 19 febbraio 2005

Circuiti risonanti

1. Definizioni

Nel resto del testo utilizzeremo le seguenti definizioni:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad Q_0 = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad x = \frac{\omega}{\omega_0} \tag{1}$$

Indicheremo

$$Q_{E0} = 2\pi \frac{E_{\text{max img}}}{E_{\text{diss}}} \tag{2}$$

dove $E_{\text{max img}}$ rappresenta la massima energia immagazzinata nel campo e.m. durante un ciclo e E_{diss} l'energia totale dissipata in un ciclo. Useremo inoltre il suffisso $_r$ per indicare le quantità alla *risonanza*, che definiamo come la situazione per cui le *impedenze* (e quindi le ammettenze) risultano *reali*. Ad es. x_r, Z_r. Useremo il suffisso $_m$ per indicare le quantità nella situazione in cui le impedenze risutano massime o minime. Useremo infine il suffisso $_{\sqrt{5}}$ per indicare le quantità nella situazione in cui i moduli delle impedenze sono variati di un fattore $\sqrt{5}$ rispetto al valore alla risonanza.

1. Circuito risonante serie

Dalla combinazione delle impedenze abbiamo

$$\begin{aligned} Z &= R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R\left[1 + j\,Q_0\left(x - \frac{1}{x}\right)\right] \\ |Z| &= R\sqrt{1 + Q_0^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2} \end{aligned} \tag{3}$$

Risulta immediatamente

$$x_r = x_m = 1 \qquad Z_r = Z_m = R \tag{4}$$

dove Z_m, reale, rappresenta il minimo valore di Z in funzione della frequenza. Per determinare i due valori di $x_{\sqrt{5}}$ dobbiamo imporre

$$R\sqrt{1 + Q_0^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2} = R\sqrt{5} \qquad \Rightarrow \qquad x_{\sqrt{5}} = \sqrt{1 + \frac{1}{Q_0^2}} \pm \frac{1}{Q_0} \simeq 1 \pm \frac{1}{Q_0} \tag{5}$$

L'uguaglianza approssimata vale quando $Q_0 \gg 1$. Vogliamo infine calcolare Q_{E0}: l'energia immagazzinata in un certo istante t è data da

$$E_{\text{img}} = \frac{1}{2}\left(Li_L^2(t) + CV_C^2(t)\right) \tag{6}$$

dove i_L e V_C sono rispettivamente la corrente che attraversa l'induttanza e la caduta di potenziale ai capi del condensatore (le grandezze reali, non quelle complesse!). Se la tensione erogata dal generatore ha la forma $V = V_0 \cos \omega_r t$, dato che alla risonanza l'impedenza del circuito vale semplicemente R, la corrente risulterà $i = V/R$. Per valutare la caduta di tensione sul condensatore consideriamo la legge di Ohm nel campo complesso: $\mathcal{V}_C = \mathcal{I} Z = \frac{\mathcal{I}}{j\omega_r C}$. Dal valore complesso $\mathcal{V}_C$ si ricava la grandezza alternata reale cercata nella forma $V_c = V_{0C} \cos(\omega_r t + \phi)$: l'ampiezza è data da $V_{0C} = |\mathcal{V}_C| = \frac{i_0}{\omega_r C}$ con $i_0 = V_0/R$; la fase ϕ è quella associata al valore complesso $\mathcal{V}_C$ e risulta la differenza fra la fase di $\mathcal{I}$, che è nulla, e quella dell'impedenza al denominatore, pari a $\frac{\pi}{2}$, per cui $\phi = -\frac{\pi}{2}$. Avremo quindi

$$i_l = \frac{V_0}{R} \cos \omega_r t \qquad V_C = \frac{V_0}{R\omega_r C} \cos\left(\omega_r t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{V_0}{R\omega_r C} \sin \omega_r t \tag{7}$$

Sostituendo le espressioni (7) nella (6) con il valore di ω_r dato da (2) avremo:

$$E_{\text{img}} = \frac{1}{2} \frac{V_0^2 L}{R^2} \tag{8}$$

Vediamo quindi che le quantità di energia immagazzinate nell'induttanza e nel condensatore variano nel tempo, ma la loro somma resta costante. Per quanto riguarda l'energia dissipata in un ciclo, sappiamo che la potenza media dissipata vale $i_{\text{eff}}^2 R$: moltiplicando per il periodo otteniamo:

$$E_{\text{diss}} = \frac{i_0^2}{2} R \frac{2\pi}{\omega_r} = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{R} 2\pi\sqrt{LC} \tag{9}$$

Introducendo i valori trovati (8) e (9) nella (2) otteniamo

$$Q_{E0} = Q_0 \tag{10}$$

2. Circuito risonante parallelo

Per questo circuito i calcoli risultano più laboriosi. Iniziamo col valutare l'impedenza: conviene partire dall'ammettenza, che scriviamo immediatamente com somma delle ammettenze dei due rami

$$\frac{1}{Z} = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{1 - \omega^2 LC + j\omega RC}{R + j\omega L} \tag{11}$$

Possiamo quindi trovare l'espressione dell'impedenza, che conviene esprimere anche in funzione di x e di Q_0:

$$Z = \frac{R + j\omega L}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC} = R \frac{1 + jQ_0 x}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q_0}} \tag{12}$$

La condizione di risonanza si valuta imponendo che le fasi ϕ_N del numeratore e ϕ_D del denominatore della (12) siano uguali, il che corrisponde ad avere $\tan \phi_N = \tan \phi_D$ (sappiamo che le fasi delle impedenze debbono essere comprese fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, intervallo in cui esiste una corrispondenza biunivoca fra ϕ e $\tan\phi$, per cui passare alle tangenti non introduce ambiguità):

$$Q_0 x_r = \frac{x_r}{Q_0(1-x_r^2)} \qquad \begin{cases} x_r = 0 & \\ x_r = \sqrt{1-\frac{1}{Q_0^2}} & Q_0 > 1 \end{cases} \tag{13}$$

La soluzione $x_r = 0$ corrisponde al fatto che in continua il condensatore e l'induttanza hanno impedenze rispettivamente infinita e nulla, per cui l'impedenza risultante è quella della sola resistenza; parliamo di frequenza di risonanza solo per la seconda soluzione che, come si vede, esiste solo quando $Q_0 > 1$.

Valutiamo adesso il valore di Z_r; sostituendo il risultato della (13) nella (12) avremo

$$Z_r = R\frac{1 + jQ_0\sqrt{1-\frac{1}{Q_0^2}}}{\frac{1}{Q_0^2} + j\frac{\sqrt{1-\frac{1}{Q_0^2}}}{Q_0}} = RQ_0^2 \tag{14}$$

Vediamo che l'impedenza alla risonanza cresce proporzionalmente al quadrato del fattore di merito. Vogliamo valutare la frequenza x_m per cui $|Z|$ è massimo: se consideriamo l'espressione (13), troviamo che per $Q_0 \to \infty$ $|Z|$ ha un massimo in $x = 1$. Più in generale, cerchiamo il massimo di $|Z|$ utilizzando l'equazione $\frac{d|Z|^2}{dx} = 0$:

$$\begin{aligned} |Z|^2 &= R^2 \frac{1 + Q_0^2 x^2}{\left(1-x^2\right)^2 + \frac{x^2}{Q_0^2}} \\ \frac{d|Z|^2}{dx} &= R^2 \frac{2Q_0^2 x\left[\left(1-x^2\right)^2 + \frac{x^2}{Q_0^2}\right] - \left(1 + Q_0^2 x^2\right)\left[\frac{2x}{Q_0^2} - 4x(1-x^2)\right]}{\left[\left(1-x^2\right)^2 + \frac{x^2}{Q_0^2}\right]^2} \end{aligned} \tag{15}$$

I valori per cui si annulla la derivata sono quelli per cui si annulla il numeratore $N(x)$ dell'espressione fratta nella (15), che, svolgendo i calcoli, risulta

$$N(x) = 2x\left(2 + Q_0^2 - \frac{1}{Q_0^2} - 2x^2 - Q_0^2 x^4\right) \tag{16}$$

Il denominatore si annulla per $x = 0$ e per le eventuali radici della biquadratica $2 + Q_0^2 - \frac{1}{Q_0^2} - 2x^2 - Q_0^2 x^4 = 0$. Il discriminante dell'equazione di secondo grado associata a quest'ultima è sempre positivo, per cui essa avrà due radici reali, corrispondenti a due valori per x^2. Ovviamente, le radici dovranno essere positive affinché risultino reali i valori di x. Utilizzando la regola dei segni di Cartesio vediamo che avremo una radice sempre negativa e una positiva se $2 + Q_0^2 - \frac{1}{Q_0^2} > 0$. Quest'ultima disuguaglianza è soddisfatta solo se $Q_0 > \sqrt{\sqrt{2}-1}$ (la disuguaglianza corrisponde a $Q_0^4 + 2Q_0^2 - 1 > 0$; si ricavano le radici dell'equazione che si ottiene uguagliando a 0 l'espressione al primo membro: $Q_0^2 = -1 \pm \sqrt{2}$, di cui solo la positiva ha senso, e si considera che l'espressione data, avendo il coefficiente del termine in Q_0^4 positivo, è positiva all'esterno dell'intervallo delle radici). Quando esiste una radice positiva per x^2, ad essa corrisponde un solo valore per x, dato che solo $x \geq 0$ ha significato fisico. Ricapitolando, se $Q_0 < \sqrt{\sqrt{2}-1}$ $N(x)$ si annulla in $x = 0$ ed è sempre negativo per $x > 0$, mentre se $Q_0 > \sqrt{\sqrt{2}-1}$ $N(x)$ si annulla per $x = 0$ e per il valore corrispondente alla radice positiva della biquadratica; inoltre $N(x) > 0$ per valori intermedi fra i due. Dato che il segno della derivata coincide con quello di $N(x)$, ne deduciamo che per $Q_0 < \sqrt{\sqrt{2}-1}$ il modulo dell'impedenza ha un solo massimo in $x = 0$, dove $Z = R$, mentre per $Q_0 > \sqrt{\sqrt{2}-1}$ avremo un minimo in $x = 0$ e un massimo corrispondente alla radice suddetta. Esiste quindi in questo caso una frequenza non nulla per cui $|Z|$ è massimo, data dall'unica soluzione accettabile della biquadratica:

$$x_m = \sqrt{\sqrt{1+\frac{2}{Q_0^2}}-\frac{1}{Q_0^2}} \qquad Q_0 > \sqrt{\sqrt{2}-1} \simeq 0.643594 \tag{17}$$

Si vede che $x_m > x_r$ e che entrambi tendono a 1 al crescere di Q_0.

Sostituendo il valore x_m dato dalla (17) nell'espressione di $|Z|$ data dalla (15) e svolgendo i calcoli si ottiene

$$|Z_m| = R\frac{Q_0}{\sqrt{2\sqrt{1+\frac{2}{Q_0^2}}-2-\frac{1}{Q_0^2}}} \simeq R\frac{Q_0^2}{\sqrt{1-\frac{1}{Q_0^2}}} \tag{18}$$

L'approssimazione vale per $Q_0 \gg 1$ ed è stata ottenuta sviluppando fino al secondo ordine $\sqrt{1+\frac{2}{Q_0^2}}$. Si vede che $|Z_m| > Z_r$ e che i valori tendono a coincidere al crescere di Q_0.

Vogliamo trovare anche in questo caso i valori $x_{\sqrt{5}}$ per cui il modulo dell'impedenza varia, in questo caso si riduce, di un fattore $\sqrt{5}$ rispetto al valore alla risonanza. Dobbiamo imporre:

$$R^2\frac{1+Q_0^2x^2}{(1-x^2)^2+\frac{x^2}{Q_0^2}} = \frac{R^2Q_0^4}{5} \tag{19}$$

Se ne deduce l'equazione biquadratica $Q_0^4x^4 - 2Q_0^2(Q_0^2+2)x^2 + Q_0^4 - 5 = 0$. Questa dà sempre due valori reali per x^2; dalla regola dei segni di Cartesio uno risulta sempre positivo mentre l'altro lo è solo se $Q_0^4 > 5$ ossia $Q_0 > \sqrt[4]{5}$ Abbiamo dunque

$$\begin{aligned} x_{\sqrt{5}} &= \sqrt{1+\frac{2}{Q_0^2}\pm\frac{2}{Q_0}\sqrt{1+\frac{9}{4Q_0^2}}} \qquad Q_0 > \sqrt[4]{5} \simeq 1.49535 \\ x_{\sqrt{5}} &\simeq 1 \pm \frac{1}{Q_0} \qquad Q_0 \gg 1 \end{aligned} \tag{20}$$

Vediamo quindi che al crescere di Q_0 la larghezza della risonanza valutata col metodo del fattore $\sqrt{5}$ risulta corrispondente nel circuito serie e parallelo.

Infine valutiamo il coefficiente Q_{E0} per il circuito risonante parallelo. Al condensatore risulta applicata direttamente la tensione del generatore, per cui $V_C = V_0 \cos \omega_r t$. Possiamo ricavare la corrente i_L che scorre nell'induttanza con il formalismo complesso: $\mathcal{I}_L = \frac{\mathcal{V}}{R+j\omega_r L}$. Da ciò abbiamo subito $|\mathcal{I}_L| = \frac{V_0}{\sqrt{R^2+\omega_r^2 L^2}}$ e $\phi(\mathcal{I}_L) = \arctan\left(-\frac{\omega_r L}{R}\right)$. Possiamo quindi scrivere

$$V_C = V_0 \cos \omega_r t \qquad i_L = \frac{V_0}{\sqrt{R^2+\omega_r^2 L^2}} \cos(\omega_r t - \alpha) \quad \text{con} \quad \tan\alpha = \frac{\omega_r L}{R} \tag{21}$$

Se introduciamo questi valori nella (6) troviamo

$$E_{\text{img}} = \frac{1}{2}\left[\frac{LV_0^2}{R^2+\omega_r^2 L^2}\cos^2(\omega_r t - \alpha) + CV_0^2 \cos^2 \omega_r t\right] = \frac{1}{2}CV_0^2\left[\cos^2(\omega_r t - \alpha) + \cos^2 \omega_r t\right] \tag{22}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato il fatto che risulta dalla (13) $R^2 + \omega_r^2 L^2 = \frac{L}{C}$. Per determinare il massimo dell'espressione (22) dobbiamo studiare il massimo della funzione $f(x) = \cos^2(x-a) + \cos^2 x$.Potremmo procedere derivando rispetto a x ma preferiamo riscrivere $f(x)$ sfruttando la relazione $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$. Risulta

$$\begin{aligned} f(x) =& 1 + \frac{1}{2}\left[\cos 2x + \cos 2(x-\alpha)\right] \\ =& 1 + \frac{1}{2}\left[\cos 2\left(x - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) + \cos 2\left(x - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)\right] \\ =& 1 + \cos 2\left(x - \frac{\alpha}{2}\right)\cos\alpha \end{aligned} \tag{23}$$

L'espressione (23) ha quindi il massimo per $x = \frac{\alpha}{2}$ e tale massimo vale $1 + \cos\alpha$ ossia, in funzione di $\tan\alpha$, $1 + \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$ Introducendo questo risultato nella (22) si ottiene infine

$$E_{\text{img}} = \frac{1}{2}CV_0^2\left[1 + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\omega_r^2 L^2}{R^2}}}\right] = \frac{1}{2}CV_0^2\left[1 + \frac{1}{Q_0}\right] \tag{24}$$

Per quanto riguarda E_{diss}, utilizziamo lo stesso metodo del circuito serie, ricordando che adesso dalla (21) risulta

$$i^2_{\text{eff}_L} = \frac{1}{2}\frac{V_0^2}{R^2+\omega_r^2 L^2} = \frac{1}{2}\frac{V_0^2 C}{L} \tag{25}$$

Si avrà quindi

$$E_{\text{img}} = i^2_{\text{eff}_L}\frac{2\pi}{\omega_r} = \frac{1}{2}CV_0^2\frac{2\pi}{Q_0\sqrt{1-\frac{1}{Q_0^2}}} \tag{26}$$

Mettendo i risultati di (24) e (26) nella (2) risulta infine

$$Q_{E0} = Q_0\sqrt{1-\frac{1}{Q_0^2}}\left(1+\frac{1}{Q_0}\right) \tag{27}$$

Al crescere di Q_0 anche questo risultato tende ad allinearsi con quello del circuito serie.

Parametri dei circuiti risonanti

	serie		parallelo	
		$Q_0 \gg 1$		$Q_0 \gg 1$
ω_r	ω_0		$\omega_0 \sqrt{1-\frac{1}{Q_0^2}}$ $Q_0>1$	$\omega_0 \left(1 - \frac{1}{2Q_0^2}\right)$
Z_r	R		RQ_0^2	
ω_m	ω_0		$\omega_0 \sqrt{\sqrt{1+\frac{2}{Q_0^2}}-\frac{1}{Q_0^2}}$ $Q_0>\sqrt{\sqrt{2}-1}\simeq 0.643594$	$\omega_0 \left(1 - \frac{1}{4Q_0^4}\right)$
$\|Z_m\|$	R		$R\frac{Q_0}{\sqrt{2\sqrt{1+\frac{2}{Q_0^2}}-2-\frac{1}{Q_0^2}}}$	$R\frac{Q_0^2}{\sqrt{1-\frac{1}{Q_0^2}}}$
$\omega_{\sqrt{5}}$	$\omega_0 \left(\sqrt{1+\frac{1}{Q_0^2}} \pm \frac{1}{Q_0}\right)$	$\omega_0 \left(1 \pm \frac{1}{Q_0}\right)$	$\omega_0 \sqrt{1+\frac{2}{Q_0^2} \pm \frac{2}{Q_0}\sqrt{1+\frac{9}{4Q_0^2}}}$ $Q_0>\sqrt[4]{5}\simeq 1.49535$	$\omega_0 \left(1 \pm \frac{1}{Q_0}\right)$
Q_{E0}	Q_0		$Q_0\sqrt{1-\frac{1}{Q_0^2}}\left(1+\frac{1}{Q_0}\right)$	$Q_0\left(1+\frac{1}{2Q_0^2}\right)$