

Sistemi Rigidi

Sistema rigido

- > **corpo indeformabile** (distanze costanti tra le coppie dei punti materiali costituenti) qualsiasi siano le forze esterne agenti su di esso
- > in realtà tutti i corpi sottoposti a forze si deformano e **quindi** quella del corpo rigido è un'utile **schematizzazione** che ne permette lo studio del moto

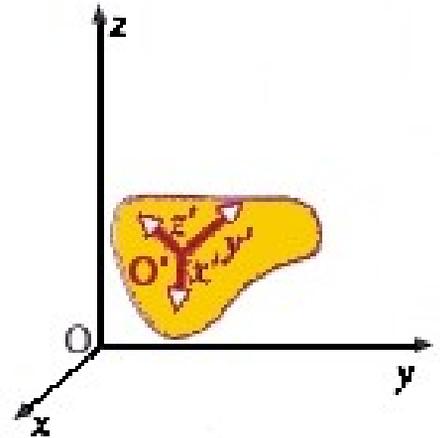
--> la **posizione del CM rimane invariata** rispetto a quella dei punti materiali

--> ha **6 gradi di libertà**: una terna di assi cartesiani ortogonali **S'** solidale con esso sarebbe individuata, rispetto ad un sistema di riferimento fisso **S**, da

- 3 coordinate dell'origine
- 9 coseni direttori ma solo 3 indipendenti per le condizioni di ortonormalità

--> il moto del sistema può essere ricondotto a quello del

moto di una terna cartesiana rispetto all'altra



Cinematica dei Sistemi Rigidi

Per la velocità di un punto P del sistema rigido avremo

$$\underline{v}(P) = \underline{v}'(P) + \underline{v}_t$$

dove \underline{v}_t è la velocità di trascinamento (velocità in S del punto solidale con S' coincidente a ogni istante con il punto P).

Ma in S' le velocità $\underline{v}'(P)$ dei punti materiali sono tutte nulle!

Quindi

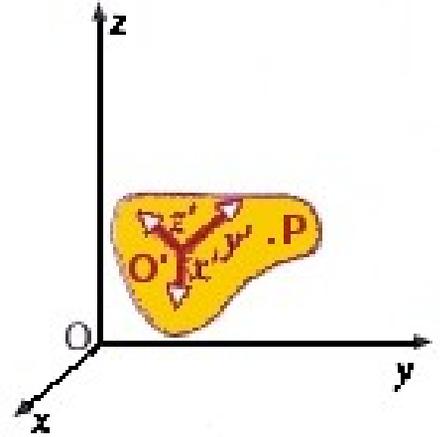
$$\underline{v}(P) = \underline{v}_t = \underline{V}(t) + \underline{\omega}(t) \times [\underline{r}(t) - \underline{R}(t)]$$

dove $\underline{V}(t) = (d\underline{R}/dt)_S$,

$\underline{r}(t)$ vettore posizione di P in S

$\underline{R}(t)$ vettore posizione dell'origine O' di S' in S

$\underline{\omega}(t)$ velocità angolare di S' rispetto a S



Per due punti A e B del sistema rigido avremo

$$\underline{v}(B) = \underline{v}(A) + \underline{\omega}(t) \times [\underline{r}(B) - \underline{r}(A)]$$

ed in generale

$$\underline{v} = \underline{v}_{CM} + \underline{\omega}(t) \times [\underline{r} - \underline{r}_{CM}]$$

dove \underline{v}_{CM} e \underline{r}_{CM} si riferiscono al centro di massa.

Il moto di un qualsiasi punto del sistema rigido può essere ricondotto a una combinazione di una traslazione e di una rotazione attorno ad un asse.

Traslazione dei Sistemi Rigidi

Nel caso di traslazione del sistema rigido valgono le seguenti relazioni

$$\underline{v} = \underline{v}_{CM}$$

$$\underline{Q} = M \underline{v}_{CM} \quad (\text{valida sempre})$$

$$\begin{aligned} \underline{P}_{CM} &= \sum_i (\underline{r}_i - \underline{r}_{CM}) \times \underline{q}_i = \sum_i (\underline{r}_i - \underline{r}_{CM}) \times m_i \underline{v}_i = \\ &= \sum_i (\underline{r}_i - \underline{r}_{CM}) \times m_i \underline{v}_{CM} = \\ &= \sum_i (m_i \underline{r}_i - m_i \underline{r}_{CM}) \times \underline{v}_{CM} = 0 \end{aligned}$$

$$\underline{P}_{\Omega} = \underline{P}_{CM} + (\underline{r}_{CM} - \underline{r}_{\Omega}) \times \underline{Q} = (\underline{r}_{CM} - \underline{r}_{\Omega}) \times \underline{Q}$$

e per la dinamica

Prima equazione cardinale della dinamica

$$\underline{F}^{(e)} = d\underline{Q} / dt = M \underline{a}_{CM}$$

Seconda equazione cardinale della dinamica

$$\text{polo} = CM \quad \underline{M}_{CM}^{(e)} = d\underline{P}_{CM} / dt = 0$$

polo = Ω (fisso, $\underline{v}_{\Omega} = 0$,
oppure appartenente al sistema rigido, $\underline{v}_{\Omega} = \underline{v}_{CM}$)

$$\begin{aligned} \underline{M}_{\Omega}^{(e)} &= d\underline{P}_{\Omega} / dt = d[(\underline{r}_{CM} - \underline{r}_{\Omega}) \times \underline{Q}] / dt = \\ &= (d\underline{r}_{CM} / dt) \times \underline{Q} - (d\underline{r}_{\Omega} / dt) \times \underline{Q} + (\underline{r}_{CM} - \underline{r}_{\Omega}) \times d\underline{Q} / dt \\ &= \underline{v}_{CM} \times \underline{Q} - \underline{v}_{\Omega} \times \underline{Q} + (\underline{r}_{CM} - \underline{r}_{\Omega}) \times d\underline{Q} / dt \\ &= (\underline{r}_{CM} - \underline{r}_{\Omega}) \times d\underline{Q} / dt = (\underline{r}_{CM} - \underline{r}_{\Omega}) \times M \underline{a}_{CM} \end{aligned}$$

Rotazione con asse fisso dei Sistemi Rigidi

Scegliamo i due sistemi S e S' con gli assi z e z' coincidenti con l'asse di rotazione ed inoltre $O = O'$. Con tale scelta nella relazione

$$\underline{v}(P) = \underline{v}_t = \underline{V}(t) + \underline{\omega}(t) \times [\underline{r}(t) - \underline{R}(t)]$$

si ha $\underline{V}(t) = 0$ e $\underline{R} = 0$ e quindi per ogni punto materiale costituente il sistema

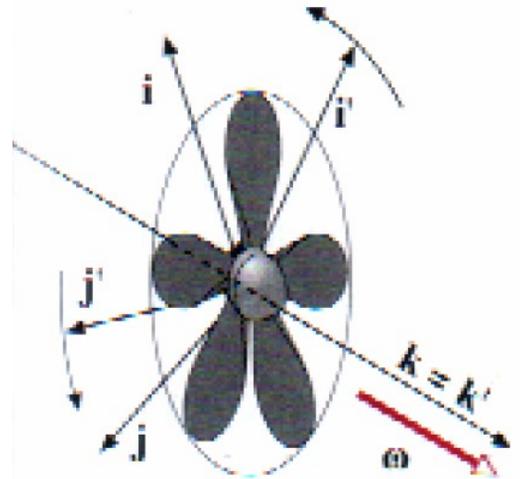
$$\underline{v}_i = \underline{\omega}(t) \times \underline{r}_i$$

I punti del sistema rigido (e quindi anche il CM), immobili in S', descrivono in S traiettorie circolari con il centro sull'asse di rotazione.

In tal caso valgono le seguenti relazioni

$$\underline{Q} = M \underline{v}_{CM} \neq 0 \text{ se CM non sta su asse fisso}$$

$$\underline{P}_O = \sum_i \underline{r}_i \times \underline{q}_i = \sum_i \underline{r}_i \times m_i [\underline{\omega} \times \underline{r}_i]$$



Rotazione con asse fisso dei Sistemi Rigidi

$\underline{Q} = M \underline{v}_{CM} \neq 0$ se CM non sta su asse fisso

$$\underline{P}_O = \sum_i \underline{r}_i \times \underline{q}_i = \sum_i \underline{r}_i \times m_i [\underline{\omega} \times \underline{r}_i]$$

Potremo scomporre il vettore \underline{r}_i in un componente lungo l'asse ($z_i \underline{u}_z$) e in uno perpendicolare all'asse ($\underline{\rho}_i$) e avere

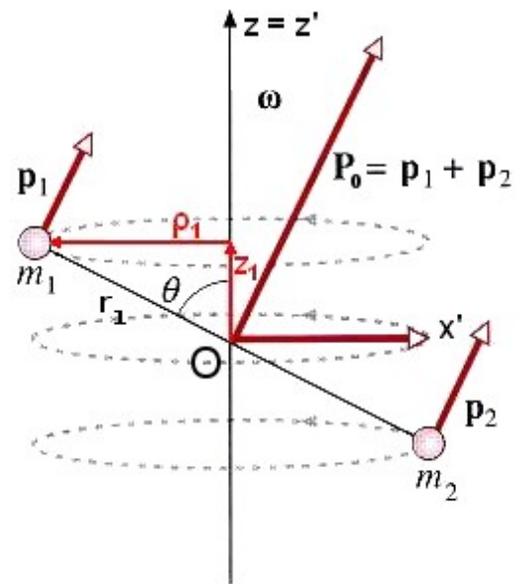
$$\begin{aligned} \underline{P}_O &= \sum_i (z_i \underline{u}_z + \underline{\rho}_i) \times m_i [\underline{\omega} \times (z_i \underline{u}_z + \underline{\rho}_i)] = \dots\dots\dots \\ &= - \sum_i m_i z_i \omega \underline{\rho}_i + \sum_i m_i \rho_i^2 \underline{\omega} \end{aligned}$$

In generale \underline{P}_O non è quindi parallelo a $\underline{\omega}$ e può essere scomposto in due componenti:

$$\underline{P}_{//} = \sum_i m_i \rho_i^2 \underline{\omega} = \underline{I} \underline{\omega}$$

con $\underline{I} = \sum_i m_i \rho_i^2$ momento di Inerzia (assiale)

$$\underline{P}_{\perp} = - \sum_i m_i z_i \omega \underline{\rho}_i$$



Se asse rotazione = asse di simmetria

$$\rightarrow \underline{P}_{\perp} = 0$$

In caso contrario: Sistema rigido -->

--> $\underline{\rho}_i$ ruotano intorno ad asse fisso con velocità angolare $\underline{\omega}$

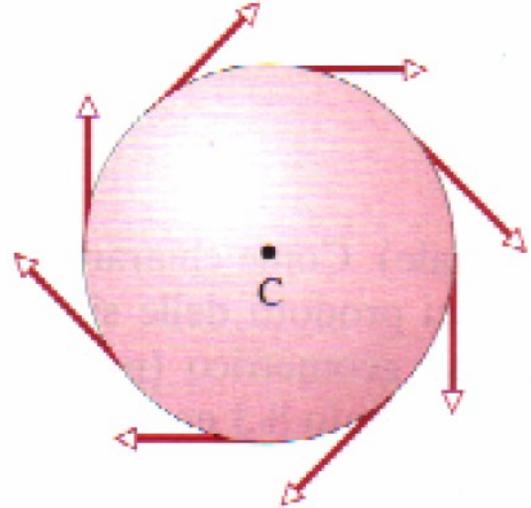
--> \underline{P}_{\perp} ruota con vel. angolare $\underline{\omega}$ (precessione intorno all'asse)

Rotazione con asse variabile dei Sistemi Rigidi

Esempio: Rotolamento di una ruota

Come SdR S' scegliamo un SdR con origine nel CM della ruota e assi che si mantengono paralleli a sé stessi.

In S' tutti i punti della ruota si muovono con vel. angolare $\underline{\omega}$.
Ma S' si muove con velocità \underline{v}_{CM} e quindi avremo



$$\underline{v}_i = \underline{v}_{CM} + \underline{\omega} \times (\underline{r}_i - \underline{r}_{CM})$$

Rotolamento puro: la velocità del punto di contatto (istantaneo) \underline{P}^* fra la ruota e la superficie di appoggio è nulla. In tal caso avremo che

$$\begin{aligned} \underline{0} &= \underline{v}_{CM} + \underline{\omega} \times (\underline{r}^* - \underline{r}_{CM}) \quad \rightarrow \quad \underline{v}_{CM} = \underline{\omega} \times (\underline{r}_{CM} - \underline{r}^*) \\ &\quad \rightarrow \quad \underline{v}_i = \underline{\omega} \times (\underline{r}_i - \underline{r}^*) \end{aligned}$$

ovvero l'espressione di un moto rotatorio, attorno ad un asse // a $\underline{\omega}$ e passante per \underline{P}^* . Tale asse viene detto "asse istantaneo di rotazione".

Anche in questo caso varranno le relazioni:

$$\underline{Q} = \underline{M} \underline{v}_{CM}$$

$$\underline{P} = \underline{I} \underline{\omega} + \underline{P}_\perp$$

purché \underline{P} sia calcolato rispetto ad un polo giacente sull'asse di rotazione (ovvero \underline{P}^*)

Momento d'inerzia

Definizione: $\mathbf{I} = \sum_i m_i \rho_i^2$ --> Grandezza Scalare Estensiva

Per un sistema continuo $\mathbf{I} = \int \rho^2 dm$

Il momento di inerzia ha nelle rotazioni lo stesso ruolo della massa inerziale nelle traslazioni

Nella tabella sono riportati i momenti d'inerzia rispetto al CM in alcune geometrie semplici

Corpo	Dimensione	Asse	Momento Inerzia
Disco	raggio R	\perp al Disco	$(\frac{1}{2}) M R^2$
Disco	raggio R	Diametro	$(\frac{1}{4}) M R^2$
Cilindro retto	raggio R	Asse Cilindro	$(\frac{1}{2}) M R^2$
Cilindro retto cavo	raggi Ri e Re	Asse Cilindro	$(\frac{1}{2}) M (R_i^2 + R_e^2)$
Sfera	raggio R	Diametro	$(\frac{2}{5}) M R^2$
Asta	lunghezza L	\perp ad Asta	$(\frac{1}{12}) M L^2$
Asta rettangolare	lati a, b	\perp ad Asta	$(\frac{1}{12}) M (a^2 + b^2)$

Teorema di Huygens-Steiner

“Il momento di inerzia \mathbf{I} di un corpo di massa M rispetto ad un asse è dato dalla somma di quello rispetto ad un asse parallelo e passante per il centro di massa e del termine Md^2 con d distanza tra gli assi”

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_{CM} + M d^2$$

Infatti, preso un SdR cartesiano ortogonale con asse z diretto lungo l'asse rispetto al quale si vuol determinare \mathbf{I} e asse x passante per il CM (di coordinata d) e indicando con X, Y e Z le coordinate dei punti in un SdR con origine nel CM avremo

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \sum_i m_i \rho_i^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum_i m_i [(X_i + d)^2 + Y_i^2] = \\ &= \sum_i m_i (X_i^2 + Y_i^2) + \sum_i m_i d^2 + 2d \sum_i m_i X_i = \mathbf{I}_{CM} + M d^2 \end{aligned}$$