

# Forze dipendenti dalla velocità

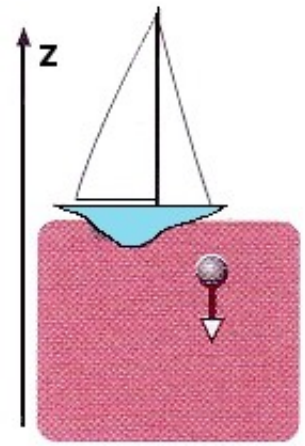
## Attrito Viscoso

Corpo in caduta libera in un fluido

-> resistenza  $f_R$  del mezzo

In casi semplici (geometria semplice, bassa velocità, assenza di turbolenze nel fluido) vale

$$\underline{f}_R = -k \underline{v} \quad (\text{Legge di Stokes})$$



con  $\underline{v}$  velocità relativa corpo-fluido e  $k$  costante dipendente dalla geometria e dalle dimensioni del corpo e dal fluido

Dal secondo principio della dinamica, scelto un sistema di riferimento con asse  $z$  diretto verso l'alto, si ha

$$m\vec{a} = \vec{f}_R + \vec{W} \quad m\ddot{z} = -k\dot{z} - mg$$

equazione differenziale non omogenea con soluzione

$$z(t) = C_1 + C_2 e^{-\left(\frac{k}{m}t\right)} - \frac{mg}{k}t$$

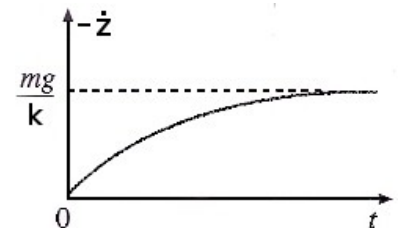
dove  $C_1$  e  $C_2$  dipendono dalle condizioni iniziali.

Se il corpo viene lasciato da una quota  $h$  con velocità nulla si ha

$$z(t) = h + \frac{m^2 g}{k^2} [1 - e^{-\frac{k}{m}t}] - \frac{mg}{k}t$$

e con velocità

$$\dot{z}(t) = -\frac{mg}{k} [1 - e^{-\frac{k}{m}t}]$$



Per corpo sferico di raggio  $r$

(per una superficie piana è circa il doppio, per una affusolata può essere un decimo)

con  $\eta$  **coefficiente di viscosità** del fluido (in unità  $10^{-3}$  Ns/m<sup>2</sup> vale 833 per glicerina, 1.005 per acqua, 0.018 per aria),

$$k = 6 \pi r \eta$$

# Dinamica nei moti circolari

## Moto Circolare Uniforme

Accelerazione (solo) centripeta  $\rightarrow \mathbf{a} = (v^2/r) \mathbf{u}_n$

Dal secondo principio  $\rightarrow$  forza centripeta  $\mathbf{f}_n = m \mathbf{a}$  che può essere fornita da

- filo (pendolo conico),
- attrito (corpo in quiete su piattaforma orizzontale scabra rotante, auto in curva),
- reazione vincolare su superficie di appoggio inclinata (curva parabolica)

## Moto Circolare Non Uniforme

Corpo di massa  $m$  vincolato a muoversi su traiettoria circolare giacente su piano verticale.

Il vincolo deve:

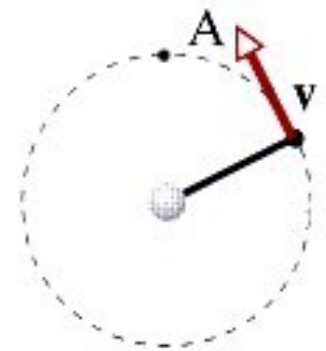
- 1) compensare il peso del corpo
- 2) fornire la necessaria forza centripeta di modulo  $mv^2/d$  ad ogni istante. In particolare, quando la velocità è minima (punto A più alto della traiettoria), per il secondo principio, indicando con  $R(A)$  il modulo del componente radiale della forza del vincolo nel punto più alto, dovrà quindi valere

$$mg + R(A) = mv^2/d \rightarrow R(A) = mv^2/d - mg$$

vincolo bilaterale (sbarretta rigida)  $\rightarrow R(A) > 0$   
oppure  $< 0$

vincolo unilaterale (filo inestendibile)  $\rightarrow R(A) > 0$

Nel caso esaminato dovrà valere  $mv^2/d > mg \rightarrow v^2 > gd$



# Dinamica in presenza di forze centrali

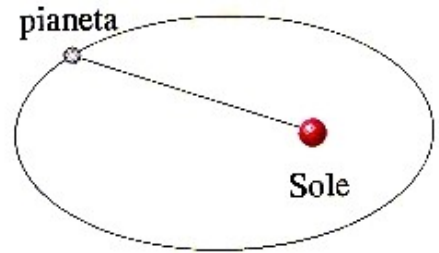
## Leggi di gravitazione

(ricavate sperimentalmente da Keplero, 1600)

**Prima legge:** le orbite descritte dai pianeti attorno al Sole sono ellissi di cui il Sole occupa uno dei due fuochi

**Seconda legge:** il raggio vettore che congiunge il centro del Sole col centro di ogni pianeta spazza aree proporzionali ai tempi impiegati a descriverle

**Terza legge:** I quadrati dei periodi di rivoluzione dei pianeti del Sistema Solare sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori delle orbite ellittiche



Basandosi su queste leggi, Newton concluse che la legge di gravitazione poteva essere espressa nella forma

$$\underline{f}_g = -G (m_p M_s / r^2) \underline{u}_r = -(\alpha / r^2) \underline{u}_r$$

con  $\underline{u}_r$  versore che individua la posizione di  $m_p$  rispetto a  $M_s$  (o viceversa) e

$$G = (6.6726 \pm 0.0008) * 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$$

Infatti

1) imponendo  $d\mathbf{q}/dt = \underline{f}_g = -(\alpha/r^2)\underline{u}_r$  e ricordando  $\underline{u}_r = -d\underline{u}_\theta/d\theta$  si ottiene che il vettore  $(p/\alpha)\underline{v} - \underline{u}_\theta$  (con  $\underline{p} = \underline{r} \times \underline{q}$ ) ha modulo costante (pari a  $e$ ) quindi l'equazione della traiettoria è

$$(1/r) = (m\alpha/p^2)(1 + e \cos \theta)$$

ovvero

l'equazione di una conica in coordinate polari ( $e < 1$  ellisse)

2) costanza velocità areolare

3) la forza gravitazionale fornisce la necessaria forza centripeta e quindi  $f_g / m_p = \omega^2 r = (4\pi^2 / T^2) r \rightarrow T^2 / r^3 = (4\pi^2 / GM_s)$

# Dinamica nei SdR non inerziali

**Sistemi Inerziali** -> accelerazione NON dipendente dal SdR  
-> secondo principio della Dinamica ha  
la stessa forma in tutti i SdR ( $\underline{f} = \underline{f}'$ ,  $\underline{a} = \underline{a}'$ )

**Sistemi Non Inerziali** -> secondo principio non è più valido  
nella forma  $\underline{f} = m\underline{a}$  se  $\underline{f}$  rappresenta  
il risultante delle forze dovute a corpi  
agenti sul punto materiale considerato

Note le caratteristiche di S' (non inerziale) rispetto a  
S (inerziale) avremo

$$\underline{f} = m \underline{a} = m (\underline{a}' + \underline{a}_t + \underline{a}_{co})$$

e quindi

$$m \underline{a}' = \underline{f} - m \underline{a}_t - m \underline{a}_{co} = \underline{f} + \underline{f}_t + \underline{f}_{co} = \underline{f}'$$

ovvero nuovamente la forma del secondo principio ma con  $\underline{f}'$   
che tiene conto anche delle “forze inerziali” o “forze fittizie”

$$\underline{f}_t \text{ (forza di trascinamento)} = - m \underline{a}_t \quad \text{e}$$

$$\underline{f}_{co} \text{ (forza di Coriolis)} = - m \underline{a}_{co}$$

Vediamo nel seguito alcune applicazioni

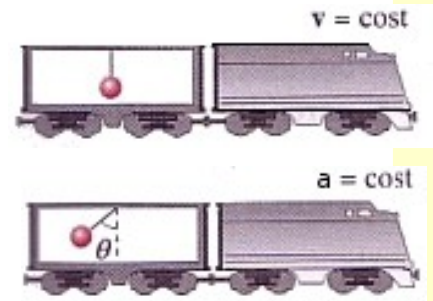
# Dinamica in SdR S' accelerato

## Oggetto in quiete in S'

- > Se S' è fermo o in moto rettilineo uniforme rispetto a S l'oggetto rimane in quiete senza forze applicate
- > Se S' accelera rettilineamente rispetto a S per mantenere l'oggetto in quiete in S' è necessario applicare una forza  $\underline{f}'$  tale che  $\underline{f}' + \underline{f}_t = 0$

## Pendolo di massa m appeso a sostegno fisso in S'

- > Se S' è fermo o in moto rettilineo uniforme rispetto a S il pendolo si dispone lungo la verticale
- > Se S' ha accelerazione rettilinea  $\underline{a}_t$  rispetto a S il pendolo si dispone ad un angolo  $\theta$  rispetto alla verticale



in S -> massa m accelera e quindi, se  $\underline{T}$  è la tensione del filo

$$\underline{P} + \underline{T} = m \underline{a}_t \quad \rightarrow \quad \tan \theta = a_t / g$$

in S' -> massa m in quiete e quindi

$$\underline{P} + \underline{T} + \underline{f}_t = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{T} = -\underline{P} + m \underline{a}_t \\ = -m (\underline{g} - \underline{a}_t)$$

interpretabile come dovuto ad un campo gravitazionale diverso da quello terrestre

## Corpo di massa m lasciato in caduta libera da S'

in S -> massa m, lasciata con velocità iniziale  $\underline{v}_0$ , segue traiettoria parabolica con  $\underline{a} = \underline{g}$

in S' -> massa m in caduta, lungo retta individuata da pendolo, con velocità iniziale nulla ed accelerazione  $\underline{a}' = \underline{g} - \underline{a}_t$

Gli esempi sono indicativi dei fenomeni che permettono ad un osservatore in S' di capire che si trova su un sistema non inerziale e di misurare la sua accelerazione rispetto a S.