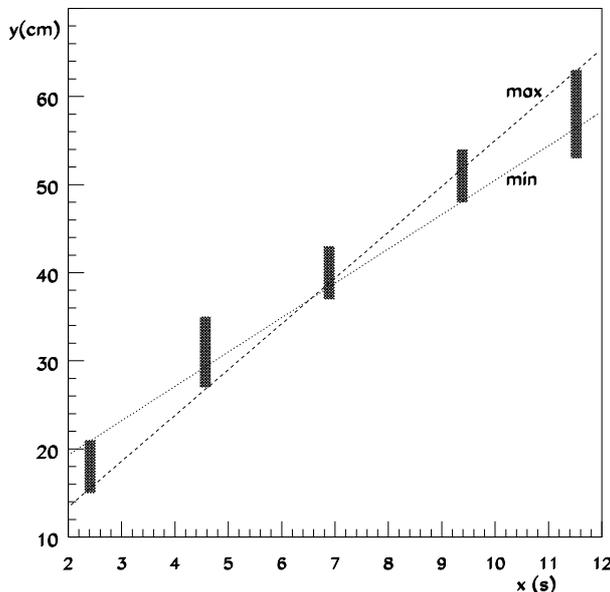


Figura 2:

3 Linearizzazione di relazioni non lineari

La semplicità della procedura esaminata nel paragrafo precedente spinge a cercare di riscrivere, quando possibile, in forma linearizzata ogni relazione fra grandezze fisiche. Ciò viene ottenuto riportando la generica relazione funzionale nella forma

$$f(y) = a g(x) + b \tag{2}$$

e riportando sugli assi coordinati le funzioni $f(y)$ e $g(x)$ invece delle grandezze y e x . In tal modo il grafico risulta linearizzato ed è possibile applicare la procedura del paragrafo precedente.

Si consideri ad esempio il caso in cui si voglia verificare la seguente relazione $y = a x^2 + b$.

¹La determinazione del coefficiente angolare di una retta del grafico viene realizzata tramite il calcolo dell'espressione $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ dove (x_1, y_1) e (x_2, y_2) sono le coordinate di due qualsiasi punti appartenenti alla retta. Per una miglior determinazione di tale coefficiente è utile scegliere coppie di punti le più distanti possibili sul grafico, al fine di ridurre l'influenza sul valore ottenuto delle inevitabili incertezze nella determinazione grafica dei valori x_i e y_i .

²Se l'origine degli assi coordinati corrisponde al valore $x = 0$, l'ambito di valori possibili per b è determinato direttamente dall'intervallo di valori di y compresi tra le intersezioni con l'asse delle ordinate delle rette di massima e minima pendenza. Nel caso generale, ovvero quando l'origine degli assi coordinati non corrisponde al valore $x = 0$, una volta determinato graficamente il coefficiente angolare di una retta, il suo termine noto è ricavabile analiticamente dalla relazione $y_i - a x_i = b$, con (x_i, y_i) coordinate di un qualsiasi punto della retta.

Riportando sugli assi i valori misurati y_i in funzione dei corrispondenti x_i (vedi fig.3a)) dovremmo ricercare le parabole che meglio si adattano ai dati sperimentali. Ben più semplice sarebbe la ricerca delle rette che meglio si adattano ai dati sperimentali riportati sugli assi come coppie di valori (y_i, x_i^2) .

Nel caso generale la linearizzazione del problema può essere ottenuta seguendo due possibili procedure:

- mantenendo le scale lineari sui due assi coordinati e riportando su di essi i valori delle nuove variabili $f(y)$ e $g(x)$ (vedi ad es. la fig. 3b). In tal caso si dovrà far uso della propagazione delle incertezze per determinare l'incertezza sui valori $f(y_i)$ e $g(x_i)$;
- sostituendo la scala lineare sugli assi coordinati con scale non lineari $y' = f(y)$ e $x' = g(x)$ sulle quali riportare i valori misurati (x_i, y_i) e le corrispondenti incertezze (vedi fig. 3c).

I due metodi conducono allo stesso risultato finale per i valori di a e b e delle loro incertezze e la scelta dell'uno o dell'altro metodo è dettata essenzialmente da motivi pratici. Il primo metodo ha infatti il difetto di richiedere per ogni dato sperimentale il calcolo della propagazione dell'incertezza, che talvolta può risultare complicato o tedioso. Tale metodo ha tuttavia il pregio che i coefficienti a e b possono essere determinati direttamente con le procedure sviluppate nel paragrafo precedente.

Il secondo metodo non richiede la propagazione degli errori ma necessita di una scala appropriata per ogni f e/o g ipotizzata; in tal caso bisogna inoltre fare più attenzione nella determinazione dei valori di a e b e delle loro incertezze (si ricordi ad es. che a è il coefficiente angolare ottenibile dalla relazione $a = \frac{f(y_2) - f(y_1)}{g(x_2) - g(x_1)}$ mentre sugli assi sono riportati i valori di x_1, x_2, y_1 e y_2).

Un caso nel quale risulta particolarmente utile l'applicazione del secondo metodo è quello nel quale si voglia verificare la compatibilità dei dati sperimentali con una relazione funzionale del tipo

$$y = a \cdot c^{\frac{x}{b}} \quad (3)$$

con c base numerica nota dell'esponenziale. In questo caso è facile reperire la cosiddetta "carta semilogaritmica" che presenta una scala lineare, che utilizzeremo per le ascisse,

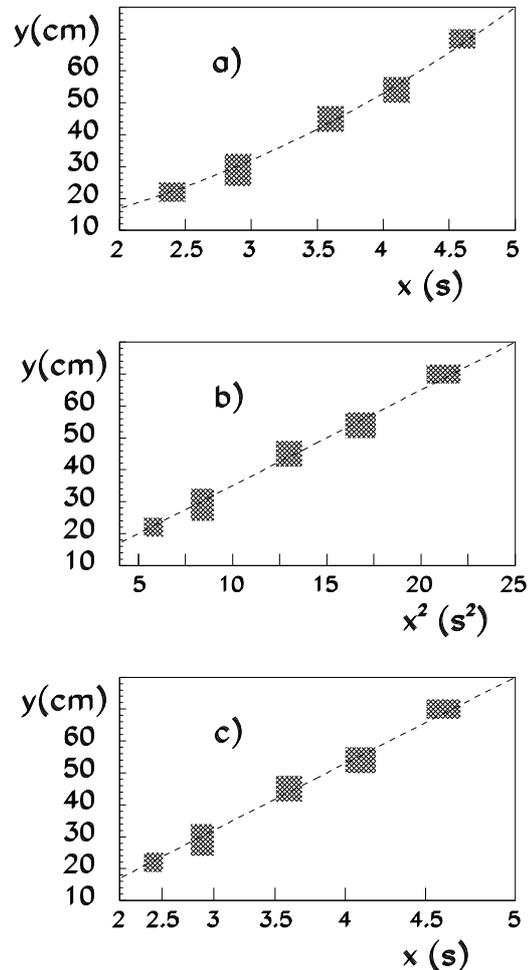


Figura 3:

e una scala delle ordinate non lineare basata sulla relazione $y' = \log_{10}(y/u_y)$, dove u_y è l'unità di misura della grandezza y . Infatti, tenendo conto che

$$\log_{10}(y/u_y) = \log_{10}\left(\frac{a \cdot c^{\frac{x}{b}}}{u_y}\right) = \log_{10}\left(\frac{a}{u_y}\right) + \log_{10}\left(c^{\frac{x}{b}}\right) = \log_{10}\left(\frac{a}{u_y}\right) + \frac{x}{b} \log_{10}(c)$$

si vede immediatamente che la relazione tra $\log_{10}(y/u_y)$ e x risulta essere lineare con coefficiente angolare $\frac{\log_{10}(c)}{b}$ e termine noto $\log_{10}\left(\frac{a}{u_y}\right)$ ³. Tale procedura è particolarmente utile

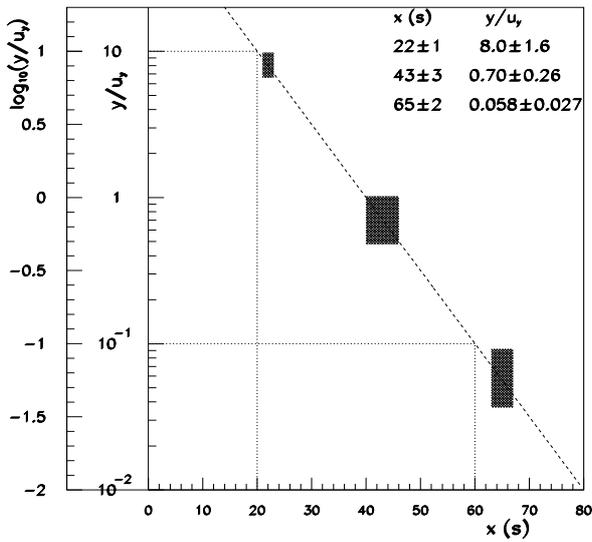


Figura 4:

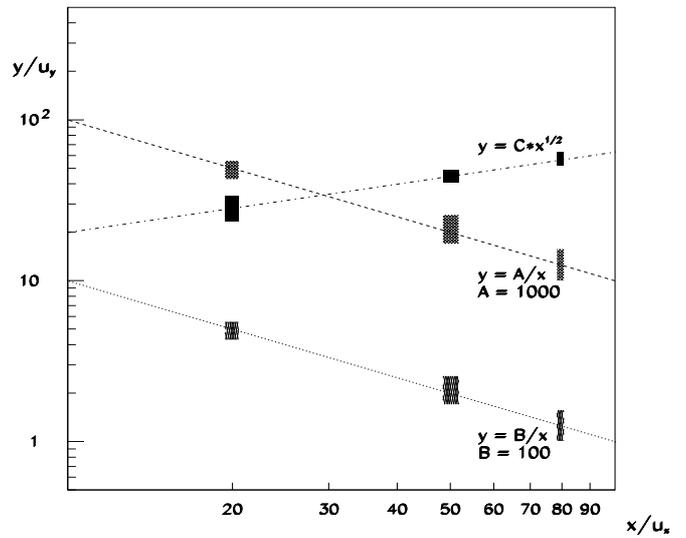


Figura 5:

nello studio di quei fenomeni naturali in cui è a priori nota la dipendenza esponenziale di eq.(3) (legge dei decadimenti radioattivi, legge di assorbimento della radiazione elettromagnetica ed altri) ed ha il grosso pregio di rendere evidenti graficamente anche dati sperimentali i cui valori differiscono di alcuni ordini di grandezza e che sarebbero praticamente invisibili usando scale lineari (vedasi ad es. il caso riportato in fig.4 nel quale tra il primo e il terzo valore misurato ci sono quasi 2 ordini di grandezza). Ricordiamo che la determinazione del coefficiente angolare della miglior retta nel grafico di fig.4 è data dall'espressione

$$\left(\frac{\log_{10}(c)}{b}\right)_{best} = \frac{\log_{10}(y_2/u_y) - \log_{10}(y_1/u_y)}{x_2 - x_1} = \frac{\log_{10}(10) - \log_{10}(0.1)}{(20. - 60.)u_x} = \frac{1.0 - (-1.0)}{(20. - 60.)u_x} = -0.05 u_x^{-1}$$

³In maniera del tutto analoga a quanto fatto sopra, avremmo potuto operare la sostituzione $y' = \ln(y/u_y)$ anziché $y' = \log_{10}(y/u_y)$. Tale procedura alternativa sarebbe particolarmente utile nel caso $c = e$, in cui il coefficiente angolare dell'andamento lineare risulta essere direttamente $\ln(e)/b = 1/b$. Di fatto essa non viene quasi mai usata in quanto la corrispondenza tra la scala logaritmica e quella lineare nella variabile y/u_y è meno diretta. Infatti nel primo caso si ha $\log_{10}(y/u_y) = 1$ quando $y/u_y = 10^1$, mentre nel secondo è $\ln(y/u_y) = 1$ quando $y/u_y = e^1 = 2.71828$. Ciò è diretta conseguenza del fatto che la rappresentazione numerica normalmente usata è quella in base 10 e non quella in base e .

mentre la miglior stima del termine noto a/u_y è ricavabile direttamente dall'intersezione della retta con l'asse delle ordinate, se questa è visibile nel grafico, oppure dalla determinazione grafica delle coordinate di un qualsiasi punto della retta stessa. Vogliamo sottolineare che nella scelta dei punti da utilizzare per la determinazione del coefficiente angolare si è seguito sia il criterio di prendere punti i più distanti possibile sia quello di scegliere quelli i cui valori sono più facilmente determinabili sulle scale.

Un altro caso in cui è particolarmente indicato l'utilizzo di scale non lineari è quello nel quale si ha a che fare con relazioni funzionali rappresentabili come leggi di potenza del tipo

$$y = a \cdot x^{\frac{b}{u_b}} \quad (4)$$

dove a e b sono parametri di valore incognito e u_b è l'unità di misura di b .

Indicando con u_x e u_y le unità di misura nelle quali sono misurate le grandezze x e y e prendendo il logaritmo di ambedue i membri della eq.(4) si ottiene

$$\log_{10}(y/u_y) = \log_{10} \left(\frac{a \cdot x^{\frac{b}{u_b}}}{u_y} \right) = \log_{10} \left(\frac{a \cdot \left(\frac{u_x}{u_x} \cdot x \right)^{\frac{b}{u_b}}}{u_y} \right) = \log_{10} \left(\frac{a \cdot u_x^{\frac{b}{u_b}}}{u_y} \right) + \frac{b}{u_b} \cdot \log_{10} \frac{x}{u_x}$$

Si ha quindi una relazione lineare tra le variabili $\log_{10}(y/u_y)$ e $\log_{10}(x/u_x)$ e ciò porta alla possibilità di una determinazione grafica dei coefficienti incogniti a e b utilizzando assi coordinati logaritmici, ovvero un grafico "doppio logaritmico".

In fig.5 sono riportati alcuni esempi nei quali è ben evidenziato il diverso andamento nel caso in cui b/u_b sia uguale a -1 o +1/2. Concludiamo evidenziando ancora una volta che la determinazione del coefficiente angolare delle rette in tale rappresentazione è data da

$$\frac{b}{u_b} = \frac{\log_{10}(y_2/u_y) - \log_{10}(y_1/u_y)}{\log_{10}(x_2/u_x) - \log_{10}(x_1/u_x)} = \frac{\log_{10}(10.) - \log_{10}(100.)}{\log_{10}(100.) - \log_{10}(10.)} = \frac{1 - 2}{2 - 1} = -1$$

ovvero dal rapporto tra le larghezze di intervalli corrispondenti sugli assi coordinati, ottenibili direttamente sostituendo alle potenze di 10 il relativo esponente. La costante moltiplicativa a determina la posizione verticale della retta corrispondente (vedasi in fig.5 il caso delle due rette con $b/u_b = -1$) e può essere facilmente determinata ricavando il valore y_0 della ordinata corrispondente ad una ascissa x_0 tale che $\log_{10} \frac{x_0}{u_x} = 0$, ovvero $\frac{x_0}{u_x} = 1$. In tali condizioni si avrà infatti

$$\log_{10}(y_0/u_y) = \log_{10} \left(\frac{a}{u_y} \cdot u_x^{\frac{b}{u_b}} \right) \quad \text{---} > a \cdot u_x^{\frac{b}{u_b}} = y_0 \quad \text{---} > a = \frac{y_0}{u_x^{\frac{b}{u_b}}}$$

Come atteso avremo che le dimensioni di a saranno date da $[a] = [y]/[x]^{\frac{b}{u_b}}$. Vogliamo infine far notare che, anche in questo caso, la rappresentazione grafica doppio logaritmica ha permesso di evidenziare graficamente dati sperimentali i cui valori numerici differiscono tra loro di alcuni ordini di grandezza.