Le incertezze sperimentali nelle misure con strumenti "tarati"

Strumento "tarato": strumento che fornisce direttamente, tramite lo spostamento di un indice o l'indicazione di uno schermo, il valore della grandezza che si vuol misurare, senza bisogno di campioni né della conoscenza della funzione che lega lo spostamento dell'indice.

Oltre alle caratteristiche prima menzionate per le misure dirette è necessario conoscere la "sensibilità dello strumento":

Risposta R dello strumento: $\boxed{R(\psi)}$ **ovvero la "curva di taratura" dello strumento che può essere una funzione lineare, quadratica, logaritmica (diversa spaziatura tra divisioni)**

Errore di taratura -> $\boxed{\Delta\psi}$ **massima differenza tra l'indicazione dello strumento e il valore "vero" della grandezza**

Sensibilità media $\boxed{<\sigma>=|\ R_2 - R_1\ |\ /\ |\ \psi_2 - \psi_1\ |}$

Errore di sensibilità $\boxed{\Delta\psi_m = \Delta R_m/\sigma(\psi)}$

Errore di riproducibilità: a ψ **fissato** $R_i(\psi)$ $\boxed{\delta\psi = \delta R/\ |\ \sigma(\psi)\ |}$

L'errore dello strumento è, in generale, la somma dei tre contributi.

Concludendo ………
(misure dirette o con strumenti tarati)

Si possono presentare le seguenti tipologie di misure:

Misura singola: "eventi rari"
- la miglior stima del valore della grandezza sarà l'unico valore misurato
- la miglior stima dell'incertezza di misura sarà data dalla somma di tutti i contributi precedentemente elencati (procedura analoga a quella della stima "a priori")

Misure in numero limitato (≈10/20):

Siano $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_{10}$ i valori misurati.

Se $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots\ldots = x_{10}$ siamo nelle stesse condizioni della misura singola.

Se $x_1 \neq x_2 \neq x_3 \neq \ldots\ldots \neq x_{10} \rightarrow$ errore di riproducibilità significativo

- la miglior stima del valore della grandezza è "ragionevolmente" data dalla media definita da

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10}$$

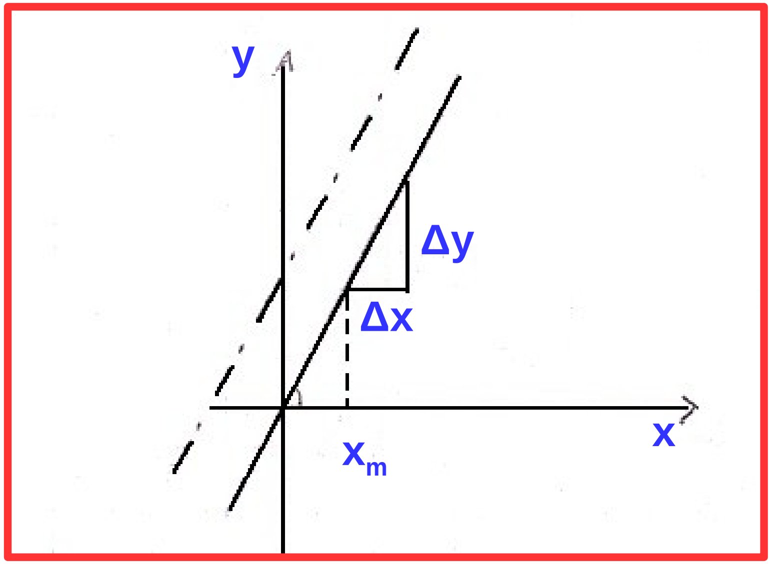
- la miglior stima dell'incertezza di riproducibilità sarà data dallo scarto massimo definito da

$$\Delta x = \max | x_i - \overline{x} |$$

Misure in gran numero: sarà possibile una trattazione statistica dei dati

Propagazione delle incertezze nelle misure indirette
dipendenza da una grandezza

RELAZIONE LINEARE $y = kx$ con k noto



x misurata direttamente → $x_m \pm \Delta x$

$y_m \pm \Delta y$?????

Dal grafico

$$y_m = k\, x_m$$

e

$$\Delta y = k\, \Delta x$$

Sia la stima del valore "vero" che quella dell'incertezza si moltiplicano per lo stesso fattore k (coeff. angolare della retta)

Per l'incertezza relativa

$$\Delta y \,/\, |y_m| = \Delta x \,/\, |x_m|$$ (incertezze relative uguali!!!)

Ma se fosse stato $y = kx + h$ con k e h noti avremmo avuto

$y_m = k\, x_m + h$ e $\Delta y = k\, \Delta x$ da cui $\Delta y \,/\, |y_m| = k\Delta x \,/\, |k x_m + h|$

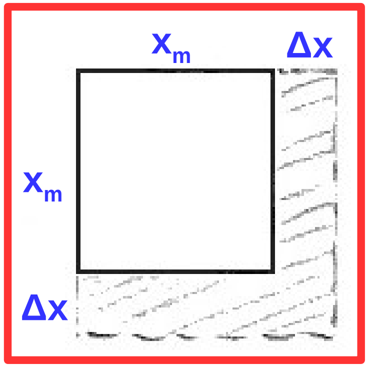
Propagazione delle incertezze nelle misure indirette
dipendenza da una grandezza

<u>RELAZIONE QUADRATICA</u> $y = x^2$

x misurata direttamente → $x_m \pm \Delta x$

$y_m \pm \Delta y$?????

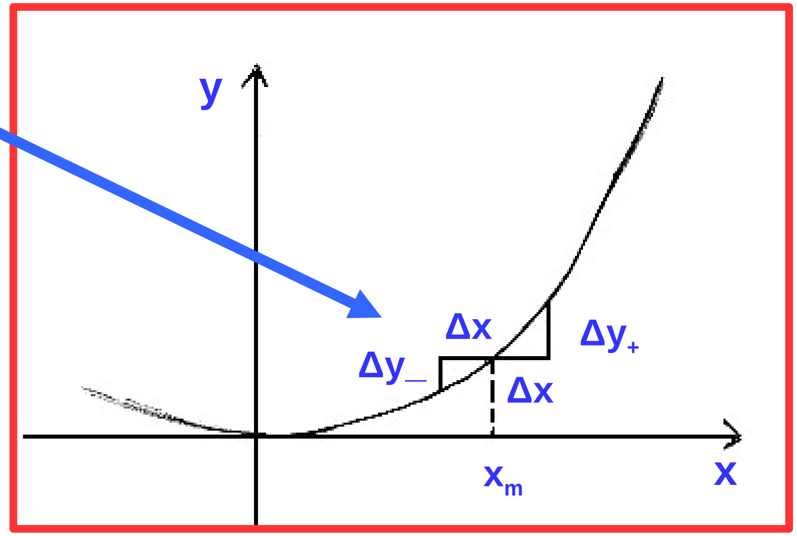
Analogo geometrico



Area del quadrato

$y_m = x_m^2$

e



$\Delta y_+ = (x_m + \Delta x)^2 - (x_m)^2 = \ldots\ldots = 2\, x_m\, \Delta x + (\Delta x)^2$

E inoltre se avessimo dato un incremento negativo al lato avremmo ottenuto

$\Delta y\_ = (x_m - \Delta x)^2 - (x_m)^2 = \ldots\ldots = -\,2\, x_m\, \Delta x + (\Delta x)^2$ ovvero una incertezza asimmetrica.

Se però la misura su x è sufficientemente precisa (cioè $\Delta x / |x_m| \ll 1$) allora

$\Delta y_+ \approx \Delta y\_$ e potremo ricavare $\Delta y = 2\, x_m\, \Delta x$

La stima del valore dell'incertezza si ottiene moltiplicando Δx per $2\, x_m$ (coeff. angolare della retta tangente alla curva in x_m)

Per l'incertezza relativa $\Delta y / |y_m| = 2\, \Delta x / |x_m|$ (valida anche nel caso $y = k\, x^2$)

Ma se fosse stato $y = k\, x^2 + h$ → $\Delta y / |y_m| = 2\, x_m\, \Delta x / |k\, x_m^2 + h|$

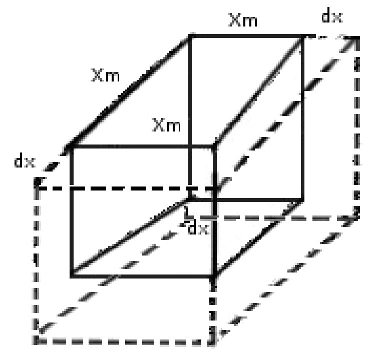
Propagazione delle incertezze nelle misure indirette
dipendenza da una grandezza

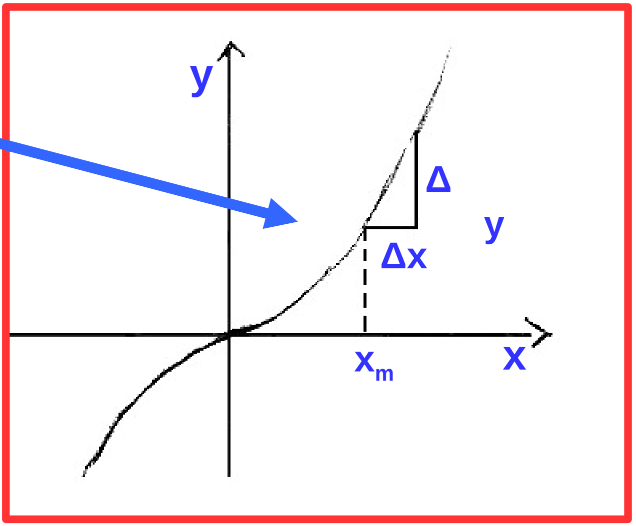
RELAZIONE CUBICA $y = x^3$

X misurata direttamente → $x_m \pm \Delta x$

$y_m \pm \Delta y$?????

Analogo geometrico





Volume del cubo

$y_m = x_m^3$

e

$\Delta y_+ = (x_m + \Delta x)^3 - (x_m)^3 = \ldots\ldots = 3\,x_m^2\,\Delta x + 3\,x_m\,(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$

E inoltre se avessimo dato un incremento negativo al lato avremmo ottenuto

$\Delta y_- = (x_m - \Delta x)^3 - (x_m)^3 = \ldots\ldots = -3\,x_m^2\,\Delta x + 3\,x_m\,(\Delta x)^2 - (\Delta x)^3$ ancora incertezza asimmetrica.

Se però la misura su x è sufficientemente precisa (cioè $\Delta x / |x_m| \ll 1$) allora

$\Delta y_+ \approx \Delta y_-$ e potremo ricavare $\Delta y = 3\,x_m^2\,\Delta x$

La stima del valore dell'incertezza si ottiene moltiplicando Δx per $3\,x_m^2$ (coeff. angolare della retta tangente alla curva in x_m)

Per l'incertezza relativa $\Delta y / |y_m| = 3\,\Delta x / |x_m|$ (valida anche nel caso $y = k\,x^3$)

Ma se fosse stato $y = k\,x^3 + h$ → $\Delta y / |y_m| = 3\,x_m^2\,\Delta x / |k\,x_m^3 + h|$

Propagazione delle incertezze nelle misure indirette
dipendenza da una grandezza

RELAZIONE GENERALE

Avendo misurato direttamente il valore della grandezza fisica x con risultato

$$x_m \pm \Delta x$$

e conoscendo la relazione che lega la grandezza y a x

$$y = f(x)$$

possiamo ottenere la misura indiretta di y tramite le seguenti relazioni

$$y_m = f(x_m)$$

e

$$\Delta y = |df(x) / dx|_{x=x_m} * \Delta x$$

purché $\Delta x / |x_m| \ll 1$.

[Cenno alle analogie con il differenziale matematico]

Piccolo formulario di derivate

$(d/dx)[x^n] = n x^{n-1}$

--> $n = -2$ $\quad (d/dx)[x^{-2}] = -2x^{-3} = -2/x^3$

--> $n = -1$ $\quad (d/dx)[x^{-1}] = -1x^{-2} = -1/x^2$

--> $n = 0$ $\quad (d/dx)[x^0] = 0$

--> $n = 1$ $\quad (d/dx)[x^1] = 1$

--> $n = 2$ $\quad (d/dx)[x^2] = 2x$

--> $n = 3$ $\quad (d/dx)[x^3] = 3x^2$

$(d/dx)[f(x) + k] = (d/dx)[f(x)]$ $\qquad (d/dx)[k\, f(x)] = k\, (d/dx)[f(x)]$

$(d/dx)[\ln(x)] = 1/x$ $\qquad (d/dx)[\log_a(x)] = (1/x) \log_a e = (1/x)(1/\ln a)$

$(d/dx)[\ln f(x)] = (1/f(x))\, (d/dx)[f(x)]$

$(d/dx)[\mathrm{sen}(x)] = \cos(x)$ $\qquad (d/dx)[\cos(x)] = -\mathrm{sen}(x)$

$(d/dx)[\mathrm{tg}(x)] = (d/dx)[\mathrm{sen}(x)/\cos(x)] = 1/\cos^2(x)$

$(d/dx)[e^x] = e^x$

$(d/dx)[e^{f(x)}] = e^{f(x)}\, (d/dx)[f(x)]$