Dinamica dei Sistemi

<u>Scopo</u> --> descrizione del moto di sistemi estesi che non possono essere schematizzati come punti materiali

Modello realistico di sistema --> tutte le particelle costituenti il sistema sono trattate come punti materiali ($\approx 10^{23}$ per un corpo di massa di pochi grammi !!!!) --> ingestibile

Modello alternativo --> modello continuo, non particellare, utilizzabile in alcuni casi semplici

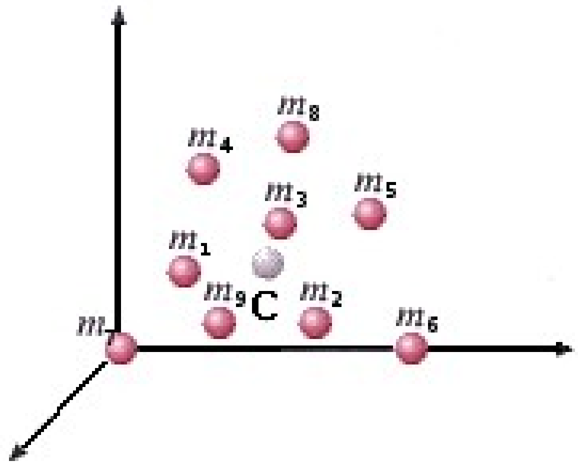
Passaggio da modello particellare (discreto) a modello continuo sostituendo alle singole particelle piccole porzioni di materia, di volume infinitesimo ma contenenti un numero elevato di particelle.

Centro di Massa di un Sistema

1) Sistema discreto

Sistema di n punti materiali di masse m_i e posizioni, in un dato SdR, individuate dai vettori $\underline{r}_i$.

Si definisce "**centro di massa**" **C** il punto geometrico individuato dal vettore



$\underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{CM}} = (\Sigma_{I=1}^{n}\ m_i\ \underline{r}_I) / (\Sigma_{I=1}^{n}\ m_i) =$

$= (\Sigma_{I=1}^{n}\ m_i\ \underline{r}_I) / M$

con $M = (\Sigma_{I=1}^{n}\ m_i)$ massa totale del sistema

In coordinate cartesiane ortogonali

$\mathbf{x}_{\mathbf{CM}} = (\Sigma_{i=1}^{n}\ m_i\ x_i) / M$, $\mathbf{y}_{\mathbf{CM}} = (\Sigma_{i=1}^{n}\ m_i\ y_i) / M$, $\mathbf{z}_{\mathbf{CM}} = (\Sigma_{i=1}^{n}\ m_i\ z_i) / M$

Proprietà distributiva del CM:
il CM di un sistema può essere determinato calcolando la posizione dei CM di un numero qualsiasi di suoi sottinsiemi, assegnando ad essi la massa dei sottinsiemi componenti e poi calcolando il CM globale dei sottinsiemi

Casi semplici

--> 2 corpi di massa uguale: CM si trova nel loro punto mediano

--> sistema con asse di simmetria: CM si trova su di esso

--> sistema con più assi o piani di simmetria: CM è individuato dalle intersezioni tra di essi

Centro di Massa di un Sistema

2) Sistema continuo

Sistema continuo viene suddiviso in n sottinsiemi di masse Δm_i e dimensioni lineari piccole rispetto al sistema originario (ogni sottinsieme --> punto materiale)

Avremo allora

$$\underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{CM}} \approx (\Sigma_{i=1}^{n} \Delta m_i \, \underline{r}_I) / (\Sigma_{i=1}^{n} \Delta m_i) = (\Sigma_{i=1}^{n} \Delta m_i \, \underline{r}_I) / M$$

Facendo tendere a zero le dimensioni lineari dei sottinsiemi (e quindi anche i Δm_i tendono a zero, pur contenendo sempre un numero considerevole di atomi e molecole) si ottiene

$$\underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{CM}} = \int \underline{r} \, dm / \int dm = \int \underline{r} \, dm / M$$

Normalmente l'integrale viene risolto introducendo la densità (di volume $\rho = dm / dV$, superficiale $\sigma = dm / dS$ o lineare $\lambda = dm / dl$) del sistema. Se tale densità è indipendente dalla posizione avremo

$$\underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{CM}} = \int \underline{r} \, dm / \int dm = \int \underline{r} \, \rho \, dV / \int \rho \, dV = \int \underline{r} \, dV / V$$

che quindi dipende solo dalla forma geometrica del sistema

Moto del Centro di Massa

Per un sistema di punti materiali si definisce "quantità di moto" del sistema il vettore

$$\underline{Q} = \Sigma_i \, \underline{q}_i = \Sigma_i m_i \underline{v}_i \qquad (= \int \underline{v}\, dm \text{ nel caso continuo})$$

Derivando rispetto al tempo la relazione che definisce il CM si ricava

$$\underline{v}_{CM} = (\Sigma_i m_i \underline{v}_i) / M \quad \text{-->} \quad \mathbf{M \underline{v}_{CM} = (\Sigma_i m_i \underline{v}_i) = \underline{Q}}$$

Ai fini del calcolo della quantità di moto, l'intero sistema può essere trattato come un punto materiale coincidente con il CM e avente massa pari alla massa totale

Per la dinamica di un punto materiale abbiamo ottenuto la relazione $\underline{F} = d\underline{q}/dt$. Per generalizzare ad un sistema di punti materiali dovremo fare prima una distinzione
- **"forze interne"** al sistema: agenti tra punti del sistema
- **"forze esterne"** al sistema: interazione con ambiente esterno

Se ora calcoliamo la derivata rispetto al tempo della quantità di moto del sistema abbiamo

$$d\underline{Q} / dt = d(\Sigma_i \underline{q}_i)/dt = \Sigma_i (d\underline{q}_i /dt) =$$
$$= \Sigma_i \underline{f}_i = \Sigma_i \underline{f}_i^{(i)} + \Sigma_i \underline{f}_i^{(e)} = \underline{F}^{(i)} + \underline{F}^{(e)}$$

dove $\underline{f}_i$ è il risultante delle forze agenti sul punto materiale P_i.
Per il Principio di azione e reazione si ha

$$\underline{F}^{(i)} = \Sigma_i \underline{f}_i^{(i)} = \Sigma_{ij} \underline{f}_{i(j)} = 0 \quad \text{in quanto} \quad \underline{f}_{i(j)} = - \underline{f}_{j(i)}$$

avendo indicato con $\underline{f}_{i(j)}$ la forza con cui il punto materiale j agisce sul punto materiale i (con j ≠ i)

Moto del Centro di Massa

Avremo quindi

$$\underline{F}^{(e)} = \Sigma_i \, \underline{f}_i^{(e)} = d(\underline{Q}) / dt \qquad (1)$$

detta "Prima Equazione della Dinamica" dei sistemi di punti materiali.

Quando il sistema è **"isolato"** il risultante delle forze esterne è nullo e quindi $\underline{Q}$ = costante

cioè **la quantità di moto totale di conserva**. Tale conservazione stabilisce un legame tra le quantità di moto dei singoli sottinsie-mi di un sistema, indipendentemente dalle forze ad esso interne (ex. quantità di moto opposte tra pistola e proiettile nello sparo)

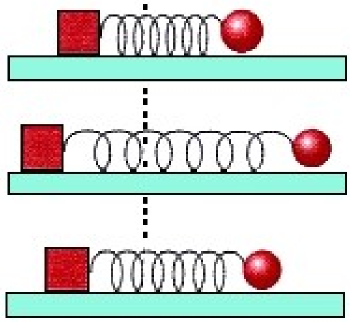
La relazione (1) può anche essere riscritta nella forma

$$\underline{F}^{(e)} = d(M\underline{v}_{CM}) / dt = M\underline{a}_{CM}$$

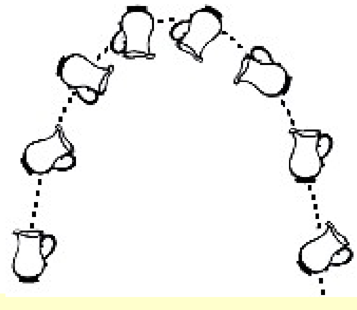
Tale relazione mostra che il CM di un sistema si muove come un punto materiale nel quale sia concentrata l'intera massa del sistema e sul quale agisca il risultante delle forze esterne applicate ai punti del sistema

Applicazioni

1) molla con attaccati agli estremi due corpi di massa diversa. Se si allunga la molla e poi la si lascia andare, i due corpi oscillano mantenendo fermo il CM



2) oggetto lanciato in aria con una certa velocità iniziale. Il CM del corpo compie la traiettoria parabolica ricavata nel caso del punto materiale



Momento angolare di un sistema

La Prima Equazione della Dinamica dei sistemi permette di studiare il moto traslatorio di un sistema di punti materiali ma nulla dice sui moti rotatori.

A tal fine si definisce il "**momento angolare totale**" di un sistema di punti materiali rispetto ad un polo Ω tramite la relazione

$\underline{P}_{\Omega} = \Sigma_i (\underline{r}_i - \underline{r}_{\Omega}) \times \underline{q}_i = \Sigma_i \underline{p}_i$ $\quad$ ($\underline{P}_{\Omega} = \int (\underline{r} - \underline{r}_{\Omega}) \times d\underline{q}$ continuo)

Per un punto materiale --> $\quad d\underline{p}/dt = \underline{M}_{\Omega} - \underline{v}_{\Omega} \times \underline{q}$ $\quad$ e quindi

$$d\underline{P}_{\Omega}/dt = d(\Sigma_i \underline{p}_i)/dt = \Sigma_i\, d\underline{p}_i/dt = \Sigma_i \underline{M}_{i\,\Omega} - \Sigma_i (\underline{v}_{\Omega} \times \underline{q}_i) =$$
$$= \Sigma_i \underline{M}_{i\,\Omega} - \underline{v}_{\Omega} \times \underline{Q}$$

ma $\underline{Q} = M\, \underline{v}_{CM}$ $\quad$ e quindi

$$d\underline{P}_{\Omega}/dt = \Sigma_i \underline{M}_{i\,\Omega} - M\, \underline{v}_{\Omega} \times \underline{v}_{CM} = \underline{M}_{\Omega} - M\, \underline{v}_{\Omega} \times \underline{v}_{CM}$$

Anche in questo caso potremo separare il contributo delle forze interne ed esterne $\underline{M}_{\Omega} = \underline{M}_{\Omega}^{(i)} + \underline{M}_{\Omega}^{(e)}$ e, tenendo conto del principio di azione e azione ricavare

$$\underline{M}_{\Omega}^{(i)} = \Sigma_{i\,j} [(\underline{r}_i - \underline{r}_{\Omega}) \times \underline{f}_{i\,(j)} + (\underline{r}_j - \underline{r}_{\Omega}) \times \underline{f}_{j\,(i)}] =$$
$$= \Sigma_{i\,j} (\underline{r}_i - \underline{r}_j) \times \underline{f}_{i\,(j)} = 0 \text{ in quanto } (\underline{r}_i - \underline{r}_j) \,//\, \underline{f}_{i\,(j)}.$$

Concludendo $\quad d\underline{P}_{\Omega}/dt = \underline{M}_{\Omega}^{(e)} - M\, \underline{v}_{\Omega} \times \underline{v}_{CM}$

Se $\underline{v}_{\Omega} = 0$
o $\underline{v}_{\Omega} = \underline{v}_{CM}$
o $\Omega \equiv CM$

$$d\underline{P}_{\Omega}/dt = \underline{M}_{\Omega}^{(e)}$$

(Seconda Equazione della Dinamica dei Sistemi)

Momento angolare di un sistema

ATTENZIONE!!!!!

Ai fini del calcolo del momento della quantità di moto di un sistema **NON** è lecito sostituire il sistema con un solo punto di massa M posto nel CM !!!!

Infatti, ponendo per comodità il polo Ω nell'origine O del SdR, si ha

$$\underline{P}_{\Omega} = \Sigma_i\ \underline{r}_i \times \underline{q}_i = \Sigma_i (\underline{r}_i' + \underline{r}_{CM}) \times \underline{q}_i = \underline{P}_{CM} + \underline{r}_{CM} \times \underline{Q} =$$
$$= \underline{P}_{CM} + \underline{r}_{CM} \times M\, \underline{v}_{CM}$$

dove $\underline{P}_{CM} = \Sigma_i\ \underline{r}_i' \times \underline{q}_i = \Sigma_i (\underline{r}_i - \underline{r}_{CM}) \times \underline{q}_i$ è il momento angolare rispetto al CM. Quindi **il momento angolare rispetto ad un qualsiasi polo è dato dalla somma di quello rispetto al CM e del termine $\underline{r}_{CM} \times M\underline{v}_{CM}$.**

EQUAZIONI CARDINALI DELLA MECCANICA

$$\underline{F}^{(e)} = d(\underline{Q}) / dt$$
$$\underline{M}_{\Omega}^{(e)} = d\underline{P}_{\Omega}/dt$$

rappresentano la massima conoscenza possibile sulle relazioni fra le grandezze fisiche $\underline{Q}$ e $\underline{P}_{\Omega}$ e le cause della loro variazione.

- ► valide in SdR inerziali ma possono essere utilizzate anche in SdR non inerziali purché si tenga conto di forze fittizie.

- ► corrispondono a 6 equazioni scalari (numero piccolo rispetto a 3n coordinate di n particelle, se non n=2)

- ► per un sistema isolato

  $\underline{F}^{(e)} = 0$ e $\underline{M}^{(e)} = 0$ --> $\underline{Q}$=cost e $\underline{P}_{\Omega}$ = cost

Dinamica dei sistemi di punti materiali

Punto materiale	**Sistema di punti materiali**
$\underline{q} = m\underline{v}$	$\underline{Q} = M\,\underline{v}_{CM}$
Prima Equ	
$d\underline{q}/dt = \underline{F}$	$d\underline{Q}/\,dt = \underline{F}^{(e)} = M\,\underline{a}_{CM}$
Seconda Equ	
$d\underline{p}_{\Omega}/dt = \underline{\mathit{M}}_{\Omega}$	$d\underline{P}_{\Omega}/\,dt = \underline{\mathit{M}}_{\Omega}^{(e)} - M\,\underline{v}_{\Omega} \times \underline{v}_{CM}$
	se $\Omega = CM$ -> $d\underline{P}_{CM}/\,dt = \underline{\mathit{M}}_{CM}^{(e)}$
	se $\underline{v}_{\Omega} = 0$ -> $d\underline{P}_{\Omega}/\,dt = \underline{\mathit{M}}_{\Omega}^{(e)}$
	$\underline{P}_{\Omega} = \underline{P}_{CM} + \underline{r}_{CM} \times M\,\underline{v}_{CM}$

Sistemi di forze parallele

Consideriamo un sistema di punti materiali sui quali agiscono forze parallele (ex. forza peso se il sistema ha dimensioni limitate rispetto a quelle della Terra)

$\underline{u}$ --> versore comune alle forze $\underline{f}_i = f_i\, \underline{u}$

$\underline{r}_i$ --> vettori posizione dei loro punti di applicazione

Questo sistema di forze è equivalente al semplice sistema costituito dalla forza $\underline{F} = \Sigma_i f_i\, \underline{u}$

applicata nel punto individuato dal vettore posizione $\underline{r}_f = \Sigma_i f_i\, \underline{r}_i / \Sigma_i f_i$

I due sistemi di forze hanno infatti:

► stesso risultante

► stesso momento risultante $\underline{M}$ rispetto a qualsiasi polo

Infatti

$$\underline{M} = \Sigma_i (\underline{r}_i \times f_i\, \underline{u}) = (\Sigma_i f_i\, \underline{r}_i) \times \underline{u} = (\Sigma_i f_i)\, \underline{r}_f \times \underline{u} = \underline{r}_f \times \underline{F}$$

Forze peso

$\underline{g} = -g\, \underline{u}_z$ --> $\underline{f}_i = \underline{w}_i = m_i\, \underline{g} = -m_i\, g\, \underline{u}_z$

e quindi

$\underline{F} = \underline{W} = M\, \underline{g}$ e $\underline{r}_f = \Sigma_i m_i\, \underline{r}_i / M = \underline{r}_{CM}$

$\underline{W}$ = “forza peso totale del sistema”

$\underline{r}_f$ = “baricentro del sistema” (coincidente con CM per corpi non molto estesi)

Altri casi

► reazioni vincolari esercitate da piano di appoggio liscio su corpo esteso

► forze fittizie associate ad accelerazione di trascinamento costante