6 ottobre 2009

Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

Questa dispensa mostra il metodo di risoluzione delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti. Queste equazioni vengono usate più volte durante il corso di Esperimentazioni II (teoria del galvanometro, equazioni dei circuiti R-C, R-L, R-L-C). Ho potuto verificare che, indipendentemente dal fatto che l'argomento sia stato trattato in corsi di analisi matematica, gli studenti di Esperimentazioni dimostrano di non conoscerlo o comunque di non essere abituati a risolvere questo tipo di equazioni, per cui ho ritenuto opportuno raccogliere qui le nozioni fondamentali sul problema.

Quanto segue ha principalmente lo scopo di mostrare la "ricetta" per risolvere le equazioni in oggetto, senza alcuna pretesa di rigore matematico.

1. Definizioni e generalità

Consideriamo una funzione $x(t)$ reale di una variabile reale t.[1] Cerchiamo di determinare la funzione $x(t)$ in modo che risulti soluzione dell'equazione differenziale di ordine n

$$a_0\, x(t) + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 \frac{d^2x}{dt^2} + \ldots + a_n \frac{d^nx}{dt^n} = \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^ix}{dt^i} = f(t) \tag{1.1}$$

dove gli a_i sono costanti reali e $f(t)$ è una funzione reale della variabile indipendente. Tale equazione si definisce lineare in quanto la funzione $x(t)$ e le sue derivate compaiono tutte linearmente. Dalla teoria di base delle equazioni differenziali sappiamo che la soluzione generale conterrà n costanti arbitrarie che si potranno determinare sulla base di n relazioni note, dette "condizioni al contorno".[2]

2. Metodo risolutivo

Definiamo un'equazione del tipo (1.1) *omogenea* se $f(t) = 0$ e per ogni equazione *non*

[1] Ci limitiamo a variabili e funzioni reali in quanto sono quelle che interessano nelle situazioni fisiche trattate nel corso di Esperimentazioni e chiamiamo t la variabile indipendente visto che nel nostro caso si tratta quasi sempre del tempo.

[2] Nei casi fisici più semplici le condizioni determinano il valore di $x(t)$ e delle sue derivate fino all'ordine $n-1$ all'istante iniziale e si chiamano "condizioni iniziali". Esempio tipico sono le equazioni di moto del secondo ordine per un parametro di spostamento che si ricavano dal secondo principio della dinamica, in cui spesso si conoscono la posizione e la velocità iniziale.

omogenea definiamo un'equazione *omogenea associata* data da

$$a_0\,x(t) + a_1\,\frac{dx}{dt} + a_2\,\frac{d^2x}{dt^2} + \ldots + a_n\,\frac{d^nx}{dt^n} = \sum_{i=0}^{n} a_i\,\frac{d^ix}{dt^i} = 0 \tag{2.1}$$

La regola principale per la risoluzione dell'equazione (1.1) è: *la soluzione generale dell'equazione (1.1) è data da una qualsiasi sua soluzione particolare sommata alla soluzione generale dell'equazione omogenea associata (2.1).* Il problema quindi si scompone in due parti: determinare una qualsiasi soluzione dell'equazione non omogenea e quindi trovare la soluzione generale dell'omogenea associata.

2.1 Soluzione particolare

La soluzione particolare dell'equazione (1.1) andrà cercata caso per caso, a seconda della forma di $f(t)$. Se la forma di $f(t)$ è semplice, anche la soluzione particolare sarà semplice, al limite della banalità. Ad esempio

$$\begin{array}{lll} \text{se} & f(t) = k & x(t) = \frac{k}{a_0} \\ \text{se} & f(t) = t^j & x(t) = b_0 + b_1\,t + b_2\,t^2 + \ldots + b_j\,t^j \\ \text{se} & f(t) = b\cos(\omega t + \theta) & x(t) = c\cos(\omega t + \varphi) \end{array} \tag{2.2}$$

Dove i parametri b_i, c e φ vanno determinati sostituendo la $x(t)$ nella (1.1).[3]

2.2 Soluzione dell'omogenea associata

La soluzione generale dell'omogenea associata (2.1) si ricava dal procedimento che segue. Innanzi tutto consideriamo un polinomio $P(z)$ avente gli stessi coefficienti dell'equazione (2.1)

$$P(z) = a_0 + a_1\,z + a_2\,z^2 + \ldots + a_n z^n \tag{2.3}$$

Il polinomio $P(z)$ si annulla per n valori della variabile z, le sue radici, che supponiamo siano $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$. Se le radici sono tutte distinte la soluzione generale della (2.1) è data da

$$x(t) = c_1\,e^{\alpha_1 t} + c_2\,e^{\alpha_2 t} + \ldots + c_n\,e^{\alpha_n t} \tag{2.4}$$

[3] Vedere in appendice per una trattazione più particolareggiata.

dove le c_i sono costanti arbitrarie determinabili tramite le condizioni al contorno. Non dimostriamo che questa è la soluzione generale dell'equazione, ma ci limitiamo a verificare che se α_j è una radice di $P(z)$, allora $x(t) = e^{\alpha_j t}$ è una soluzione della (2.1). Ciò è immediato dato che

$$\frac{d^k e^{\alpha_j t}}{dt^k} = \alpha_j^k \, e^{\alpha_j t} \tag{2.5}$$

Sostituendo nella (2.1) abbiamo infatti

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \, \frac{d^i x}{dt^i} = \sum_{i=0}^{n} a_i \, \alpha_j^i \, e^{\alpha_j t} = e^{\alpha_j t} \, P(\alpha_j) = 0 \tag{2.6}$$

2.3 Casi particolari della soluzione

A seconda della natura delle radici del polinomio $P(z)$ la soluzione (2.4) potrà essere espressa in modo più conveniente o dovrà essere modificata. Consideriamo i casi che seguono:

a. Le radici di $P(z)$ non sono necessariamente tutte reali, ma possono presentarsi coppie di radici complesse coniugate. La soluzione (2.4) resta valida, ma risulta espressa in una forma non particolarmente conveniente. Infatti se abbiamo una coppia di radici $\alpha = \beta \pm i\gamma$ la parte della (2.4) che si riferisce alla coppia assume la forma

$$c \, e^{\beta t} \, e^{i\gamma t} + c' \, e^{\beta t} \, e^{-i\gamma t} \tag{2.7}$$

Dato che la nostra soluzione fisica dovrà essere reale, i coefficienti c e c' risulteranno complessi, in modo tale da rendere nulla la parte immaginaria della (2.7). Per evitare questa complicazione la parte di soluzione potrà essere scritta in uno dei modi alternativi che seguono, dove tutti gli elementi sono reali

$$\begin{gathered} (d \sin \gamma t + d' \cos \gamma t) \, e^{\beta t} \\ d \, e^{\beta t} \sin(\gamma t + \theta) \\ d \, e^{\beta t} \cos(\gamma t + \phi) \end{gathered} \tag{2.8}$$

dove le costanti d, d', θ, ϕ sono determinate dalle condizioni iniziali (si noti che ciascuna espressione contiene due costanti).

b. Le radici di $P(z)$ non sono necessariamente tutte diverse fra loro. Nel caso in cui alcune radici coincidano la forma di soluzione (2.4) non è più corretta. Infatti i termini della (2.4) che si riferiscono alle radici coincidenti conterrebbero una stessa funzione $e^{\alpha t}$ e quindi non aggiungerebbero termini significativi alla soluzione (si potrebbero raggruppare in un solo termine). Si può dimostrare[4] che se esiste una radice α di molteplicità m il termine corrispondente della soluzione avrà la forma

$$(c_i + c_{i+1}\, t + c_{i+2}\, t^2 + \ldots + c_{i+k-1}\, t^{m-1})\, e^{\alpha t} \tag{2.9}$$

c. Il caso più complesso comprende la situazione a. e la b.: si ha quando una coppia di radici complesse coniugate ha molteplicità maggiore di 1, ossia compare più volte. Se la coppia compare ad esempio m volte, il risultato si scrive seguendo la (2.9)

$$\begin{aligned}&(c_i + c_{i+1}\, t + c_{i+2}\, t^2 + \ldots + c_{i+k-1}\, t^{m-1})\, e^{\beta t}\, e^{i\gamma t} + \\ &+ (c'_i + c'_{i+1}\, t + c'_{i+2}\, t^2 + \ldots + c'_{i+k-1}\, t^{m-1})\, e^{\beta t}\, e^{-i\gamma t}\end{aligned} \tag{2.10}$$

Alle varie coppie di termini che contengono la stessa potenza di t si applica il procedimento visto in a. e si ottengono le forme

$$\begin{aligned}&\big[(d_i \sin\gamma t + d'_i \cos\gamma t) + (d_{i+1} \sin\gamma t + d'_{i+1} \cos\gamma t)\, t + \ldots + \\ &+(d_{i+m-1} \sin\gamma t + d'_{i+m-1} \cos\gamma t)\, t^{m-1}\big]\; e^{\beta t}\end{aligned}$$

$$\big[(d_i \sin(\gamma t + \theta_i) + d_{i+1} \sin(\gamma t + \theta_{i+1})\, t + \ldots + d_{i+m-1} \sin(\gamma t + \theta_{i+m-1})\, t^{m-1}\big]\; e^{\beta t}$$

$$\big[(d_i \cos(\gamma t + \phi_i) + d_{i+1} \cos(\gamma t + \phi_{i+1})\, t + \ldots + d_{i+m-1} \cos(\gamma t + \phi_{i+m-1})\, t^{m-1}\big]\; e^{\beta t} \tag{2.11}$$

[4] Vedi appendice.

Appendice

Di seguito sono trattati più in dettaglio alcuni casi visti nel testo principale, e i calcoli sono svolti passaggio per passaggio.

A.1 Soluzioni particolari

A.1.1 Caso polinomiale

Vogliamo trovare la soluzione particolare dell'equazione (1.1) nel caso in cui la $f(t)$ ha la forma di un polinomio in t di grado l

$$f(t) = b_0 + b_1\, t + \ldots + b_l\, t^l = \sum_{i=0}^{l} b_i\, t^i \tag{A.1.1}$$

Vogliamo dimostrare che un polinomio di grado l in t, con opportuni coefficienti, rappresenta la soluzione particolare:

$$x(t) = c_0 + c_1\, t + \ldots + c_l\, t^l = \sum_{i=0}^{l} c_i\, t^i \tag{A.1.2}$$

Per determinare i coefficienti consideriamo prima di tutto la relazione

$$\frac{d^j}{dt^j}\, t^k = \begin{cases} k(k-1)\ldots(k-j+1)\, t^{k-j} = \frac{k!}{(k-j)!}\, t^{k-j} & \text{se } k \geq j \\ 0 & \text{se } k < j \end{cases} \tag{A.1.3}$$

La soluzione (A.1.2) dovrà verificare la relazione

$$\sum_{j=0}^{n} a_j \frac{d^j}{dt^j} \left[\sum_{i=0}^{l} c_i\, t^i \right] = \sum_{i=0}^{l} b_i\, t^i \quad \forall t \tag{A.1.4}$$

Se introduciamo l'espressione esplicita della derivata (A.1.3) otteniamo

$$\sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{i=j}^{l} c_i \frac{i!}{(i-j)!}\, t^{i-j} = \sum_{i=0}^{l} b_i\, t^i \quad \forall t \tag{A.1.5}$$

I due membri sono entrambi polinomi di grado l in t per cui risulteranno identici se e solo se sono uguali i coefficienti delle potenze omologhe di t. Vediamo che nel polinomio a sinistra il termine in t^l risulta solo dalla combinazione $i = l$, $j = 0$ e avremo

$$a_0\, c_l = b_l \quad \text{da cui} \quad c_l = \frac{b_l}{a_0} \tag{A.1.6}$$

Per il termine in t^{l-1} le combinazioni possibili sono $i = l$, $j = 1$ oppure $i = l - 1$, $j = 0$ Corrispondentemente

$$l\, a_1\, c_l + a_0\, c_{l-1} = b_{l-1} \tag{A.1.7}$$

da cui si ricava facilmente c_{l-1} dopo aver sostituito il valore di c_l dato dalla (A.1.6).

$$c_{l-1} = \frac{b_{l-1}}{a_0} - l\, \frac{a_l\, b_l}{a_0^2} \tag{A.1.8}$$

Si prosegue nello stesso modo fino ad arrivare ai coefficienti dei termini in t^0; in ciascuna equazione si possono sostituire i valori già trovati dei coefficienti di grado superiore.

A.1.2 Caso sinusoidale

Siamo interessati ai casi in cui la funzione $f(t)$ è sinusoidale

$$f(t) = A\, \cos(\omega t + \theta) \quad A > 0 \tag{A.1.9}$$

Dove la scelta di $A > 0$ non fa perdere in generalità, dato che un cambiamento di segno di A equivale a un cambiamento di fase $\theta' = \theta \pm \pi$. Vogliamo dimostrare che una soluzione particolare della (1.1) è ancora una funzione sinusoidale con la stessa pulsazione ω

$$x(t) = C\, \cos(\omega t + \phi) \quad C > 0 \tag{A.1.10}$$

con opportuni valori di C e ϕ. Si potrebbero sostituire nella (1.1) la $x(t)$ data dalla (A.1.10) e le sue derivate, andando poi a imporre l'uguaglianza con la (A.1.9), ma il calcolo sarebbe abbastanza laborioso. Conviene invece utilizzare un espediente, quello che si usa in particolare per la trattazione dei circuiti lineari in regime sinusoidale. L'espediente si basa sul fatto che, per la linearità dell'equazione, se $x_1(t)$ è la soluzione quando $f(t) = f_1(t)$

e $x_2(t)$ quando $f(t) = f_2(t)$, allora $x_1(t) + x_2(t)$ è soluzione per $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$. Sostituiamo alla $f(t)$ reale della (A.1.9) una $f'(t)$ complessa data da

$$f'(t) = A\,[\cos(\omega t + \theta) + i \sin(\omega t + \theta)] = A\,e^{i(\omega t+\theta)} \tag{A.1.11}$$

e contemporaneamente cerchiamo una soluzione del tipo

$$x'(t) = C\,e^{i(\omega t+\phi)} \tag{A.1.12}$$

In base a quanto sopra, l'equazione complessa in $f'(t)$ avrà una soluzione complessa la cui parte reale corrisponde alla soluzione reale cercata. Basterà quindi determinare la soluzione complessa e prendere la parte reale. La complicazione introdotta dal passaggio ai numeri complessi è ampiamente compensata dal fatto che la derivata di un'esponenziale corrisponde alla funzione di partenza semplicemente moltiplicata per una costante e questo semplifica in grande misura il calcolo della soluzione. Infatti

$$\frac{d^j}{dt^j}\,e^{i(\omega t+\phi)} = (i\omega)^j e^{i(\omega t+\phi)} \tag{A.1.13}$$

Se sostituiamo la soluzione (A.1.12) nella (1.1) abbiamo

$$C \sum_{k=0}^{n} a_k\,(i\omega)^k\,e^{i(\omega t+\phi)} = A\,e^{i(\omega t+\theta)} \tag{A.1.14}$$

Nell'equazione (A.1.14) possiamo semplificare un fattore $e^{i\omega t}$. Inoltre si può indicare con un unico numero complesso Z la sommatoria dei termini che dipendono da k

$$C\,Z\,e^{i\phi} = A\,e^{i\theta} \qquad \text{dove} \qquad Z = \sum_{k=0}^{n} a_k\,(i\omega)^k \tag{A.1.15}$$

Possiamo scrivere la soluzione per i parametri C e ϕ come

$$C\,e^{i\phi} = \frac{A}{Z}\,e^{i\theta} \tag{A.1.16}$$

Determiniamo i parametri uguagliando i moduli e le fasi dei numeri complessi ai due membri

$$\begin{cases} C = \frac{A}{|Z|} \\ \phi = \theta - \Phi(Z) \end{cases} \tag{A.1.17}$$

I valori trovati costituiscono i parametri della soluzione reale (A.1.10).

A.2 Soluzioni dell'omogenea associata

A.2.1 Caso delle radici complesse coniugate

Vogliamo vedere come si passa dalla soluzione del tipo (2.7) con coefficienti complessi alla soluzione (2.8) in cui tutti i termini sono reali. Il risultato si ottiene facilmente ricordando le identità trigonometriche

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}\left(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}\right) \qquad \sin\alpha = \frac{1}{2i}\left(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}\right) \tag{A.2.1}$$

Uguagliando la (2.7) con la prima delle (2.8) si ha

$$e^{\beta t}(c\, e^{i\gamma t} + c'\, e^{-i\gamma t}) = e^{\beta t}\,(d\sin\gamma t + d'\cos\gamma t) \tag{A.2.2}$$

Si può semplificare il fattore $e^{\beta t}$ e introducendo le (A.2.1) si ha

$$c\, e^{i\gamma t} + c'\, e^{-i\gamma t} = \frac{d}{2i}\left(e^{i\gamma t} - e^{-i\gamma t}\right) + \frac{d'}{2}\left(e^{i\gamma t} + e^{-i\gamma t}\right) \tag{A.2.3}$$

La (A.2.3) deve essere verificata per ogni valore di t, il che implica l'uguaglianza dei fattori che si ottengono raccogliendo i termini in $e^{i\gamma t}$ e $e^{-i\gamma t}$. Si ha

$$\begin{cases} c = \frac{d}{2i} + \frac{d'}{2} \\ c' = -\frac{d}{2i} + \frac{d'}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} d = i(c - c') \\ d' = -c + c' \end{cases} \tag{A.2.4}$$

Una volta dimostrato che si può esprimere la soluzione nel primo modo che compare nella (2.8), i restanti due modi risultano da una ben nota proprietà trigonometrica, secondo cui data una delle tre espressioni con determinati valori dei parametri, si possono trovare valori dei parametri delle altre due che producono un'espressione equivalente.

A.2.2 Caso delle radici multiple

Supponiamo che α sia una radice del polinomio (2.3) con molteplicità m. Dalla teoria generale dei polinomi risulta che in $z = \alpha$ non solo dovrà annullarsi solo il polinomio, ma dovranno farlo anche tutte le sue derivate fino all'ordine $m - 1$

$$\frac{d^k}{dz^k} P(z)|_{z=\alpha} = 0 \quad 0 \leq k < m \tag{A.2.5}$$

Sfruttando la (A.1.3) possiamo scrivere la derivata di ordine k di $P(z)$

$$\frac{d^k}{dz^k} P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j \frac{d^k}{dz^k} z^j = \sum_{j=k}^{n} a_j \frac{j!}{(j-k)!} z^{j-k} \tag{A.2.6}$$

La condizione (A.2.5) si esprime quindi come

$$\sum_{j=k}^{n} a_j \frac{j!}{(j-k)!} \alpha^{j-k} = 0 \quad 0 \leq k < m \tag{A.2.7}$$

In questa situazione vogliamo provare che $x(t) = t^l e^{\alpha t}$, con $0 \leq l < m$, costituisce una soluzione della (2.1). L'affermazione è già stata provata per $l = 0$, restano da verificare gli altri casi.

A questo punto conviene ricordare una formula generale della derivazione di funzioni, per cui date due funzioni $f(t)$ e $g(t)$

$$\frac{d^k}{dt^k} [f(t)\, g(t)] = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{d^j}{dt^j} f(t) \frac{d^{k-j}}{dt^{k-j}} g(t) \tag{A.2.8}$$

Applichiamo questa formula alla nostra $x(t)$

$$\frac{d^k}{dt^k} [t^l e^{\alpha t}] = \sum_{j=0}^{\min\{l,k\}} \binom{k}{j} \frac{l!}{(l-j)!} t^{l-j} \alpha^{k-j} e^{\alpha t} \tag{A.2.9}$$

dove il limite superiore della sommatoria deriva dal fatto che per $j > l$ la derivata di t^l si annulla. Possiamo scrivere l'espressione della (2.1) con la nostra $x(t)$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{j=0}^{\min\{l,k\}} \binom{k}{j} \frac{l!}{(l-j)!}\, t^{l-j}\, \alpha^{k-j}\, e^{\alpha t} = 0 \qquad (A.2.10)$$

che dovrà essere nulla per ogni valore di t. Possiamo semplificare il termine $e^{\alpha t}$ ottenendo

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{j=0}^{\min\{l,k\}} \binom{k}{j} \frac{l!}{(l-j)!}\, t^{l-j}\, \alpha^{k-j} = 0 \qquad (A.2.11)$$

La (A.2.11) è un polinomio di ordine l in t che sarà identicamente nullo solo se si annulleranno i coefficienti di tutte le potenze di t. Consideriamo t^l, che corrisponde a $j = 0$. Perché si annulli deve essere

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\, \alpha^k = 0 \qquad (A.2.12)$$

che corrisponde all'annullamento di $P(\alpha)$. Passiamo al coefficiente di t^{l-1} corrispondente a $j = 1$ per cui abbiamo la condizione

$$l \sum_{k=1}^{n} a_k\, k\, \alpha^{k-1} = 0 \qquad (A.2.13)$$

dove il limite inferiore della sommatoria è dato dalla condizione $j \leq k$. L'espressione, confrontata con la (A.2.6), corrisponde all'annullarsi della derivata prima di $P(z)$ in $z = \alpha$. Per t^{l-2} si ha

$$\frac{l!}{(l-2)!2!} \sum_{k=2}^{n} a_k \frac{k!}{(k-2)!}\, \alpha^{k-2} = 0 \qquad (A.2.13)$$

che corrisponde all'annullamento in $z = \alpha$ della derivata seconda del polinomio. Lo stesso vale per tutti gli altri termini, per cui è provata la soluzione (2.9).