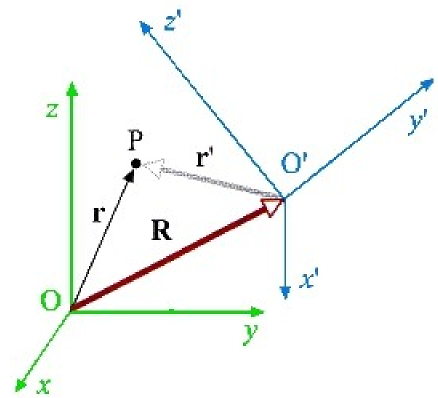
Cinematica dei moti relativi

Carattere relativo del moto --> scelta sistema di riferimento

Cercheremo le leggi di trasformazione “classiche” dei vettori $\underline{v}$ e $\underline{a}$ di uno stesso punto materiale tra due sistemi di riferimento in moto relativo l'uno rispetto all'altro.

Dati due sistemi di riferimento (SdR) **S** e **S'**, indichiamo con $\underline{R}$ il vettore posizione dell'origine O' di S' rispetto all'origine O di S. La posizione di un punto P è individuata in S dal vettore posizione $\underline{r}$ e in S' da $\underline{r}'$; potremo scrivere:



$$\underline{r} = (\underline{r} - \underline{R}) + \underline{R} = \ldots\ldots\ldots\ldots = \underline{r}' + \underline{R}$$

purché valgano le seguenti condizioni:

1) lo spazio sia assoluto --> indipendente da SdR
--> osservatori in S e S' misurano le stesse distanze necessarie per determinare i vettori

2) il tempo sia assoluto --> indipendente da SdR
--> osservatori in S e S' misurano lo stesso intervallo di tempo Δt per determinare la durata di uno stesso fenomeno

--> concetto di contemporaneità necessario per stabilire che le misure sono realizzate allo stesso istante

Nel seguito supporremo sempre che le due precedenti condizioni siano soddisfatte e quindi potremo scrivere

$$\underline{r} = \underline{r}' + \underline{R}$$

Derivate di vettori e SdR

Per un generico vettore $\underline{w}$ potremo scrivere in S e S'

$$\underline{w} = w_x \underline{u}_x + w_y \underline{u}_y + w_z \underline{u}_z = w_x' \underline{u}_x' + w_y' \underline{u}_y' + w_z' \underline{u}_z'$$

La derivata rispetto al tempo di $\underline{w}$ in S è data da

$$(d\underline{w}/dt)_S = (dw_x'/dt)_S \underline{u}_x' + (dw_y'/dt)_S \underline{u}_y' + (dw_z'/dt)_S \underline{u}_z' +$$

$$w_x'(d\underline{u}_x'/dt)_S + w_y'(d\underline{u}_y'/dt)_S + w_z'(d\underline{u}_z'/dt)_S$$

ed inoltre sappiamo che

$$(d\underline{u}_x'/dt)_S = \underline{\omega}_1 \times \underline{u}_x' \qquad (d\underline{u}_y'/dt)_S = \underline{\omega}_2 \times \underline{u}_y' \qquad (d\underline{u}_z'/dt)_S = \underline{\omega}_3 \times \underline{u}_z'$$

Per la permanenza nel tempo dell'ortogonalità tra $\underline{u}_x'$, $\underline{u}_y'$ e $\underline{u}_z'$

si ha che $\quad \underline{\omega}_1 = \underline{\omega}_2 = \underline{\omega}_3 = \underline{\omega}(t)$

dove $\underline{\omega}(t)$ caratterizza il moto rotatorio relativo delle due terne

Per la condizione di tempo assoluto avremo

$$(dw_x'/dt)_S = (dw_x'/dt)_{S'} \qquad \text{e analoghe per y e z}$$

e quindi concludendo otteniamo

$$\mathbf{(d\underline{w} / dt)_S = (d\underline{w} /dt)_{S'} + \underline{\omega} \times \underline{w}}$$

che esprime la variazione nel tempo del vettore $\underline{w}$ come vista nei due SdR

Trasformazione del vettore velocità

Per il vettore velocità nel sistema di riferimento S possiamo scrivere

$\underline{v} = (d\underline{r}/dt)_S = (d\underline{R}/dt)_S + (d\underline{r}\,'/dt)_S = (d\underline{R}/dt)_S + (d\underline{r}\,'/dt)_{S'} + \underline{\omega} \times \underline{r}\,'$

$= (d\underline{R}/dt)_S + \underline{v}\,' + \underline{\omega} \times (\underline{r} - \underline{R}) = \underline{v}\,' + (d\underline{R}/dt)_S + \underline{\omega} \times (\underline{r} - \underline{R})$

$= \underline{v}\,' + \underline{v}_t$ --> **legge di trasformazione delle velocità**

con $\underline{v}_t$ velocità di trascinamento ($\underline{v} = \underline{v}_t$ se $\underline{v}\,' = 0$)

La velocità $\underline{v}$ di un generico punto in S è data dalla somma vettoriale della velocità $\underline{v}\,'$ in S' e della velocità $\underline{v}_t$ in S del punto solidale con S' istantaneamente coincidente con il punto mobile

- Applicazioni -

1) $\underline{\omega} = 0$ --> $\underline{v}_t = (d\underline{R}/dt)_S$ identico per tutti i punti in S'
--> S' effettua un moto di "traslazione" rispetto a S
--> i versori in S' si mantengono paralleli a sé stessi

2) $\underline{\omega} \neq 0$ --> $\underline{v}_t$ varia da punto a punto in S'

caso particolare --> se $(d\underline{R}/dt)_S = 0$ allora

$\underline{v}_t = \underline{\omega}(t) \times (\underline{r} - \underline{R})$

ovvero $\underline{v}_t$ rappresenta la velocità di un punto materiale che si muove in S di moto circolare, con velocità angolare $\underline{\omega}(t)$, sulla circonferenza di asse (variabile nel tempo) parallelo a $\underline{\omega}(t)$ e passante per O'
--> S' è in "rotazione" rispetto a S

Trasformazione del vettore accelerazione

Per il vettore accelerazione nel sistema di riferimento S possiamo scrivere [$\underline{v} = \underline{v}' + (d\underline{R}/dt)_S + \underline{\omega} \times \underline{r}'$]

$$\underline{\mathbf{a}} = (d\underline{v}/dt)_S = (d\underline{v}'/dt)_S + (d^2\underline{R}/dt^2)_S + (d\underline{\omega}/dt)_S \times \underline{r}' + \underline{\omega} \times (d\underline{r}'/dt)_S$$

Utilizzando la relazione $(d\underline{v}'/dt)_S = (d\underline{v}'/dt)_{S'} + \underline{\omega} \times \underline{v}' = \underline{a}' + \underline{\omega} \times \underline{v}'$

ricaviamo infine [ricordando che $(d\underline{r}'/dt)_s = (d\underline{r}'/dt)_{s'} + \underline{\omega} \times \underline{r}'$]

$$\underline{a} = \underline{a}' + \underline{\omega} \times \underline{v}' + (d^2\underline{R}/dt^2)_S + (d\underline{\omega}/dt)_S \times \underline{r}' + \underline{\omega} \times \underline{v}' + \underline{\omega} \times [\, \underline{\omega} \times \underline{r}' \,]$$

$$= \underline{a}' + 2\, \underline{\omega} \times \underline{v}' + (d^2\underline{R}/dt^2)_S + (d\underline{\omega}/dt)_S \times (\underline{r} - \underline{R}) + \underline{\omega} \times [\underline{\omega} \times (\underline{r} - \underline{R})]$$

Da questa otteniamo l'accelerazione di trascinamento $\underline{a}_t$ ponendo $\underline{a}' = 0$ e $\underline{v}' = 0$

$$\underline{\mathbf{a}}_{\mathbf{t}} = (d^2\underline{R}/dt^2)_S + (d\underline{\omega}/dt)_S \times (\underline{r} - \underline{R}) + \underline{\omega} \times [\underline{\omega} \times (\underline{r} - \underline{R})] =$$

$$= \quad \underline{\mathbf{A}} \quad + \quad \underline{\boldsymbol{\alpha}} \quad \times (\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{R}}) + \underline{\boldsymbol{\omega}} \times [\, \underline{\boldsymbol{\omega}} \times (\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{R}})]$$

con $\underline{A}$ accelerazione di O' in S e $\underline{\alpha}$ accelerazione angolare di S' rispetto a S

Se poi si definisce l'accelerazione di Coriolis con la relazione

$$\underline{\mathbf{a}}_{\mathbf{Co}} = 2\, \underline{\boldsymbol{\omega}} \times \underline{\mathbf{v}}'$$

si ottiene infine

$\underline{\mathbf{a}} = \underline{\mathbf{a}}' + \underline{\mathbf{a}}_{\mathbf{t}} + \underline{\mathbf{a}}_{\mathbf{Co}}$ --> **legge di trasformazione delle accelerazioni**

Trasformazione del vettore accelerazione

$\underline{\mathbf{a}} = \underline{a}' + 2\,\underline{\omega} \times \underline{v}' + (d^2\underline{R}/dt^2)_S + (d\underline{\omega}/dt)_S \times (\underline{r} - \underline{R}) + \underline{\omega} \times [\underline{\omega} \times (\underline{r} - \underline{R})]$

$= \underline{\mathbf{a}}' + \underline{\mathbf{a}}_{Co} + \underline{\mathbf{a}}_t$

$\underline{\mathbf{a}}_t = \underline{\mathbf{A}} + \underline{\boldsymbol{\alpha}} \times (\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{R}}) + \underline{\boldsymbol{\omega}} \times [\underline{\boldsymbol{\omega}} \times (\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{R}})]$

$\underline{\mathbf{a}}_{Co} = 2\,\underline{\boldsymbol{\omega}} \times \underline{\mathbf{v}}'$

Commenti

$\underline{\mathbf{a}}_t$ rappresenta l'accelerazione in S del punto solidale con S' in cui viene a trovarsi il punto materiale mobile(per esso $\underline{a}' = 0$ e $\underline{v}' = 0 \rightarrow \underline{a}_{Co} = 0$)

$\underline{\mathbf{a}}_{Co}$ per capirne l'importanza consideriamo il semplice caso in cui O = O' e S' ruota con velocità angolare $\underline{\omega}$ costante (antiorario) intorno a $\underline{u}_z = \underline{u}_z'$ ed inoltre P in quiete in S

→ osservatore in S'
vede ruotare P orario ($-\underline{\omega}$), con velocità
$\underline{v}' = -\underline{\omega} \times \underline{r}$ e con accelerazione centripeta $\underline{a}' = -\omega^2\,\underline{r}$

→ osservatore in S

$$\underline{v} = \underline{v}' + \underline{v}_t = -\underline{\omega} \times \underline{r} + \underline{\omega} \times \underline{r} = 0$$

$$\underline{a} = \underline{a}' + \underline{a}_t + \underline{a}_{Co} = -\omega^2\,\underline{r} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) + 2\,\underline{\omega} \times \underline{v}' =$$

$$= -\omega^2\,\underline{r} \quad - \omega^2\,\underline{r} \quad + 2\,\omega^2\,\underline{r} \quad = 0$$