Misuratore digitale LCR

Multimetro a 3 cifre e mezzo

Range di misura

Resistenze: 0.01Ω – 20 MΩ (7 portate selezionabili)

Induttanze: 0.1 μH – 200 H (7 portate selezionabili)

Capacità: 0.1 pF – 2mF (8 portate selezionabili)

Nel caso di capacità e induttanze la frequenza di misura varia tra 10 Hz e 100 Hz a seconda della portata selezionata

ATTENZIONE: ingressi diversi per misure diverse!

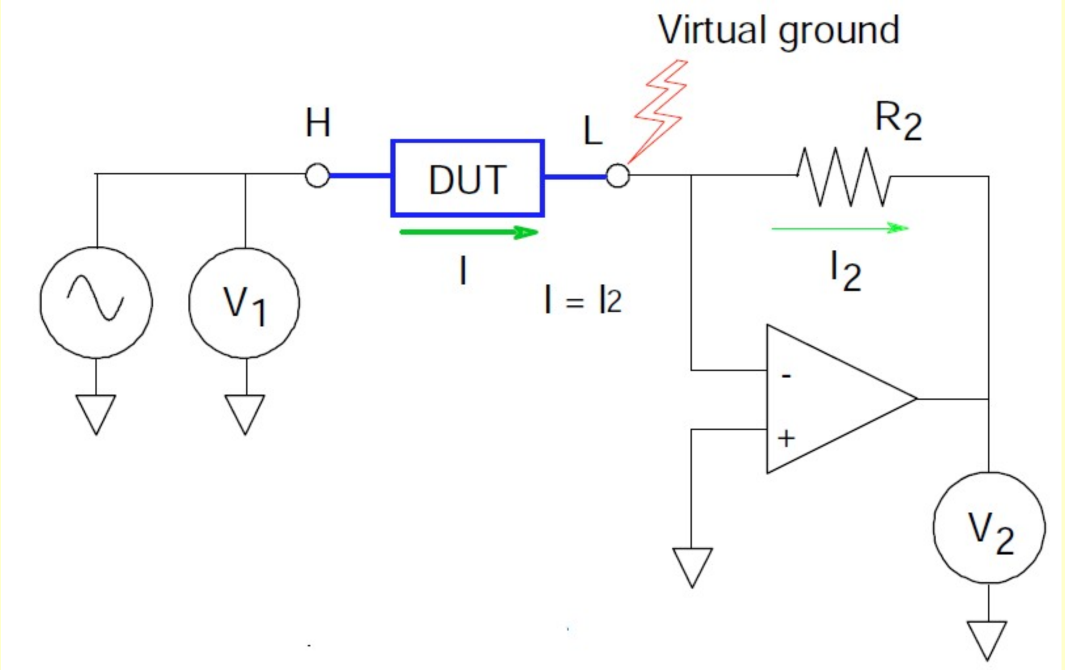
Misuratore digitale LCR

Principio di funzionamento

Ponte Auto-Bilanciante

E' utilizzabile nell'ambito 5 Hz – 40 MHz ed è il principio migliore (ne esistono diversi altri) nell'ambito 5-1000 Hz

Ai terminali H e L viene connesso il DUT (Device Under Test).
Il multimetro applica al DUT una tensione alternata V_1.
L'amplificatore mantiene il suo ingresso invertente al potenziale di massa fornendo in uscita una tensione V_2 tale da far scorrere sulla resistenza di reazione R_2 una corrente I_2 praticamente identica alla I che scorre sul DUT.



In tali condizioni si ha $V_2 = I_2 R_2$

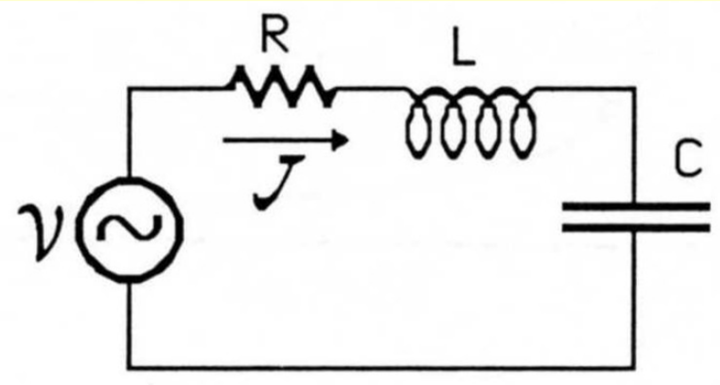
da cui $Z = V_1 / I = V_1 / I_2 = V_1 R_2 / V_2$

e quindi, note V_1 e R_2, dall'ampiezza di V_2 è possibile ricavare Z

Circuito risonante serie

Il circuito accanto, con $\nu = \nu_0 \, e^{j\omega t}$, ha impedenza totale

$$\mathcal{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$



avente modulo e fase

$$\begin{cases} |\mathcal{Z}|^2 = R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2 \\ \varphi_{\mathcal{Z}} = \operatorname{atan} \dfrac{(\omega L - \frac{1}{\omega C})}{R} \end{cases}$$

per $\omega \to 0$ $|Z| \to \infty$ (condensatore) $\varphi_Z \to -\pi/2$

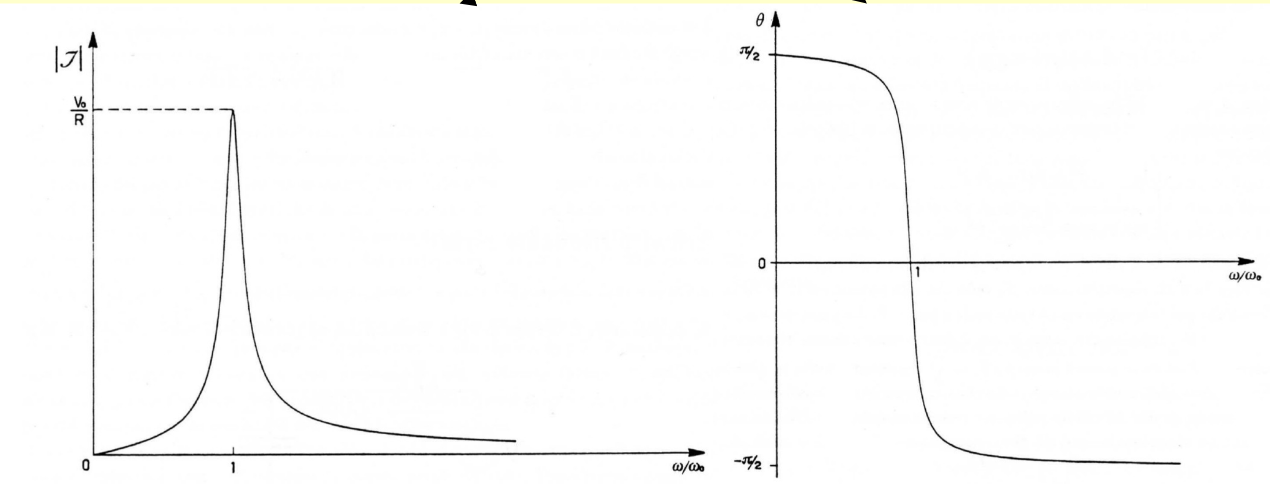
per $\omega \to \infty$ $|Z| \to \infty$ (induttanza) $\varphi_Z \to +\pi/2$

Ricordando che $|J| = |\nu|/|Z|$ e $\varphi(J) = -\varphi_Z$, la corrente che scorre nel circuito

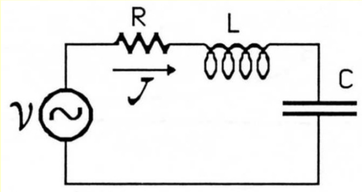
e quindi per

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

"pulsazione di risonanza" l'impedenza ha un minimo pari a R ed è tutta reale



Circuito risonante serie



Per $\omega = \omega_0$ → $J = V_0 / R$ massima → V_R, V_C e V_L massime → $V_R = J R$ → $V_C = -V_L$
infatti

$$\mathcal{V}_L = j\omega_0 L \frac{V_0 \cdot \exp j\omega_0 t}{R} = j\sqrt{\frac{L}{C}} \frac{V_0 \cdot \exp j\omega_0 t}{R}$$

$$\mathcal{V}_C = \frac{1}{j\omega_0 C} \frac{V_0 \cdot \exp j\omega_0 t}{R} = -j\sqrt{\frac{L}{C}} \frac{V_0 \cdot \exp j\omega_0 t}{R} = -\mathcal{V}_L$$

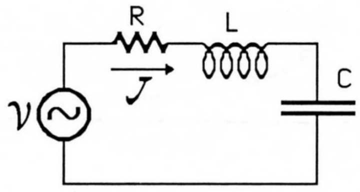
quindi le due tensioni sono in quadratura con il generatore e in opposizione tra loro

In risonanza l'energia si trasforma con continuità da energia elettrostatica (condensatore) a magnetica (induttanza), e viceversa, e il generatore si preoccupa di compensare le perdite di energia per effetto Joule sulla resistenza.

Il parametro che caratterizza il comportamento del circuito alla risonanza è il fattore di merito Q definito da

$$Q = 2\pi \frac{Energia\ massima\ immagazzinata}{Energia\ dissipata\ nel\ sistema\ durante\ un\ ciclo} = 2\pi \frac{E_{max}}{< E_D >}$$

Fattore di merito



$$Q = 2\pi \frac{Energia\ massima\ immagazzinata}{Energia\ dissipata\ nel\ sistema\ durante\ un\ ciclo} = 2\pi \frac{E_{max}}{< E_D >}$$

Nel nostro caso, in risonanza $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

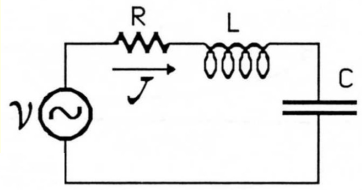
$$i = I_0 \cos \omega_0 t = \frac{V_0}{R} \cos \omega_0 t \longrightarrow q_c = \frac{V_0}{R\omega_0} \text{ sen } \omega_0 t$$

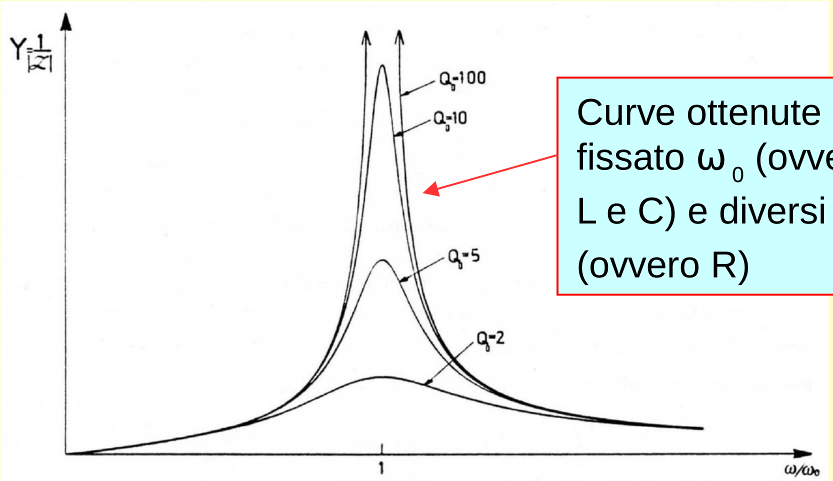
costante

$$E_T(t) = \frac{1}{2} L\, i^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} L \frac{V_0^2}{R^2} \cos^2 \omega_0 t + \frac{1}{2}\frac{V_0^2}{R^2\omega_0^2 C} \text{ sen }^2 \omega_0 t = \frac{1}{2}\frac{L V_0^2}{R^2} = \frac{1}{2}\frac{V_0^2}{R^2\omega_0^2 C}$$

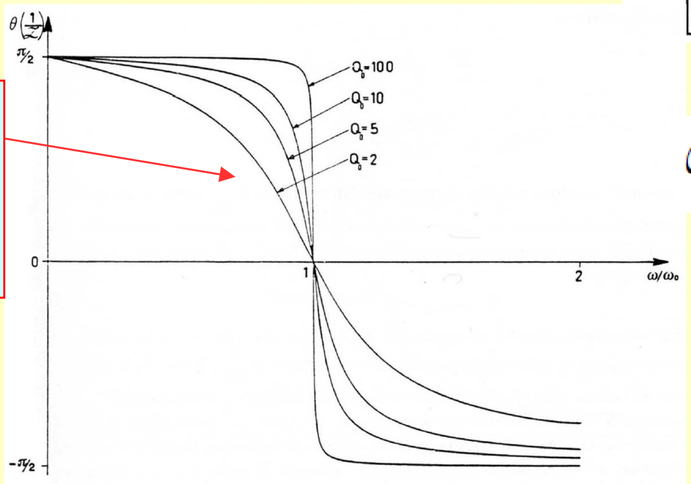
$$E_D = < W > \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi\, i_{eff}^2 R}{\omega_0} = \frac{\pi\, I_0^2\, R}{\omega_0} = \frac{\pi V_0^2}{\omega_0 R} \longrightarrow Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Fattore di merito





Curve ottenute per fissato ω_0 (ovvero L e C) e diversi Q_0 (ovvero R)



$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Q_0 = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Si ha infatti

$$\mathcal{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R\left[1 + j\frac{\omega L}{R}\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\right] = R\left[1 + j\frac{\omega}{\omega_0}Q_0\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\right]$$

$$|\mathcal{Y}| = \frac{1}{|\mathcal{Z}|} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} = \frac{1}{R\sqrt{1 + \frac{\omega^2 L^2}{R^2}\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2}} \longrightarrow |\mathcal{Y}|_{\omega=\omega_0} = \frac{1}{R}$$

$$\theta(\mathcal{Y}) = -\,\mathrm{atan}\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right) = -\,\mathrm{atan}\,\frac{\omega L(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2})}{R} \longrightarrow \theta(\mathcal{Y})_{\omega=\omega_0} = 0$$

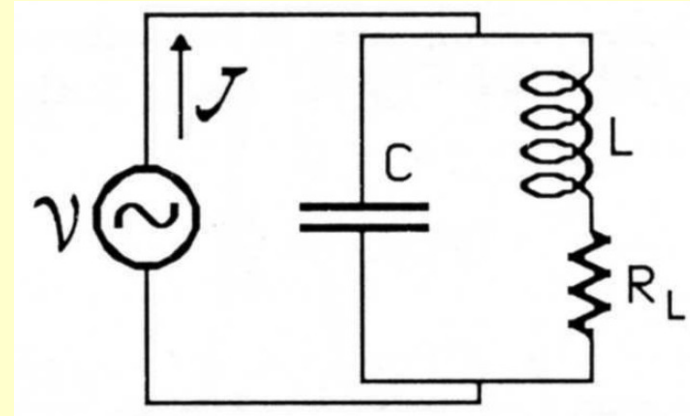
Se $Q_0 >> 1$ avremo che per $(\omega - \omega_0)/\omega_0 = \pm 1/(2Q_0)$ $\rightarrow Y(\omega) = Y(\omega_0)/\sqrt{2}$ [-3dB]
$\rightarrow \theta(\omega) = \mp 45°$

Quindi $\rightarrow$ circuito RLC serie ottimo filtro passa banda (nell'intorno di ω_0)

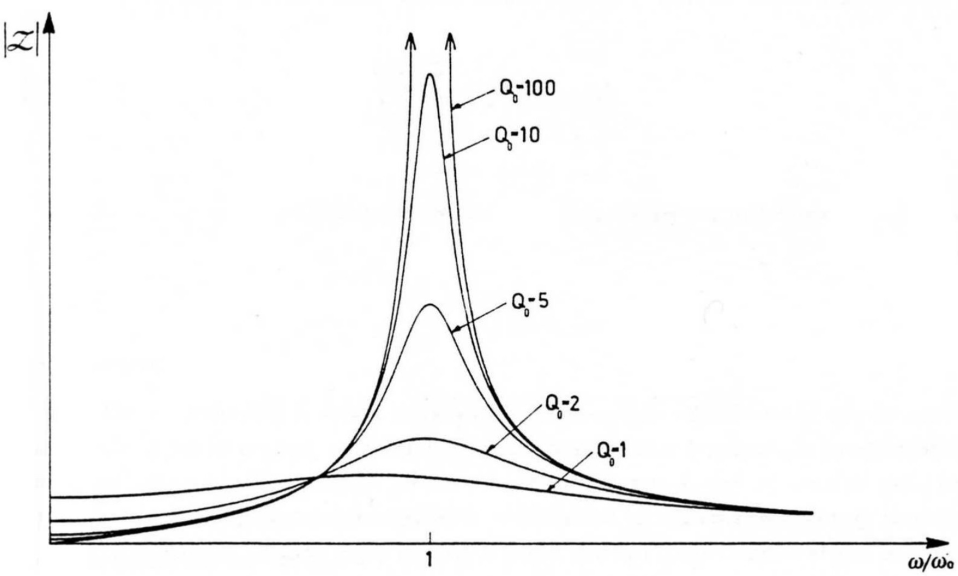
Circuito risonante parallelo

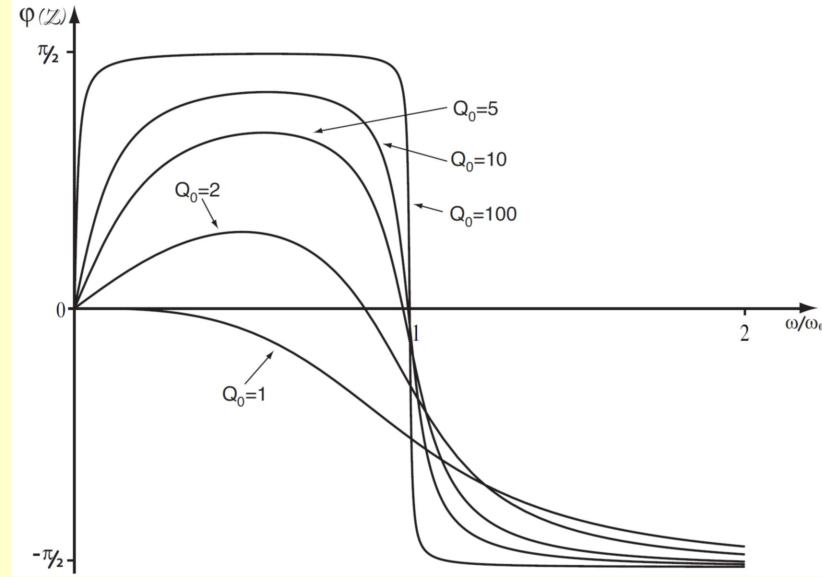
Il circuito accanto, con $\nu = \nu_0\, e^{j\omega t}$, ha impedenza totale

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{j\omega C + \dfrac{1}{R_L + j\omega L}} = \frac{R_L + j\omega L}{1 + j\omega C(R_L + j\omega L)}$$



con andamenti in funzione di ω/ω_0

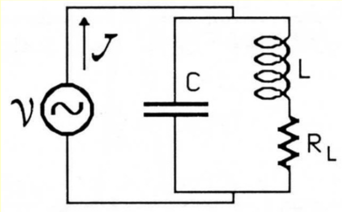




"pulsazione di risonanza" quella per cui l'impedenza è tutta reale

$$\omega_R^2 = \omega_0^2\left(1 - R_L^2\frac{C}{L}\right) = \omega_0^2\left(1 - \frac{1}{Q_0^2}\right)$$

Fattore di merito



Applicando la definizione del fattore di merito si ricava

$$Q_{0P} = \omega_R \frac{L}{R_L}\left(1 + R_L\sqrt{\frac{C}{L}}\right) = Q_0\left(1 - \frac{1}{Q_0^2}\right)\left(1 + \frac{1}{Q_0}\right)$$

$$\mathcal{Z} = \frac{R_L + j\omega L}{1 + j\omega C(R_L + j\omega L)}$$

e quindi per valori alti di Q_0 si ha $Q_{0P} \approx Q_0$

L'impedenza del circuito alla risonanza vale

$$\mathcal{Z}_p = R_L \frac{1 + j\dfrac{\omega_R L}{R_L}}{1 - \omega_R^2 CL + j\omega_R C R_L} = \frac{R_L}{1 - \omega_R^2 CL} = R_L Q_0^2 = \frac{1}{R_L}\frac{L}{C}$$

tutta reale (come atteso da definizione) ma non al massimo valore

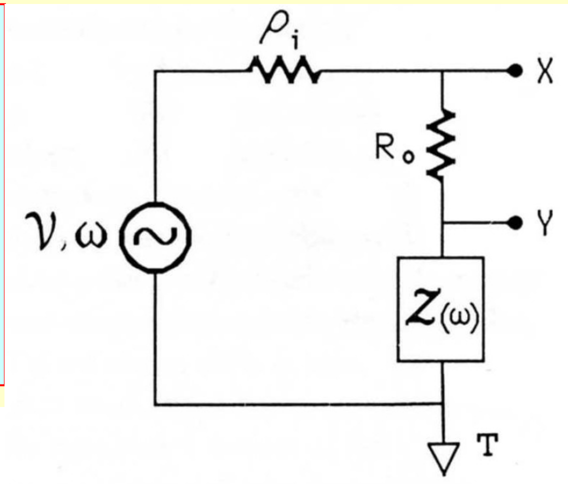
Le correnti che scorrono nei due rami del parallelo sono, indicando con J quella fornita dal generatore,

$$J_{L0} = J^* Z_{C0} / (Z_{C0} + R_L + Z_{L0}) \approx -j\, J\, Q_0 \qquad \text{e} \qquad J_{C0} \approx j\, J\, Q_0$$

ovvero in modulo Q_0 volte quella entrante e sfasate rispetto ad essa di circa ± π/2, dando luogo al continuo rimbalzo tra energia elettrostatica e magnetica e a cadute (massime) di tensione che questa volta non si compensano ma producono l'innalzamento della tensione ai capi del parallelo (applicazione a ricezione di onde radio)

Misura della frequenza di risonanza

Nel circuito accanto
Z (ω) rappresenta un circuito risonante
ν , ω generatore di tensione con ampiezza e frequenza variabili
ρ_i resistenza interna del generatore
R_0 resistore puro



Le tensioni $V_{XT} = \nu_X$ e $V_{YT} = \nu_Y$ sono legate dalla relazione

$$\mathcal{V}_y = \mathcal{V}_x \frac{\mathcal{Z}(\omega)}{R_0 + \mathcal{Z}(\omega)}$$

Inviando le tensioni ν_X e ν_Y ai canali x e y dell'oscillografo, la traccia sul monitor è caratterizzata da

$$\begin{cases} x = x_0 \cos \omega t \\ y = y_0 \cos(\omega t + \varphi) \end{cases} \longrightarrow \frac{y^2}{y_0^2} + \frac{x^2}{x_0^2} - \frac{2xy}{x_0 y_0} \cos\varphi = \text{sen}^2\varphi$$

equazione di un'ellisse che degenera in un segmento di retta di pendenza y_0 / x_0 quando $\varphi = 0$ (risonanza).