

Misura del modulo dell'accelerazione di gravità g tramite pendolo

Il valore di g dipende da:

- 1) Latitudine terrestre**
- 2) Altezza rispetto al livello del mare**

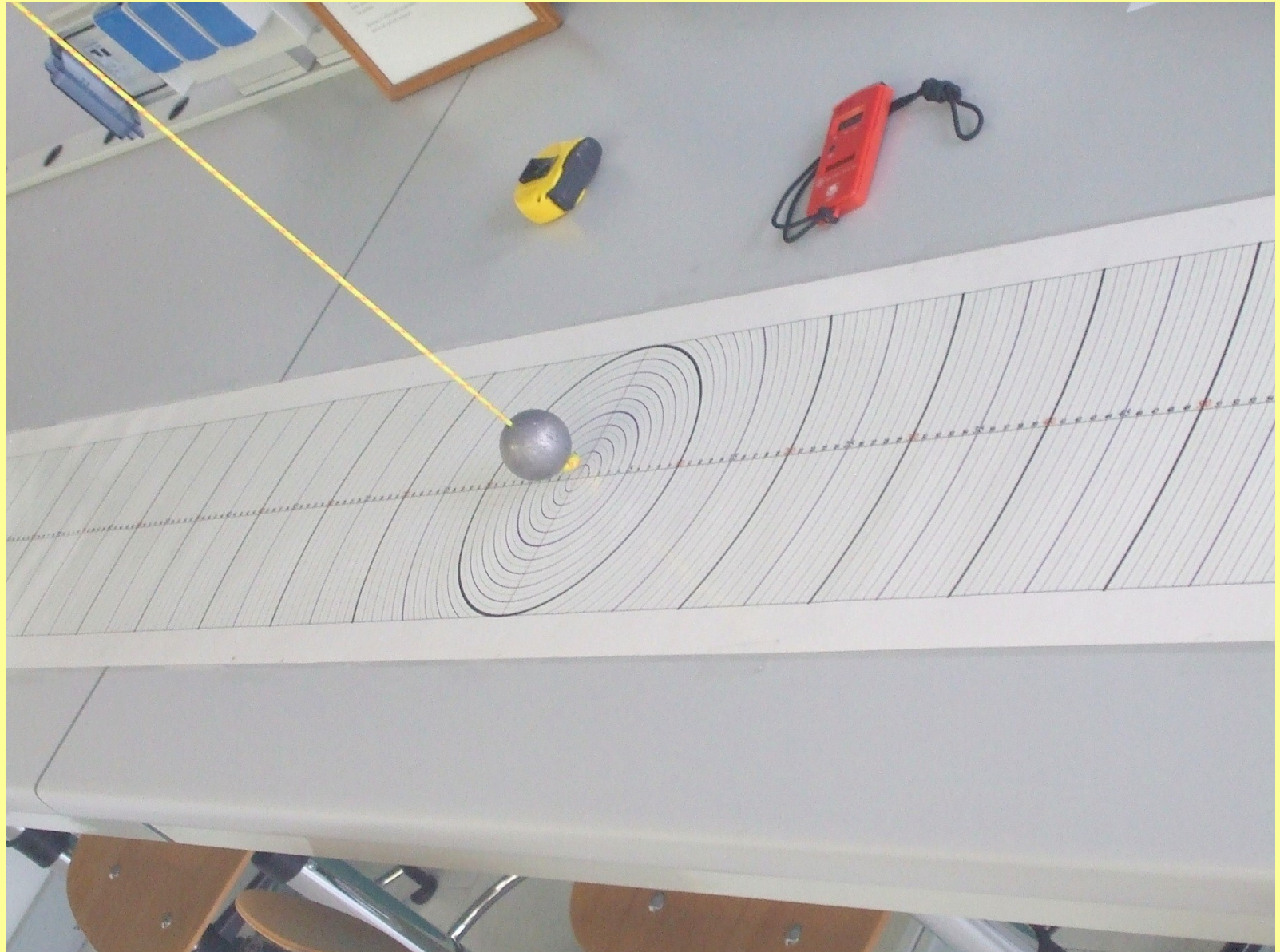
Ma localmente è una costante!

Fino a tempi relativamente recenti, la misura precisa del modulo dell'accelerazione di gravità locale è stata realizzata tramite esperimenti basati sul moto oscillatorio del pendolo.

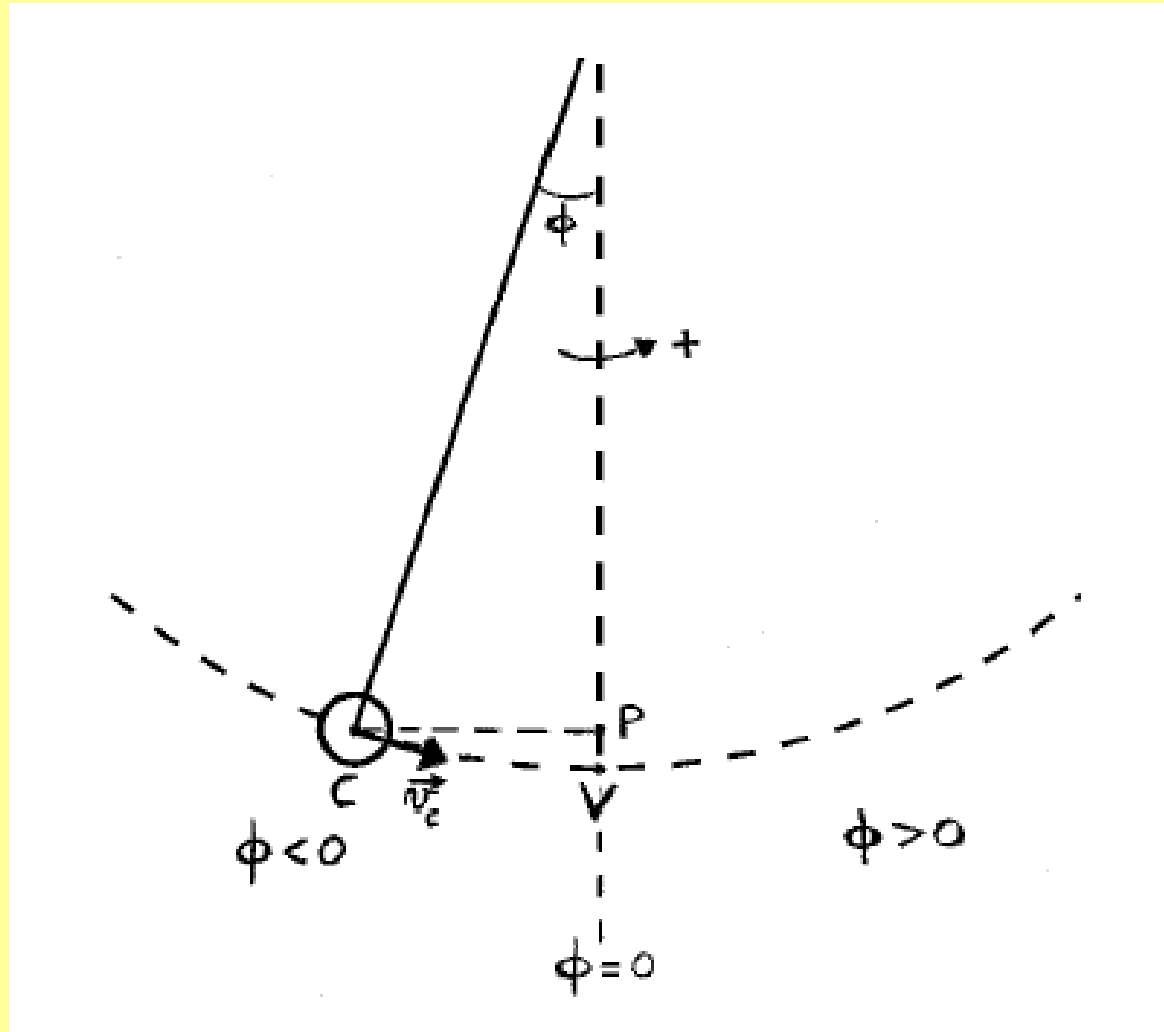


Apparato Sperimentale

Apparato Sperimentale



Schematizzazione del pendolo



Schematizzazione del pendolo

Ipotesi semplificative:

- 1) Filo inestendibile**
- 2) Massa del filo trascurabile rispetto a**
- 3) Vincolo ideale nel punto di aggancio**
- 4) Resistenza dell'aria assente**

In tali ipotesi semplificative la conservazione dell'energia meccanica può essere espressa nella forma:

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2(t) - \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2(\phi = 0) = mgl(\cos\phi - 1)$$



Energia cinetica



Energia potenziale

Schematizzazione del pendolo

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2(t) - \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2(\phi = 0) = mgl(\cos\phi - 1)$$

Derivando la conservazione dell'energia rispetto al tempo si ha:

$$\ddot{\phi} + \left(\frac{g}{l}\right) \sin\phi = 0$$

Equazione differenziale caratteristica di un moto periodico con periodo di oscillazione

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\phi_0}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\phi_0}{2} + o(\sin^4 \frac{\phi_0}{2}) \right) = T_0(l, g) \mathcal{F}(\phi_0)$$

Schematizzazione del pendolo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\phi_0}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\phi_0}{2} + o(\sin^4 \frac{\phi_0}{2}) \right) = T_0(l, g) \mathcal{F}(\phi_0)$$

Il valore di g è quindi misurabile indirettamente dalla relazione:

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\phi_0}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\phi_0}{2} + o(\sin^4 \frac{\phi_0}{2}) \right)^2$$

Ma

$\phi_0(^{\circ})$	$\phi_0(\text{rad})$	$\sin \phi_0$	$\Delta\%$	$\sin^2(\phi_0/2)/4$	$(9/64) \sin^4(\phi_0/2)$
5	0.0873	0.0872	0.1	4.76×10^{-4}	5.1×10^{-7}
10	0.1745	0.1736	0.5	1.90×10^{-3}	8.1×10^{-6}
15	0.2618	0.2588	1.2	4.26×10^{-3}	4.1×10^{-5}
20	0.3491	0.3420	2.1	7.54×10^{-3}	1.3×10^{-4}
25	0.4363	0.4226	3.2	1.17×10^{-2}	3.1×10^{-4}

Misure

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\phi_0}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\phi_0}{2} + o(\sin^4 \frac{\phi_0}{2}) \right)^2$$

Grandezze da misurare:

- lunghezza del filo l → metro metallico a nastro
- posizione iniziale rilascio x_0 → angolo iniziale ϕ_0
- Periodo di oscillazione T

Le incertezze sulle misure di l e x_0 sono legate agli errori di lettura delle scale graduate degli strumenti

L'incertezza sulla misura di T dipende principalmente dai tempi di reazione dell'operatore (circa 0.1 s). Ma per questa misura è possibile ridurre drasticamente l'incertezza con un semplice artificio. Quale?

Misura precisa di g con il pendolo semplice

Per le notazioni e i simboli si faccia riferimento alle dispense

Indicare sempre le unità di misura nelle caselle con i valori numerici

Gruppo: Data e ora Pendolo N°

Sperimentatori:

Scopo dell'esperienza, Relazioni funzionali, Ipotesi di validità, Propagazione degli errori (max. 10 righe)

Misure dirette

Simb.	Significato e strumento utilizzato	Errore di sensibilità
H		
d		
nT		
X_0		

Misure indirette

Simb.	Significato	Espressione	Errore assoluto o errore relativo
l			
r			
φ_0			
T_0			
g			

Misura di l		H ₁	H ₂	H ₃	H ₄	H ₅	H ₆	H ₇
H ₀ ± ΔH ₀		H ± ΔH						
		d ₁	d ₂	d ₃	d ₄	d ₅	d ₆	d ₇
		d ± Δd						
				Risultato	l ± Δl			

TABULATO 1

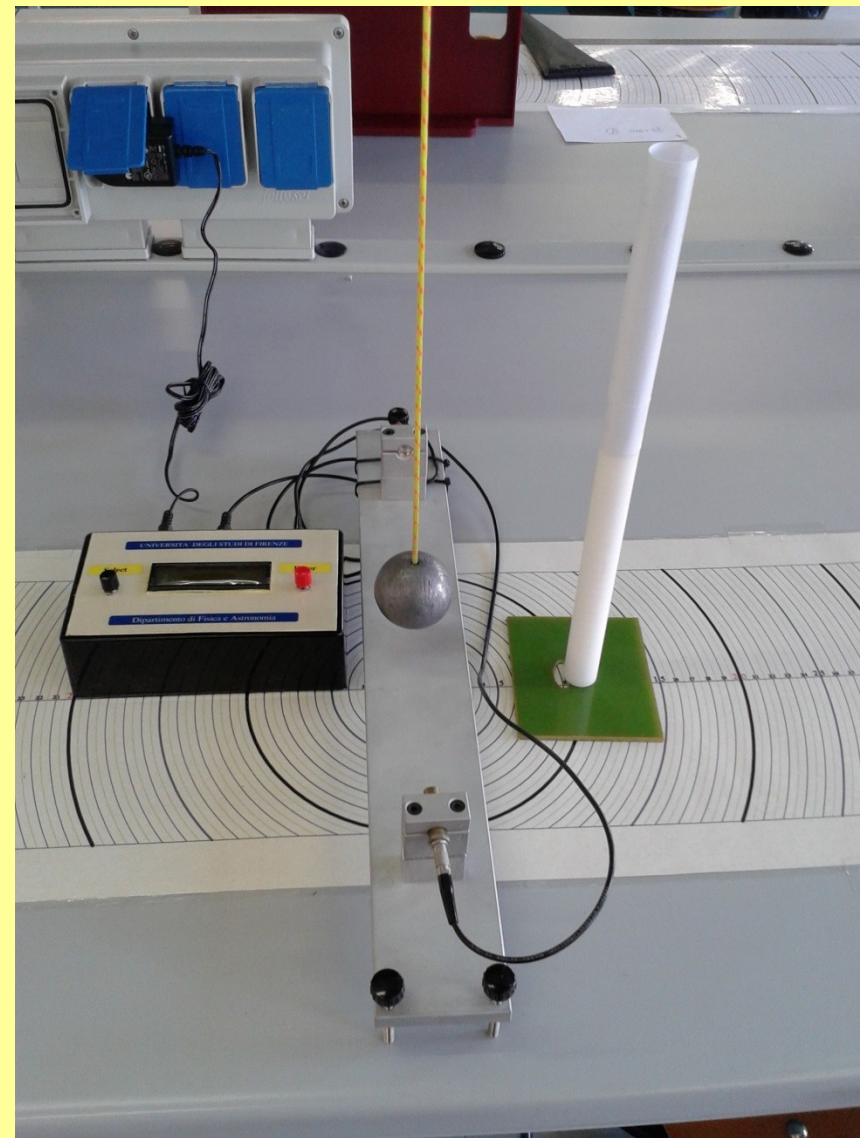
TABULATO 1

Misura di l		H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6	H_7
$H_0 \pm \Delta H_0$		$H \pm \Delta H$						
		d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7
		$d \pm \Delta d$						
				Risultato		$l \pm \Delta l$		

ANALISI STATISTICA DEI DATI SPERIMENTALI

Coppia di fotocellule, da posizionare in corrispondenza della verticale di riposo del pendolo, collegate ad un cronometro con errore di sensibilità selezionabile tra

$1 \cdot 10^{-6}$ e $1 \cdot 10^{-1}$ s.



ANALISI STATISTICA DEI DATI SPERIMENTALI

- molte sorgenti di errore accidentale
- errori sistematici trascurabili rispetto a accidentali



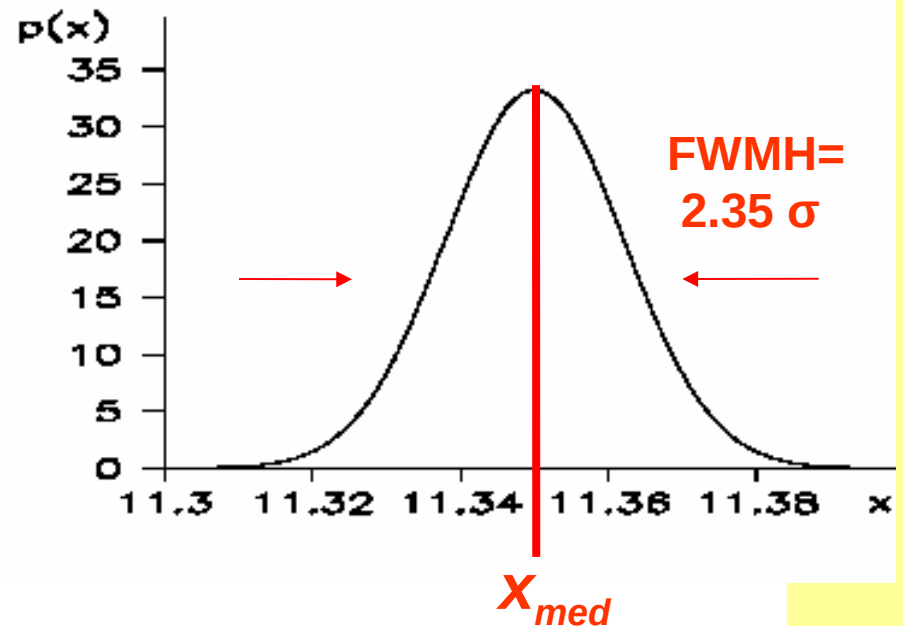
$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}}$$

Detta “distribuzione normale” o “funzione di Gauss”,
con σ “parametro di larghezza”

ANALISI STATISTICA DEI DATI SPERIMENTALI

Funzione di Gauss

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}}$$



Avendo a disposizione un numero finito N (100) di misure si dimostra che (vedi dispense):

- la miglior stima di X è la media x_{med}
- la miglior stima di σ è data dalla deviazione standard σ_x
- l'istogramma a intervalli sperimentale deve essere confrontato con l'espressione $N \cdot p(x_i) \cdot \Delta x_i$ con x_i valore medio e Δx_i larghezza dell'intervallo i -esimo

PENDOLO DI TORSIONE

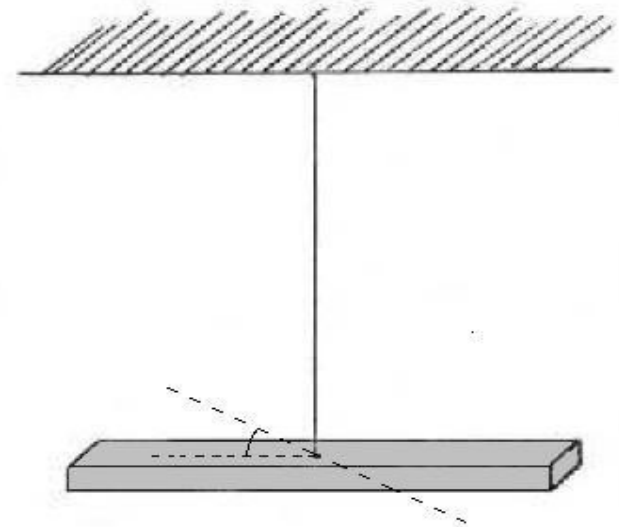
Costituito da un filo che presenta elasticità di torsione ed è sospeso per un estremo ad un sostegno rigido; all'altro estremo è attaccato un **equipaggio mobile (em)**, in modo che il filo coincida con un suo asse permanente di rotazione

Se l'em viene ruotato di un angolo θ rispetto alla posizione di equilibrio statico tramite l'applicazione di un momento torcente M_t , il filo reagisce con un momento di forze diretto lungo l'asse e di modulo

$$\theta = \frac{1}{G} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{L}{r^4} \cdot M_t$$

con **G modulo di scorrimento**, L lunghezza e r raggio del filo. Tale relazione (Legge di Hooke) è valida purché

$$\theta_{in} \leq \frac{L}{r} \cdot \alpha_{max} = \frac{L}{r} \cdot \frac{\sigma_G}{G}$$



PENDOLO DI TORSIONE

In tabella sono riportati I valori tipici di G e σ_G per alcuni materiali

Materiale	G (kg _p /mm ²)	σ_G (kg _p /mm ²)
Acciaio	$8 \cdot 10^3$	10
Alluminio	$2.4 \cdot 10^3$	5
Ferro	$8 \cdot 10^3$	8
Ottone	$3.5 \cdot 10^3$	15
Piombo	$0.6 \cdot 10^3$	0.4
Tungsteno	$15 \cdot 10^3$	30

$$\theta_{in} \leq \frac{L}{r} \cdot \alpha_{max} = \frac{L}{r} \cdot \frac{\sigma_G}{G}$$

Lasciato libero il pendolo, questo si muoverà sotto l'effetto della reazione elastica del filo e il moto successivo sarà dato dalla seconda eq. cardinale della dinamica

$$I_{em} \ddot{\theta} = M_e = -c_t \theta$$

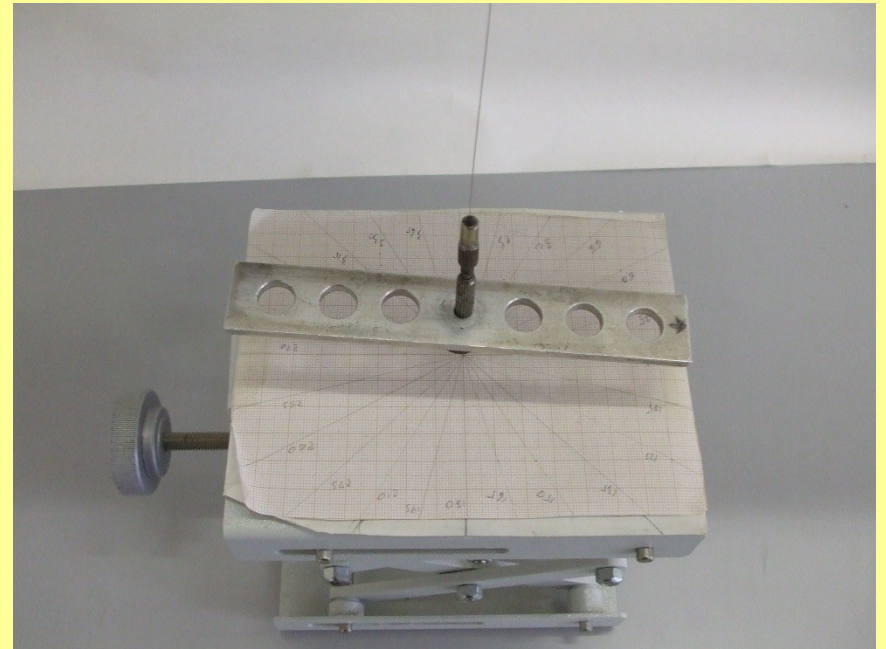
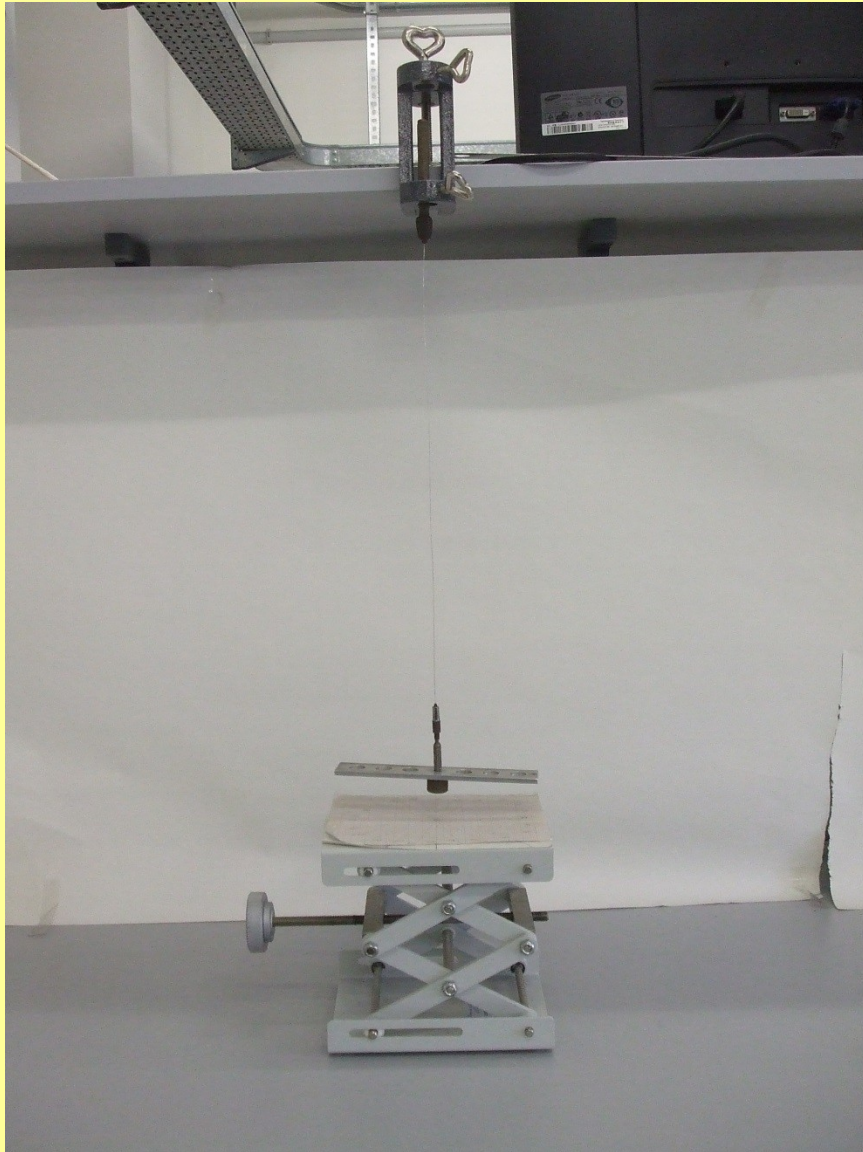
con $c_t = \frac{\pi}{2} G \frac{r^4}{L}$ costante di torsione del filo.

L'equazione oraria risultante è $\theta(t) = A \cdot \cos(\omega t + \beta)$

con A e β dipendenti dalle condizioni iniziali e

$$\omega = \sqrt{c_t / I_{em}} \quad \longrightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I_{em}}{c_t}}$$

Apparato Sperimentale



PENDOLO DI TORSIONE

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I_{em}}{c_t}}$$

Conoscendo I_{em} , la misura di T permetterebbe di ricavare c_t . Ma I_{em} non è noto (o è misurabile con molta incertezza). Si possono misurare indirettamente I_{em} e c_t realizzando una seconda misura nella quale si aggiunge all'equipaggio un corpo di I misurabile con precisione (anello) per cui vale

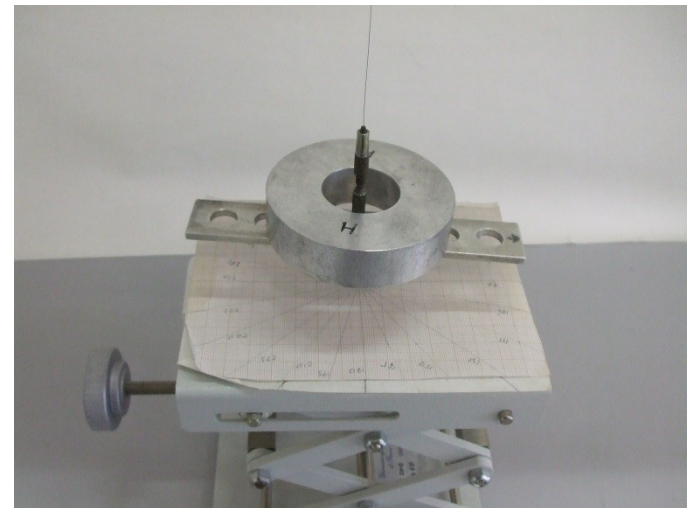
$$I_{an} = \frac{1}{2} \cdot m_{an} \cdot (r_i^2 + r_e^2)$$

Misurato indirettamente I_{an} e il periodo

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{I_{em} + I_{an}}{c_t}}$$

si ricavano infine

$$c_t = 4\pi^2 \frac{I_{an}}{T_2^2 - T^2} \quad I_{em} = \frac{I_{an} \cdot T^2}{T_2^2 - T^2}$$



PENDOLO DI TORSIONE

Misure Dirette

Anello: massa m diametro interno D_i diametro esterno D_e

Filo: diametro d lunghezza L

Periodo di oscillazione: T solo em
 T_2 em + anello

Attenzione a:

- 1) non superare θ_{\max}
- 2) iniziare e concludere le misure degli intervalli di tempo in condizioni di massima velocità angolare dell'equipaggio mobile
- 3) posizionare l'anello sull'equipaggio mobile in modo che il filo coincida con un asse permanente di rotazione del sistema complessivo

Misure con pendolo di torsione

Per le notazioni e i simboli si faccia riferimento alle dispense

Indicare sempre le unità di misura nelle caselle con i valori numerici

Gruppo:

Data e ora

Sperimentatori:

Scopo dell'esperienza, Relazioni funzionali, Ipotesi di validità, Propagazione degli errori (max. 10 righe)

Misure dirette

Simb.	Significato e strumento utilizzato	Errore di sensibilità
d_f		
L_f		
T		
T_2		
m_A		
D_i		
D_e		

Misure indirette

Simb.	Significato	Espressione	Errore assoluto o errore relativo
I_{an}			
I_{em}			
C_t			
G			

Misure geometriche

Offset Palmer					Valore Finale	Incertezza	u.d.m.
d_f							
L_f							
D_i							
D_e							
m_A							

TABULATO

1

Rotazione iniziale dell'equipaggio mobile

φ_{max}			
φ_0		$\Delta\varphi_0$	

Misure degli intervalli di tempo

n.

Presi dati

	1	2	3	4	5	6	7	8
nT_1								
nT_2								

Analisi dati

	$(nT \pm \Delta nT)$	$(T \pm \Delta T)$
T_1		
T_2		

Misure indirette

	Valore finale	Incertezza	Unità di misura
I_{an}			
I_{em}			
c_t			
G			

Commenti finali all'esperienza

Parte opzionale: Studio dello smorzamento del moto

φ_0 (n=0)	φ_0 (n=5)	φ_0 (n=10)	φ_0 (n=15)	φ_0 (n=20)	φ_0 (n=25)

Riportare in grafico su carta millimetrata $\varphi_0(n)$ in funzione di n e commentare i risultati sul grafico

TABULATO 2

TABULATO 2

Rotazione iniziale dell'equipaggio mobile

φ_{\max}			
φ_0		$\Delta\varphi_0$	

Misure degli intervalli di tempo

n.

Presca dati

	1	2	3	4	5	6	7	8
nT_1								
nT_2								

Analisi dati

	$(nT \pm \Delta nT)$	$(T \pm \Delta T)$
T_1		
T_2		