Rappresentazione numerica delle grandezze fisiche

Rappresentazione decimale

Il nostro sistema convenzionale è il sistema decimale cioè con base 10. La sequenza dei valori posizionali è determinata dalle sequenze delle potenze di 10

$$10^3 \mid 10^2 \mid 10^1 \mid 10^0 \mid 10^{-1} \mid 10^{-2} \mid 10^{-3}$$

Notazione scientifica

$$q = a \cdot 10^b$$

in cui $0.5 \leq a \leq 5$ (cioè a è dell'ordine dell'unità, come vedremo in seguito) e b è un opportuno numero intero

non si scriverà	3450.25	ma	$3.45025 \cdot 10^3$;
non si scriverà	0.00841	ma	$0.841 \cdot 10^{-2}$;
non si scriverà	480.210	ma	$4.80210 \cdot 10^2$ ecc.

Rappresentazione numerica delle grandezze fisiche

Quante cifre occorre considerare nella rappresentazione numerica delle costanti??

Ex. -> misurato r ($r_m \pm \Delta r$) si vuol determinare la lunghezza della semicirconferenza πr: con quante cifre devo esprimere π (3.1415926539……)?????

Valore approssimato q → $r = q + \Delta r$ con $|\Delta r| \ll |r|, |q|$

valore approssimato per difetto se $\Delta r \geq 0$, per eccesso se $\Delta r \leq 0$.

Δr → scarto di approssimazione, o approssimazione assoluta di q rispetto ad r.

$\varepsilon = |\Delta r/r| \cong |\Delta r/q|$ ⟶ approssimazione relativa

Numero di cifre significative→ n. cifre decimali della notazione scientifica necessarie per assicurare la rappresentazione della quantità r con l'approssimazione relativa ε desiderata (« incertezza relativa sulle grandezze fisiche misurate direttamente)

Esempi: $\pi = 3.14$ → ε ???? ($\approx 10^{-3}$)

$= 3.142$ → ε ???? ($\approx 10^{-4}$)

$= 3.1416$ → ε ???? ($\approx 10^{-5}$)

Convenzione: se un valore è dichiarato con n cifre significative il suo valore è approssimato in assoluto al più per 5 unità sulla prima cifra non dichiarata

Cifre significative nelle operazioni numeriche

ADDIZIONE:

$$q_1 = a_1 \cdot 10^{b_1}$$

$$q_2 = a_2 \cdot 10^{b_2}$$

$$s = q_1 + q_2 = a_s \cdot 10^{b_s}$$

n. cifre decimali = min(n_1,n_2)

SOTTRAZIONE:

$$d = q_1 - q_2 = a_q \cdot 10^{b_q}$$

n. cifre decimali = min(n_1,n_2)

MOLTIPLICAZIONE:

$$p = q_1 \times q_2 = (a_1 \cdot 10^{b_1}) \times (a_2 \cdot 10^{b_2}) = (a_1 \times a_2) \cdot 10^{b_1+b_2} = a_p \cdot 10^{b_p}$$

n. cifre significative = min(n_1,n_2)

DIVISIONE:

$$q = q_1/q_2 = (a_1 \cdot 10^{b_1})/(a_2 \cdot 10^{b_2}) = (a_1/a_2) \cdot 10^{b_1-b_2} = a_q \cdot 10^{b_q}$$

n. cifre significative = min(n_1,n_2)

Valori approssimati delle funzioni

"si abbia una funzione $f(x)$ reale, definita nell'intervallo]a,b[, ed essa ammetta in]a,b[derivate di ogni ordine; si può allora costruire la cosiddetta *serie di Taylor* esprimibile come:

$$T(x,x_0) = f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)+\frac{(x-x_0)^3}{3!}f'''(x_0)+.....+\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^n(x_0)+.....$$

Se tale serie risulta convergente in]a,b[e se ha per somma $f(x)$, si dice che la $f(x)$ è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale x_0 appartenente all'intervallo]a,b[."

il polinomio di Taylor di ordine n

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^k(x_0)$$

il termine complementare n-esimo della formula di Taylor

$$R_n(x) = f(x) - S_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^k(x_0)$$

"Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione $f(x)$, indefinitamente derivabile in un intervallo]a,b[cui appartiene x_0 sia sviluppabile ivi in serie di Taylor è che per ogni $x\epsilon$]a,b[il termine complementare $R_n(x)$ della formula di Taylor abbia limite zero quando $n \to \infty$"

Valori approssimati delle funzioni

$$T(x,x_0) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!}f'''(x_0) + \ldots.. + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^n(x_0) + \ldots..$$

$$x_0 = 0 \text{ (sviluppo di Mc Laurin)}$$

$$\operatorname{sen}(x) = 0 + x \times 1 - \frac{x^2}{2!} \times 0 - \frac{x^3}{3!} \times 1 + \ldots. = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \ldots.$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots. \qquad x \epsilon R$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \ldots. \qquad |\, x \,| \leq \frac{\pi}{2}$$

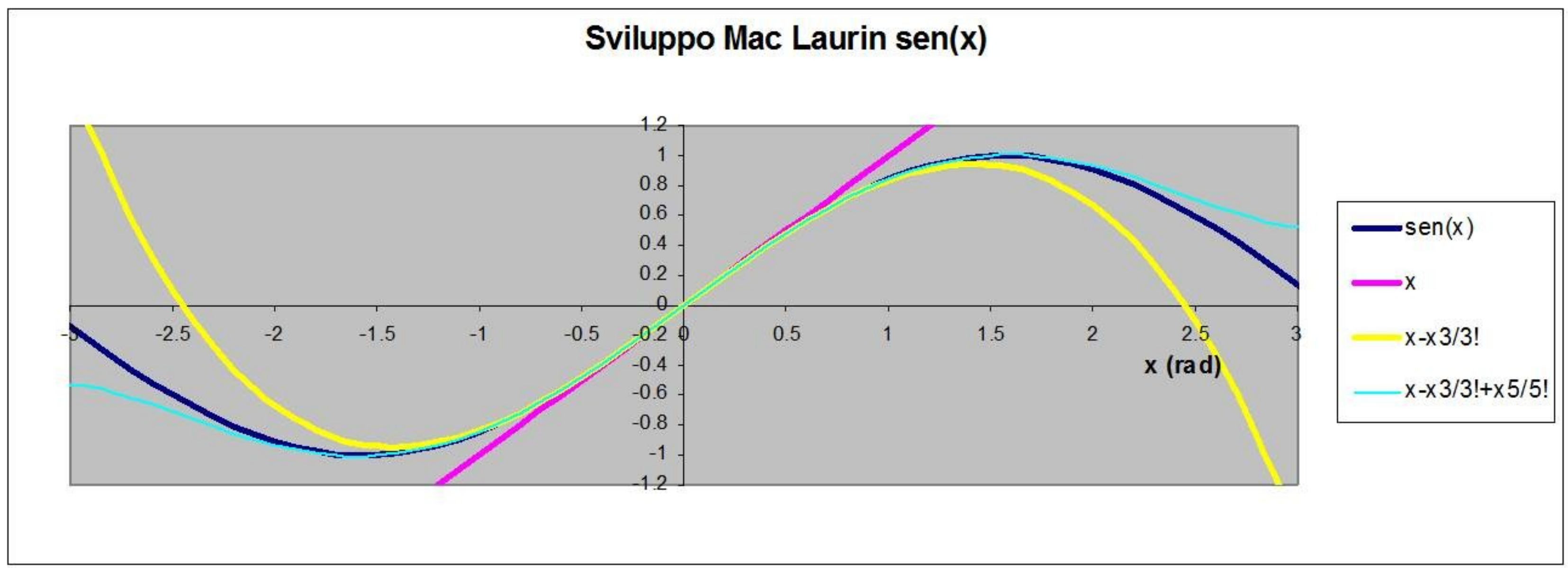
$$(1+x)^{\frac{n}{m}} = 1 + \frac{n}{m}x - \frac{n(m-n)}{2m^2}x^2 + \ldots. \qquad |\, x \,| \leq 1$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots. \qquad |\, x \,| \leq 1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots. \qquad x \epsilon R$$

Valori approssimati delle funzioni

$$\mathrm{sen}(x) = 0 + x \times 1 - \frac{x^2}{2!} \times 0 - \frac{x^3}{3!} \times 1 + ... = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} ....$$



$x(rad)$	$\mathrm{sen}x$	$x-\mathrm{sen}x$	$\frac{x-\mathrm{sen}x}{\mathrm{sen}x}$	$x-\frac{x^3}{3!}-\mathrm{sen}x$	$\frac{x-\frac{x^3}{3!}-\mathrm{sen}x}{\mathrm{sen}x}$
0.01	$0.999983 \cdot 10^{-2}$	$1.67 \cdot 10^{-7}$	$1.67 \cdot 10^{-5}$	$-0.83 \cdot 10^{-12}$	$-0.83 \cdot 10^{-10}$
0.1	$0.99833 \cdot 10^{-1}$	$1.67 \cdot 10^{-4}$	$1.67 \cdot 10^{-3}$	$-0.83 \cdot 10^{-7}$	$-0.83 \cdot 10^{-6}$
0.3	$2.955 \cdot 10^{-1}$	$4.48 \cdot 10^{-3}$	$1.52 \cdot 10^{-2}$	$-2.0 \cdot 10^{-5}$	$-0.68 \cdot 10^{-2}$
0.5	$4.794 \cdot 10^{-1}$	$2.06 \cdot 10^{-2}$	$4.29 \cdot 10^{-2}$	$-2.6 \cdot 10^{-4}$	$-0.54 \cdot 10^{-3}$
0.7	0.6442	$0.558 \cdot 10^{-1}$	$0.866 \cdot 10^{-1}$	$-1.4 \cdot 10^{-3}$	$-2.1 \cdot 10^{-3}$
0.9	0.7833	$1.17 \cdot 10^{-1}$	$1.49 \cdot 10^{-1}$	$-4.8 \cdot 10^{-3}$	$-0.62 \cdot 10^{-2}$

Valori approssimati delle funzioni

Esercizi, esercizi, esercizi…………….

Determinare il numero di cifre significative e l'ordine di grandezza dei risultati delle seguenti misure della grandezza fisica y (Δy indica l'incertezza di misura):

y	2.321	$0.176364 \cdot 10^3$	$2.1533 \cdot 10^{-2}$	$0.0427 \cdot 10^3$
Δy	$3 \cdot 10^{-2}$	0.03	$4 \cdot 10^{-5}$	0.2
[$nr\ c.s.$ $\rightarrow$	3	5	4	3]
[odg $\rightarrow$	10^0	10^2	10^{-2}	10]

Determinare, con approssimazione del 1% e del 0.2%, i valori delle seguenti operazioni:

$\frac{8}{7}$; $\frac{26}{9}$; $\sqrt{18}$; $16^{2.5}$; $(\frac{1}{625})^{\frac{1}{4}}$.

[$\frac{8}{7} \rightarrow 1.14$ e 1.143; $\frac{26}{9} \rightarrow 2.89$ e 2.889; $\sqrt{18} \rightarrow 4.24$ e 4.24; $16^{2.5} = 1.02 \cdot 10^3$ e $1.024 \cdot 10^3$; $(\frac{1}{625})^{\frac{1}{4}} = 2.00 \cdot 10^{-1}$ e $2.000 \cdot 10^{-1}$]

Calcolare i valori delle seguenti funzioni, nei punti indicati, con una approssimazione relativa di 10^{-2}:

sen(x/2) in $x = 0.4°$; $\frac{1}{(8+2x)^2}$ in $x = 4. \cdot 10^{-2}$

$\frac{1}{(1-x)^3}$ in $x = -2. \cdot 10^{-3}$; e^{+x^3} in $x = 0.2$

$\left[sen(x/2) \simeq 3.50 \cdot 10^{-3}; \quad \frac{1}{(8+2x)^2} \simeq 0.0153; \quad \frac{1}{(1-x)^3} \simeq 1.00; \quad e^{+x^3} \simeq 1.01\right]$