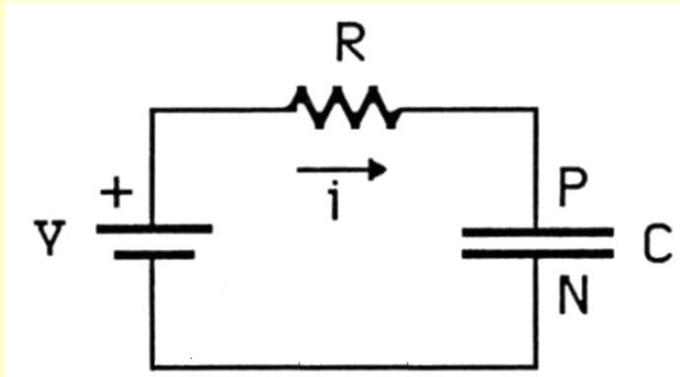


Energia accumulata in un condensatore



In base alla seconda legge di Kirchhoff istante per istante avremo

$$v(t) = i(t)R + \frac{q(t)}{C}$$

potenza istantanea fornita dal generatore

$$v(t)i(t) - i^2(t)R = \frac{q(t)}{C}i(t)$$

perdita per effetto Joule

potenza accumulata in C sotto forma di campo elettrico

Sappiamo che

$$i(t) = \frac{V}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

derivata temporale di

Sostituendo nella eq. diff. e integrando

$$W_E = \frac{1}{2} \frac{q^2(t)}{C}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{V^2}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) dt - \int_0^{\infty} \frac{V^2}{R^2} R \exp\left(-2\frac{t}{RC}\right) dt =$$

$$= \frac{V^2}{R} \left[RC \int_0^{\infty} \frac{1}{RC} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) dt - \frac{RC}{2} \int_0^{\infty} \frac{2}{RC} \exp\left(-\frac{2t}{RC}\right) dt \right] =$$

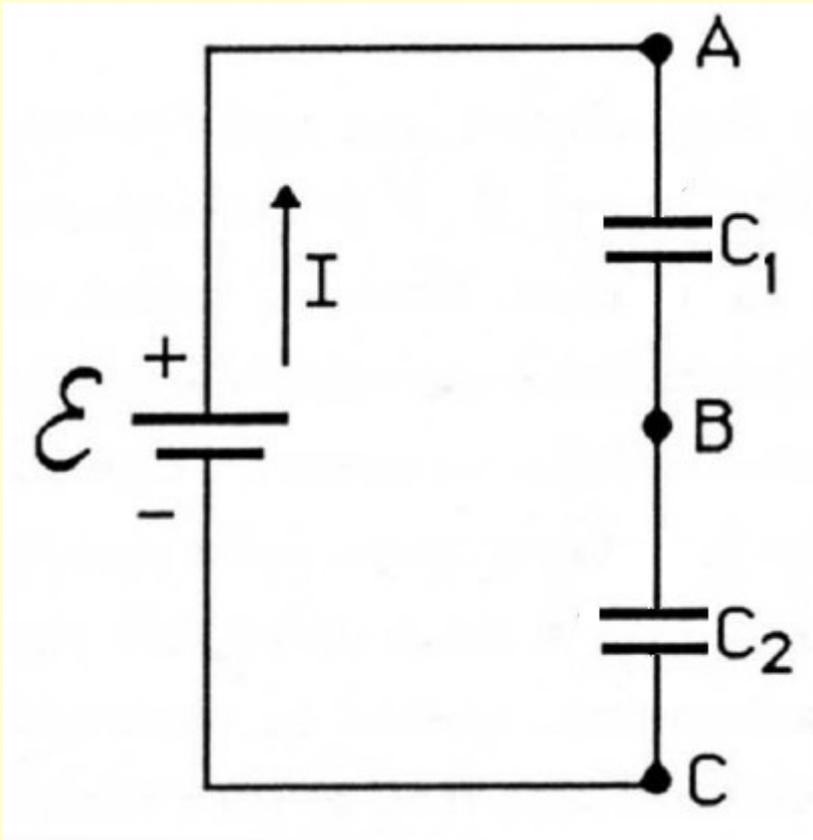
$$CV^2 - CV^2/2 = CV^2/2$$

= 1

generatore

Joule

Condensatori in serie

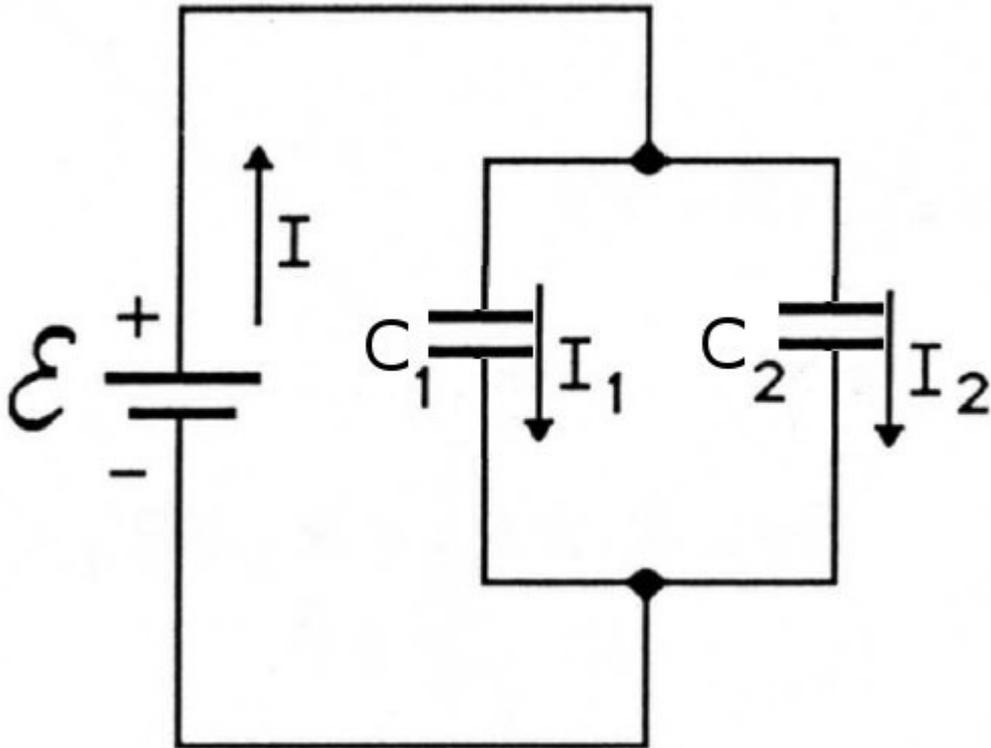


$$\begin{cases} V_A - V_B = q/C_1 \\ V_B - V_C = q/C_2 \end{cases}$$

$$\varepsilon = V_A - V_C = q \cdot \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)$$

$$\frac{1}{C_T} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Condensatori in parallelo



$$\varepsilon = \frac{q_1}{C_1}$$

$$\varepsilon = \frac{q_2}{C_2}$$

$$q = q_1 + q_2 = \varepsilon \cdot (C_1 + C_2)$$

$$C_T = \frac{q}{\varepsilon} = C_1 + C_2$$

Auto e Mutua Induzione

Circuito 1

corrente $i_1 \rightarrow$ campo induzione magnetica $\vec{B}_1(P)$

Se il mezzo in cui il circuito è immerso è omogeneo, isotropo e con permeabilità magnetica μ_r si ha

$$\vec{B}_1(P) = \frac{\mu_r \mu_0}{4\pi} \oint_1 \frac{i_1 d\vec{l}_1 \wedge \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_r \mu_0 i_1}{4\pi} \oint_1 \frac{d\vec{l}_1 \wedge \vec{r}}{r^3}$$

Tale campo si concatena sia con il circuito 1 che con il 2 dando luogo ai seguenti flussi

$$\begin{cases} \Phi_{11} = \int_{S_1} \vec{B}_1(P) \cdot \vec{n} dS_1 = \frac{\mu_r \mu_0 i_1}{4\pi} \int_{S_1} \left(\oint_1 \frac{d\vec{l}_1 \wedge \vec{r}}{r^3} \right) \cdot \vec{n} dS_1 = i_1 L_1 \\ \Phi_{12} = \int_{S_2} \vec{B}_1(P) \cdot \vec{n} dS_2 = \frac{\mu_r \mu_0 i_1}{4\pi} \int_{S_2} \left(\oint_1 \frac{d\vec{l}_1 \wedge \vec{r}}{r^3} \right) \cdot \vec{n} dS_2 = i_1 L_{12} \end{cases}$$

Coefficiente di autoinduzione

Considerando l'effetto della corrente i_2 sul circuito 1 otteniamo

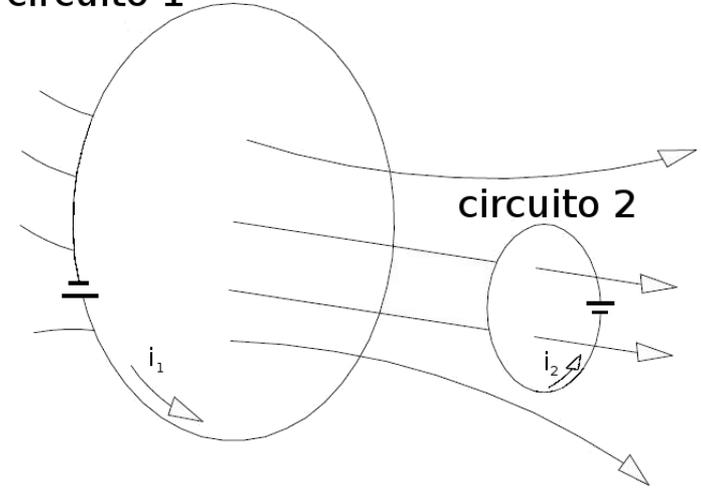
$$\begin{cases} \Phi_{22} = i_2 L_2 \\ \Phi_{21} = i_2 L_{21} \end{cases}$$

Se i due circuiti sono posti in geometria fissa

$$M = L_{12} = L_{21}$$

Coefficiente di mutua induzione

circuito 1



Auto e Mutua Induzione

L (sempre positivo) e M si misurano in (valori tipici μH)

$$\text{Henry (H)} = \frac{\text{Weber}}{\text{Ampère}} = \frac{\text{Tesla} \cdot \text{m}^2}{\text{Ampère}} = \frac{\text{Volt} \cdot \text{secondo}}{\text{Ampère}}$$

Se i_1 e i_2 variano nel tempo, anche i flussi variano e si osserveranno delle fem indotte

$$\begin{cases} \mathcal{E}_1 = -\frac{d}{dt}(\Phi_{11} + \Phi_{21}) = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \\ \mathcal{E}_2 = -\frac{d}{dt}(\Phi_{22} + \Phi_{12}) = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

Concentrando il coefficiente di auto (e mutua) induzione in una porzione di uno (o due) circuiti si individuano due nuovi elementi fisici: "induttanza" e "mutua induttanza"

In pratica :

Induttanza \rightarrow avvolgendo n spire di rame su supporto (ferromagnetico, $\mu_r \gg 1$)

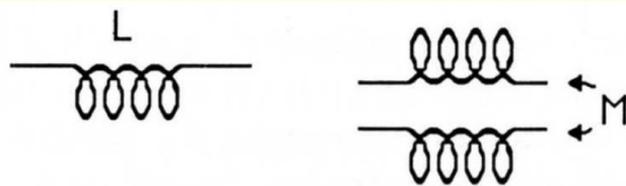
aumenta L di un fattore n^2 ($\mu_r n^2$)

Mutua induttanza \rightarrow avvolgendo su uno stesso supporto (ferromagnetico, $\mu_r \gg 1$)

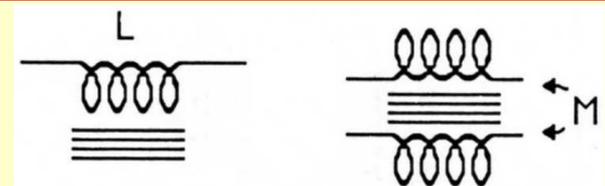
due avvolgimenti di rame facenti parte di due diverse maglie (ex. Trasformatore)

Per essi si usano i simboli circuitali:

$$\mu_r = 1$$



$$\mu_r \gg 1$$



Induttanze in regime transitorio

Se nel circuito accanto viene chiuso il tasto T a $t = 0$

$$V - L \frac{di}{dt} = i(R + \rho)$$

ovvero

$$\frac{L}{R + \rho} \frac{di}{dt} + i = \frac{V}{R + \rho}$$

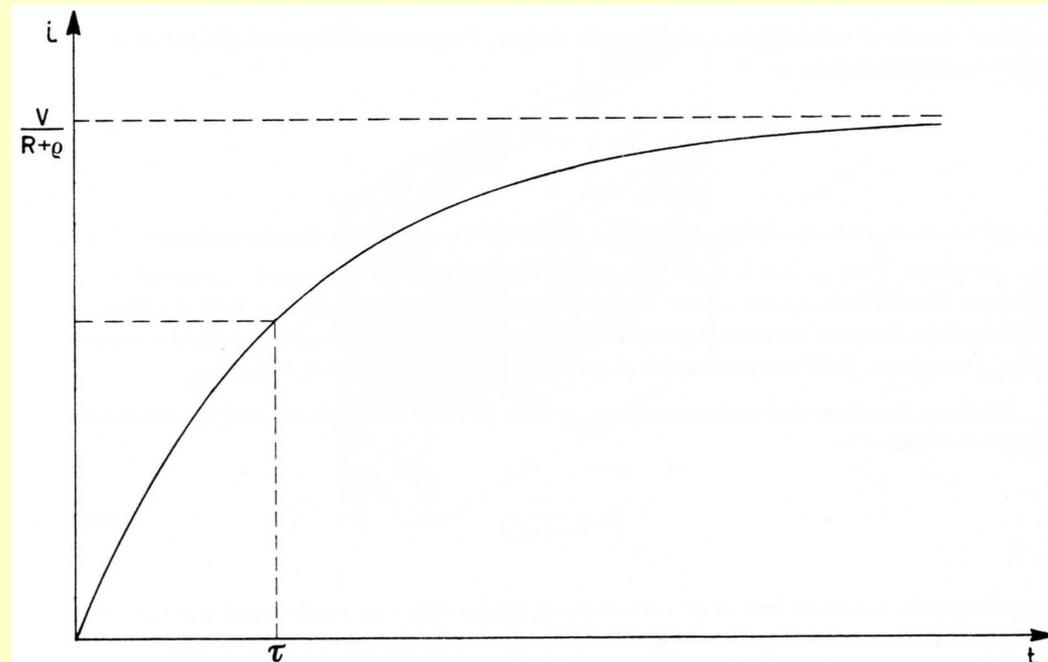
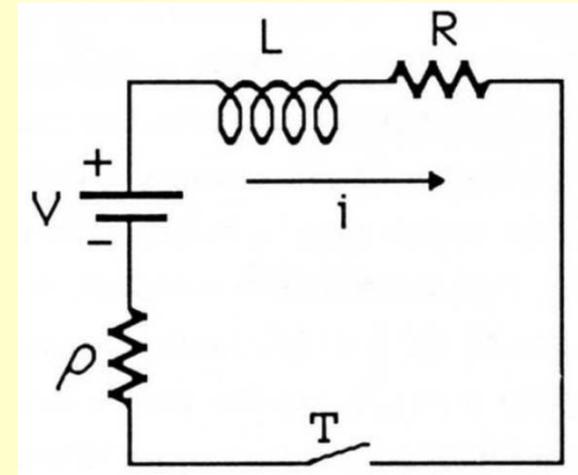
con soluzione

$$i(t) = \frac{V}{R + \rho} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]$$

con

$$\tau = \frac{L}{R + \rho}$$

E se dopo un tempo $t \gg \tau$ si apre il tasto T che succede?



Mutue induttanze in regime transitorio

Se nel circuito accanto a $t = 0$ viene chiuso il tasto T

$$\begin{cases} i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = V \\ i_2 R_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} i_1 + \frac{di_1}{dt}(\tau_1 + \tau_2) + \frac{d^2 i_1}{dt^2}(\tau_1 \tau_2 - \theta^2) = \frac{V}{R_1} \\ i_2 + \frac{di_2}{dt}(\tau_1 + \tau_2) + \frac{d^2 i_2}{dt^2}(\tau_1 \tau_2 - \theta^2) = 0 \end{cases}$$

con

$$\tau_1 = \frac{L_1}{R_1} \quad \tau_2 = \frac{L_2}{R_2} \quad \theta^2 = \frac{M^2}{R_1 R_2}$$

e soluzioni

