

# Correnti alternate

Si definisce “alternata” una tensione, o una corrente,  $g(t)$  che vari nel tempo come una funzione periodica, di periodo  $T$ , a media nulla

$$\begin{cases} g(t + T) = g(t) \\ \bar{g} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} g(t') dt' = 0 \end{cases}$$

Caso particolare: una fem del tipo con

$$v = v_0 \cos(\omega t + \alpha)$$

$v_0$  “ampiezza” o “valore di picco”

$\omega$  “pulsazione” =  $2\pi / T$  (rad/s)

$f = \omega / 2\pi = 1 / T$  “frequenza” (Hertz  $\rightarrow$  Hz)

$\alpha$  “fase iniziale” o “angolo di fase” o “sfasamento”

$\omega t + \alpha$  “fase”

Si definisce “valore quadratico medio” o “valore efficace” di  $v$

$$v_{eff}^2 = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} v^2(t') dt' = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} v_0^2 \cos^2(\omega t' + \alpha) dt' = \frac{v_0^2}{2}$$

# Correnti alternate

Lo studio della risposta di una rete lineare alla fem è particolarmente importante in quanto:

$$v = v_0 \cos(\omega t + \alpha)$$

- 1) la distribuzione dell'energia elettrica avviene ovunque tramite una tensione alternata (grazie alla sua facile "trasformabilità")
- 2) qualsiasi fem periodica, che soddisfi a requisiti di continuità generalmente soddisfatti, può essere espressa nella forma (sviluppo in serie di Fourier)

$$\left\{ \begin{array}{l} f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \sin(n\omega t) + b_n \cos(n\omega t)] \\ a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(t') \sin(n\omega t') dt' \quad n = 1, 2, \dots \\ b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(t') \cos(n\omega t') dt' \quad n = 0, 1, \dots \end{array} \right.$$

ovvero come somma di contributi ognuno puramente sinusoidale (armoniche) con frequenza pari a multipli della frequenza fondamentale  $\omega/2\pi$

# Correnti alternate

Supponiamo di avere una rete lineare “a costanti concentrate”, ovvero

- 1) nelle bobine non ci sia flusso di campo magnetico disperso
  - 2) fra le armature dei condensatori si abbia induzione completa
  - 3) siano presenti resistori
- ed inoltre
- 4) le dimensioni della rete siano  $\ll cT$  con  $c$  velocità della luce e  $T = 2\pi/\omega$  periodo della tensione alternata  $v(t) = v_0 \cos(\omega t + \alpha)$  applicata da un generatore di fem in un ramo della rete
  - 5) i tempi di redistribuzione ( $10^{-18}$  s) delle cariche superficiali che assicurano i campi elettrici nella rete siano trascurabili rispetto a  $T$

In tali ipotesi siamo in un caso quasi stazionario e varranno le relazioni

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0$$

I legge di Kirchhoff

In un qualunque nodo

$$\oint \vec{E}_e \cdot d\vec{P} = 0$$

II legge di Kirchhoff

Integrale esteso a curva chiusa esterna al circuito

$$\sum_k i_k = 0$$

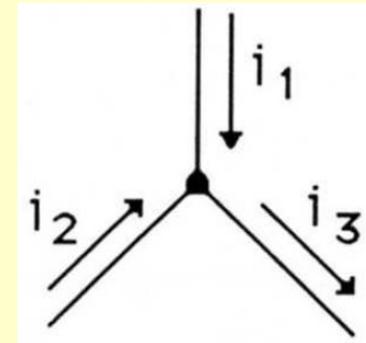
In ogni ramo

$$i_k = i_{k0} \cos(\omega t + \varphi_k)$$

# Metodo dei vettori rotanti

In un nodo a tre rami

$$\begin{cases} i_1 = i_{10} \cos(\omega t) \\ i_2 = i_{20} \cos(\omega t + \varphi) \\ i_3 = i_{30} \cos(\omega t + \psi) \end{cases}$$



Imponendo la I legge di Kirchhoff

$$i_1(t) + i_2(t) = i_3(t)$$

(valida in ogni istante e quindi a  $t = 0$  e  $t = \pi / 2 \omega$ )

$$\begin{cases} i_{10} + i_{20} \cos \varphi = i_{30} \cos \psi \\ i_{20} \sin \varphi = i_{30} \sin \psi \end{cases}$$

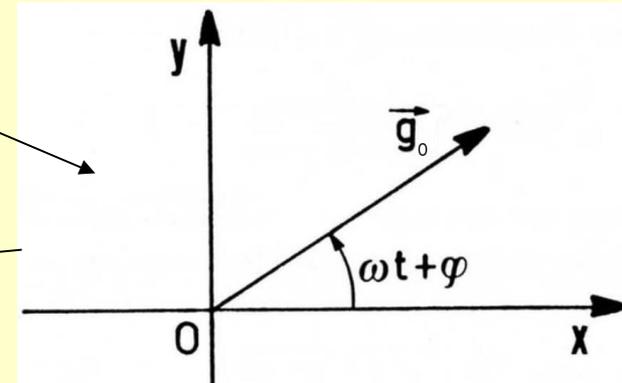
Note  $i_{10}$ ,  $i_{20}$  e  $\varphi$  si possono ricavare

$$\begin{cases} i_{30}^2 = i_{10}^2 + i_{20}^2 + 2i_{10}i_{20} \cos \varphi \\ \tan \psi = \frac{i_{20} \sin \varphi}{i_{10} + i_{20} \cos \varphi} \end{cases}$$

Correnti definite da  
ampiezza e fase

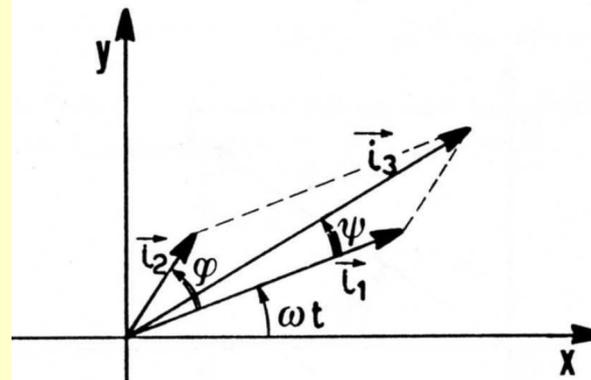
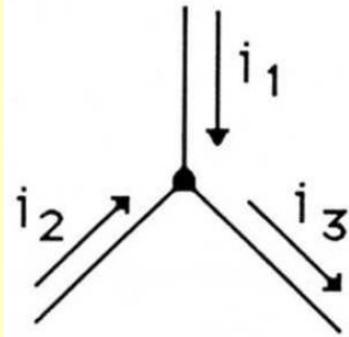
Vettori nel piano  
cartesiano

La proiezione di  $\vec{g}_0$  sull'asse x dà, istante per istante,  $g(t) = g_0 \cos(\omega t + \varphi)$   
"Metodo dei vettori rotanti"



# Metodo dei numeri complessi

Applicazione del metodo dei vettori rotanti



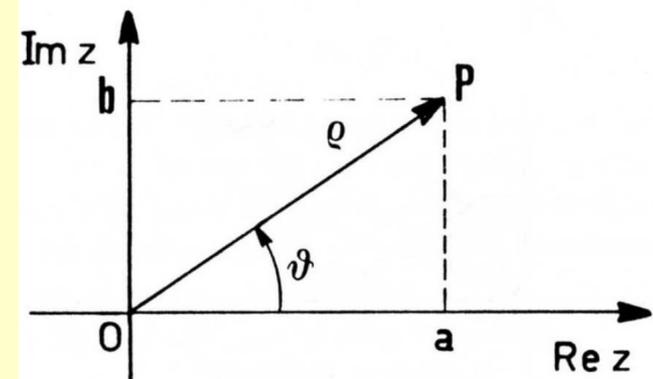
Stessi risultati ottenuti con I legge di Kirchhoff

$$\begin{cases} i_1 = i_{10} \cos(\omega t) \\ i_2 = i_{20} \cos(\omega t + \varphi) \\ i_3 = i_{30} \cos(\omega t + \psi) \end{cases}$$

Altra analogia  $\rightarrow$  numeri complessi

$$z = a + jb = \rho(\cos \theta + j \sin \theta)$$

con  $a$  parte reale  $[\text{Re}(z)]$ ,  $b$  parte immaginaria  $[\text{Im}(z)]$ ,  $\rho$  modulo e  $\theta = \text{atan}(b/a)$  fase del numero complesso



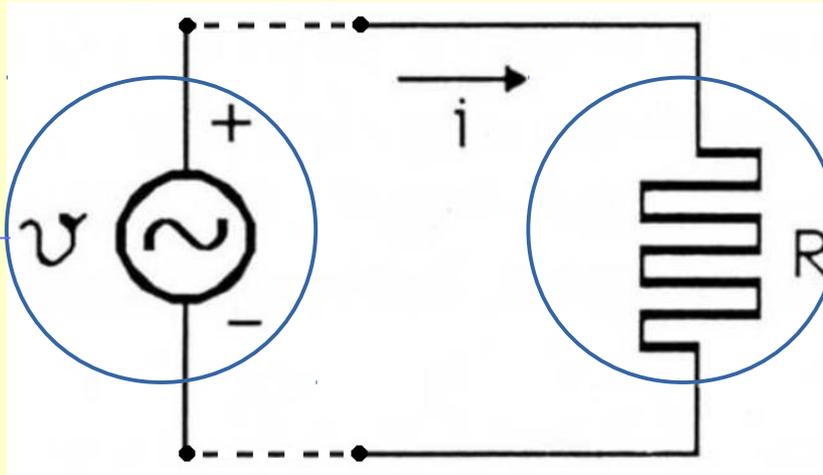
Dalla formula di Eulero  $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$  si ha  $z = \rho e^{j\theta}$

Applicando l'analogia, alla grandezza alternata  $g(t) = g_0 \cos(\omega t + \varphi)$  si può associare un numero complesso  $G = g_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$  tale che  $\text{Re}(G) = g(t)$

Applicazione: l'uguaglianza  $I_1 + I_2 = I_3$  porta agli stessi risultati ottenuti con altri metodi

# Impedenze complesse

generatore ideale  
di fem alternata  
 $v = v_0 \cos(\omega t)$



pura resistenza  
(senza effetti  
capacitivi e  
induttivi)

Stazionarietà → Il legge di Kirchhoff →  $v = i R$  →  $i = (v_0/R) \cos(\omega t)$

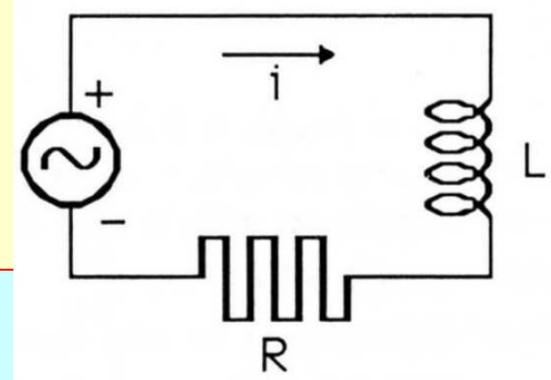
con i numeri complessi

$v(t) \rightarrow \mathbf{V} = v_0 e^{j\omega t}$  [ $\text{Re}(\mathbf{V})=v$ ] →  $\mathbf{I} = \mathbf{V}/R = (v_0/R) e^{j\omega t}$  →  $i = \text{Re}(\mathbf{I}) = (v_0/R) \cos(\omega t)$

# Impedenze complesse

In questo caso avremo

$$v_0 \cos \omega t - L \frac{di}{dt} = iR$$



La soluzione di questa equazione ha una

- fase transitoria (che tende a zero come  $e^{-(R/L)t}$ )

- soluzione di regime la cui forma può essere del tipo  $i = i_0 \cos(\omega t + \varphi)$

Sostituendo nella eq. diff. e imponendo che valga a  $t = 0$  e  $t = \pi / 2\omega$  si ottiene

$$(1) \quad \begin{cases} v_0 = Ri_0 \cos \varphi - i_0 L \omega \sin \varphi \\ 0 = -Ri_0 \sin \varphi - i_0 L \omega \cos \varphi \end{cases} \longrightarrow$$

$$\begin{cases} i_0 = \frac{v_0}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \\ \tan \varphi = -\frac{\omega L}{R} \end{cases}$$

Anticipo di fase

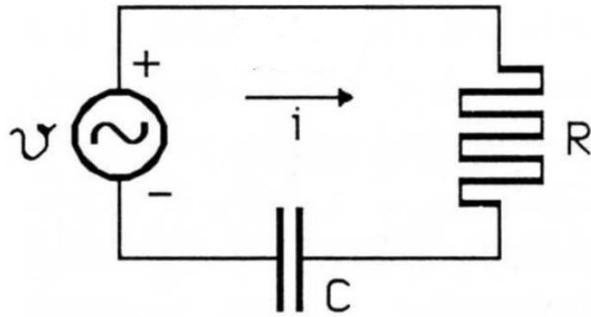
con i numeri complessi

$\mathbf{V} = v_0 e^{j\omega t}$ ,  $\mathbf{I} = i_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = i_0 e^{j\omega t} e^{j\varphi} = \mathbf{I}_0 e^{j\omega t} \rightarrow$  inserendo nella eq. differenziale

$\mathbf{V} - \mathbf{L} j \omega \mathbf{I} = \mathbf{I} R \rightarrow \mathbf{V} = (\mathbf{j} \omega \mathbf{L} + R) \mathbf{I} \rightarrow v_0 = (\mathbf{j} \omega \mathbf{L} + R) \mathbf{I}_0$  equazione nel

campo complesso che porta a 2 equazioni nel campo reale identiche alle (1)

# Impedenze complesse



In questo caso avremo

$$v_0 \cos \omega t - \frac{Q}{C} = iR$$

che derivata rispetto a t dà

$$-v_0 \omega \sin \omega t = \frac{i}{C} + R \frac{di}{dt}$$

La soluzione di questa equazione ha una

- fase transitoria (che tende a zero come  $e^{-(1/RC)t}$ )

- soluzione di regime la cui forma può essere del tipo  $i = i_0 \cos(\omega t + \varphi)$

Sostituendo nella eq. diff. e imponendo che valga a  $t = 0$  e  $t = \pi / 2\omega$  si ottiene

$$(1) \quad \begin{cases} 0 = \frac{i_0}{\omega C} \cos \varphi - Ri_0 \sin \varphi \\ -v_0 = -\frac{i_0}{\omega C} \sin \varphi - Ri_0 \cos \varphi \end{cases}$$

→

$$\begin{cases} i_0 = \frac{v_0}{\sqrt{R^2 + (\frac{1}{\omega C})^2}} \\ \tan \varphi = \frac{1}{\omega C R} \end{cases}$$

Ritardo di fase

con i numeri complessi

$$\mathbf{V} = (\mathbf{I} / j \omega C) + \mathbf{I} R = (\mathbf{1} / j \omega C + R) \mathbf{I}$$

che porta nuovamente a due equazioni reali identiche alla (1)

# Impedenze complesse

Risultati ottenuti:

- 1) circuito R →  $V = R I$
- 2) circuito RL →  $V = (R + j \omega L) I$
- 3) circuito RC →  $V = (R + 1 / j \omega C) I$

Legge di Ohm estesa alle correnti alternate

$$V = Z I$$

con Z “impedenza” del particolare componente elettrico data da

$$Z_R = R, \quad Z_L = j \omega L, \quad Z_C = -j / \omega C$$

L'identità formale della legge di Ohm ci permette di affermare che:

- le impedenze in serie si sommano
- le impedenze in parallelo portano alla somma delle ammettenze  $Y (= Z^{-1})$

Inoltre i teoremi di Thévenin, di Norton, il Principio di sovrapposizione, ecc., valgono anche nel caso di grandezze alternate introducendo in essi le corrispondenti grandezze complesse e poi prendendo la parte reale del risultato

# Impedenze complesse

Legge di Ohm estesa alle correnti alternate  $V = Z I$   
con  $V = v_0 e^{j\omega t}$ ,  $I = i_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t}$ ,  $Z = R + jX$

Considerando i moduli delle grandezze complesse avremo

$$|V| = |Z| |I| \rightarrow v_0 = \sqrt{R^2 + X^2} \cdot i_0$$

Per quanto riguarda lo sfasamento tra tensione e corrente, ponendo  $Z = |Z| e^{j\psi}$  dalla relazione  $I = V / Z$  segue

$$i_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t} = v_0 e^{j\omega t} / |Z| e^{j\psi} \rightarrow i_0 e^{j\varphi} = (v_0 / |Z|) e^{-j\psi} \rightarrow \varphi = -\psi = -\text{atan}(X/R)$$

Di conseguenza si ha

resistenza pura ( $R \neq 0, X = 0$ )  $\rightarrow |Z_R| = R$  indipendente da  $\omega$

$$i_0 = v_0 / R \rightarrow \varphi = -\text{atan}(0) = 0 \rightarrow \text{Re}(I) = i = (v_0 / R) \cos(\omega t + \varphi) = (v_0 / R) \cos(\omega t)$$

induttanza pura ( $R = 0, X = \omega L$ )  $\rightarrow |Z_L| = \omega L$  cresce con  $\omega$  crescente

$$i_0 = v_0 / \omega L \rightarrow \varphi = -\text{atan}(\infty) = -\pi / 2 \rightarrow \text{Re}(I) = i = (v_0 / \omega L) \cos(\omega t + \varphi) = (v_0 / \omega L) \text{sen}(\omega t)$$

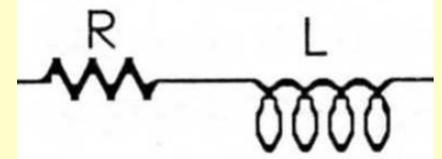
condensatore puro ( $R = 0, X = -1/\omega C$ )  $\rightarrow |Z_C| = 1/\omega C$  decresce con  $\omega$  crescente

$$i_0 = v_0 \omega C \rightarrow \varphi = -\text{atan}(-\infty) = \pi / 2 \rightarrow \text{Re}(I) = i = (v_0 \omega C) \cos(\omega t + \varphi) = -(v_0 / \omega C) \text{sen}(\omega t)$$

# Componenti fisici reali

## Resistori

È sempre presente una componente induttiva ( $\approx \mu\text{H}$ ) che può diventare significativa ad alta frequenza

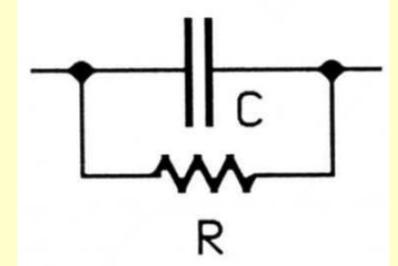


## Condensatori

Isolante tra le armature non perfetto  $\rightarrow$  resistenza in parallelo

$$Z_{\text{reale}} = 1/(1/R + j\omega C) = (1/j\omega C) * 1/(1 + 1/j\omega C R)$$

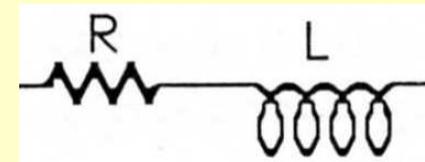
Il costruttore fornisce  $1/\omega C R$  ("fattore di dissipazione"  $\approx 5 \cdot 10^{-3}$ ) che è abbastanza indipendente da  $\omega$  (R varia circa come  $1/\omega$ )



## Induttanze

A causa della resistività del materiale dell'avvolgimento deve essere aggiunta una resistenza in serie.

Viene definito il "fattore di merito" tramite il rapporto  $Q = \omega L/R$  ( $> 100$  per bobine a nucleo ferromagnetico,  $< 100$  per avvolgimenti in aria). Anche Q è quasi indipendente da  $\omega$ .



Ad altissime frequenze ( $> 10^7$  Hz) altri effetti entrano in gioco che modificano gli schemi equivalenti sopra riportati