Chapter 11

Equazioni e disequazioni trigonometriche

Definizione Si chiamano **equazioni goniometriche** le equazioni nelle quali l' incognita è espressa come variabile di funzioni goniometriche.

11.1 Equazioni goniometriche fondamentali

Le più semplici equazioni goniometriche contengono una sola funzione goniometrica e ad esse si riconducono, applicando le relazioni studiate, altre equazioni più complesse.

1) **Sia data l' equazione:**

$$sen x = m$$

Risolvere questa equazione significa trovare tutti gli angoli x aventi seno uguale ad m, con la condizione: $-1 \leq m \leq 1$.

Cerchiamo sulla circonferenza goniometrica di figura 11.1 i punti aventi ordinata m, tali punti sono gli estremi degli archi i cui corrispondenti angoli al centro soddisfano l' equazione.

Per trovare sulla circonferenza goniometrica i punti aventi ordinata m è sufficiente riportare sull' asse delle ordinate il segmento $\overline{OM}$ di misura m e tracciare da m la parallela all' asse x; si ottengono gli angoli $\widehat{AOB}$ e $\widehat{AOC}$, fra loro supplementari, le cui misure soddisfano l' equazione data.

Indicata con α la misura dell' angolo $\widehat{AOB}$, la misura dell' angolo $\widehat{AOC}$ è $(\pi - \alpha)$ e tutte le soluzioni dell' equazione $sen x = m$ sono:

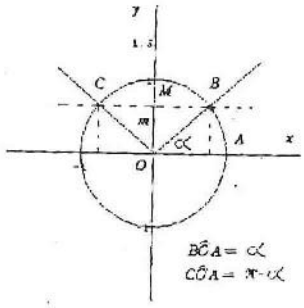

Figure 11.1: Soluzione grafica di $senx = m$

$$x = \alpha + 2k\pi \qquad k \in Z$$

oppure

$$x = (\pi - \alpha) + 2k\pi \qquad k \in Z$$

Le precedenti due uguaglianze si possono riunire in una sola:

$$x = (-1)^h \alpha + h\pi \qquad h \in Z$$

Esempio Risolvere l' equazione:

$$senx = \frac{1}{2}$$

Sul cerchio goniometrico il più piccolo angolo positivo avente seno $\frac{1}{2}$ è l' angolo di 30° o $\frac{\pi}{6}$ radianti. Perciò la soluzione dell' equazione è
in radianti:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \qquad x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, \qquad k \in Z$$

in gradi:

$$x = 30° + k \cdot 360°, \qquad x = 150° + k \cdot 360°, \qquad k \in Z$$

Esempio Risolvere l' equazione

$$senx = -1$$

Il più piccolo angolo positivo che soddisfa l' equazione è l' angolo di 270° o $\frac{3}{2}\pi$ radianti, perciò la soluzione è:
in radianti:

$$x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \qquad k \in Z$$

in gradi:

$$x = 270° + k \cdot 360° \qquad k \in Z$$

2) Sia data l' equazione:

$$cosx = n$$

Per la risolubilità deve essere $-1 \leq n \leq 1$.

Essendo il coseno un' ascissa, si procede in modo analogo a quello visto per il seno, riportando sull' asse delle ascisse il segmento $\overline{ON}$ di misura n e tracciando per N la parallela all' asse delle ordinate (vedi figura 11.2).

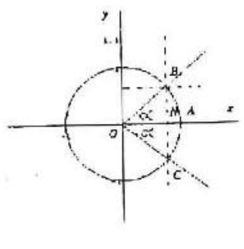

Figure 11.2: Soluzione grafica di $cosx = n$

Si ottengono i due angoli $\widehat{AOC}$ e $\widehat{AOB}$, fra loro opposti, le cui misure soddisfano l' equazione $cosx = n$.

Indicata con α la misura dell' angolo $\widehat{AOB}$, la misura dell' angolo $\widehat{AOC}$ è $(-\alpha)$ e tutte le soluzioni dell' equazione sono date da:

$$x = \pm\alpha + 2k\pi \qquad k \in Z$$

Esempio Risolvere l' equazione:

$$cosx = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Il più piccolo angolo positivo avente il coseno che vale $\frac{\sqrt{2}}{2}$ è l' angolo di $\frac{\pi}{4}$ radianti (o 45° gradi) , perciò la soluzione è:

$$x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi \qquad k \in Z$$

Esempio Risolvere l' equazione:

$$cosx = -\frac{1}{2}$$

Il più piccolo angolo positivo che soddisfa l' equazione è l' angolo di 120° $\left(\frac{2}{3}\pi \text{ radianti}\right)$,perciò la soluzione espressa in gradi è:

$$x = \pm 120^\circ + k \cdot 360^\circ \qquad k \in Z$$

3) Sia data l' equazione:

$$tgx = p \qquad p \in \Re$$

Si traccia la retta t tangente alla circonferenza goniometrica nel punto A origine degli archi e si riporta su t il segmento $\overline{AP}$ di misura p. Congiungendo P con O si ottengono due angoli $\widehat{AOB}$ e $\widehat{AOC}$ che differiscono di π, le cui misure soddisfano l' equazione data (vedi figura 11.3)..

Indichiamo con α la misura dell' angolo $\widehat{AOB}$ e, ricordando che la tangente ha periodo π, tutte le soluzioni dell' equazione proposta sono date da:

$$x = \alpha + k\pi \qquad k \in Z$$

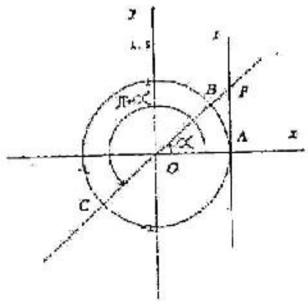

Figure 11.3: Soluzione grafica di $tgx = p$

Esempio Risolvere l' equazione:

$$tgx = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Il più piccolo angolo positivo che soddisfa l' equazione è l' angolo di $\frac{\pi}{6}$ radianti (o $30°$), perciò la soluzione è:

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi \qquad k \in Z$$

Esempio Risolvere l' equazione:

$$tgx = -1$$

Il più piccolo angolo positivo che soddisfa l' equazione è l' angolo di $\frac{3}{4}\pi$ radianti (o $135°$), perciò la soluzione è:

$$x = \frac{3}{4}\pi + k\pi \qquad k \in Z$$

Osservazione Le equazioni precedenti si possono risolvere utilizzando le calcolatrici che hanno le funzioni goniometriche. Mediante la funzione inversa si ottiene un angolo α che soddisfa l' equazione elementare proposta; precisamente nel caso dell' equazione $senx = m$ si ottiene un angolo α compreso nell' intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, nel caso dell' equazione $cosx = n$ si ottiene un angolo α compreso nell' intervallo $[0, \pi]$, nel caso dell' equazione $tgx = p$ si ottiene un angolo α compreso nell' intervallo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Trovato l' angolo α si deve poi determinare la soluzione generale utilizzando le formule precedenti.

11.2 Tipi semplici di equazioni goniometriche

Le precedenti equazioni sono le più semplici possibili; ad esse si perviene dopo trasformazioni operate con le consuete formule dell' algebra e l' applicazione delle formule trigonometriche, senza che sia possibile fornire regole generali. Vi sono tuttavia alcuni tipi particolari di equazioni goniometriche che vogliamo qui studiare.

1) Equazioni contenenti una sola funzione goniometrica, o riconducibili ad esse mediante l' applicazione di formule goniometriche.

Esempio Risolvere l' equazione:

$$2sen^2x + 3cosx - 3 = 0$$

Dall' identità fondamentale si ha: $sen^2x = 1-\ cos^2x$, sostituendo:

$$2\left(1 - cos^2x\right) + 3cosx - 3 = 0$$

$$2cos^2x - 3cosx + 1 = 0$$

$$cosx = \frac{3 \pm 1}{4} = \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$$

si perviene così alle due equazioni elementari:

$$cosx = \frac{1}{2} \qquad x = \pm\frac{\pi}{3} + 3k\pi\ , \qquad k \in Z$$

$$cosx = 1 \qquad x = 2k\pi, \qquad k \in Z$$

2) Equazioni omogenee in senx o cosx o riconducibili ad esse.
Un' equazione è *omogenea* in $senx$ o $cosx$se è dei tipi:

$$asenx + bcosx = 0 \qquad \text{omogenea di I° grado}$$

$$asen^2x + bsenx \cdot cosx + ccos^2x = 0 \qquad \text{omogenea di II° grado}$$

$$ecc.....$$

Se $x = \pm\frac{\pi}{2}$ non soddisfa l' equazione, ossia se $cosx \neq 0$, si dividono tutti i termini dell' equazione per $cosx$ (o una sua potenza) e si ottiene un' equazione in tgx.

Esempio Risolvere l' equazione:

$$senx - \sqrt{3}cosx = 0$$

Essendo nell' equazione $cosx \neq 0$ si può dividere per $cosx$ e si ottiene:

$$tgx = \sqrt{3}$$

La soluzione è:

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi \qquad k \in Z$$

Esempio Risolvere l' equazione:

$$cos^2x + cosxsenx = 2sen^2x$$

Dividendo per cos^2x si ottiene:

$$1 + tgx = 2tg^2x$$

ossia:

$$2tg^2x - tgx - 1 = 0$$

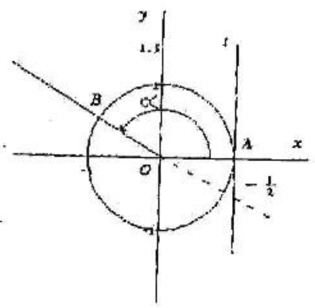

Figure 11.4: Soluzione grafica di $tgx = -\frac{1}{2}$

$$tgx = \frac{1 \pm 3}{4} = \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$$

da cui si ricava (vedi figura 11.4) :

$$tgx = -\frac{1}{2} \qquad x = \alpha + k\pi \qquad k \in Z$$

$$tgx = 1 \qquad x = \frac{\pi}{4} + k\pi \qquad k \in Z$$

Per l' equazione $tgx = -\frac{1}{2}$ il valore approssimato di α si trova mediante le tavolo goniometriche o mediante la calcolatrice, utilizzando la funzione inversa $arctg$, che nelle calcolatrici è usualmente indicata con $tg^{(-1)}$; per cui $\alpha = tg^{(-1)}\left(\frac{1}{2}\right)$. Si trova:

$$\alpha \simeq 153°26'6'' \text{ oppure } \alpha \simeq 2,677949 \text{ radianti}$$

a seconda se la calcolatrice è in modalità gradi (DEG) oppure radianti (RAD).

Si ha quindi la soluzione:

$$x = 153°26'6'' + k180° \qquad k \in Z$$

Esempio Risolvere l' equazione:

$$cos2x - 3cosxsex + 1 = 0$$

Questa equazione si può trasformare in omogenea applicando le formule di duplicazione del coseno e sostituendo ad 1 l' espressionme $cos^2x + sen^2x$. Si ha:

$$cos^2x - sen^2x - 3cosx \cdot senx + sen^2x + cos^2x = 0$$

$$2cos^2x - 3cosx \cdot senx = 0$$

Questa equazione non può essere divisa per cos^2x perchè $x = \pm\frac{\pi}{2}$ soddisfa l' equazione. Si raccoglie $cosx$ a fattor comune:

$$cosx \cdot (2cosx - 3senx) = 0$$

Per la legge di annullamento del prodotto si hanno le due equazioni:

$$cosx = 0 \qquad x = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad k \in Z$$

e

$$2cosx - 3senx = 0$$

Poichè $cosx \neq 0$ si divide per $cosx$ e si trova:

$$tgx = \frac{2}{3}$$

$$x = arctg\frac{2}{3} + k \cdot 180^\circ \qquad k \in Z$$

$$x \simeq 33^\circ 41' 24'' + k \cdot 180^\circ$$

3) Equazione lineare in senx e cosx.

Un' equazione è detta *lineare* in $senx$ e $cosx$ se è del tipo:

$$asenx + bcosx + c = 0$$

Si risolve per mezzo delle formule parametriche in $tg\frac{x}{2}$, dopo aver verificato se $x = \pi + 2k\pi$, con $k \in Z$, è radice della equazione proposta; tale valore infatti non si troverebbe risolvendo con le formule parametriche, poichè $tg\frac{\pi}{2}$ non esiste.

Esempio Risolvere l' equazione:

$$sen x + 2 cos x = 1$$

Si verifica che $x = \pi + 2k\pi$, con $k \in Z$, non è radice dell' equazione proposta. Utilizzando le formule parametriche si ha:

$$\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} + 2\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = 1$$

$$2tg\frac{x}{2} + 2 - 2tg^2\frac{x}{2} = 1 + tg^2\frac{x}{2}$$

$$3tg^2\frac{x}{2} - 2tg\frac{x}{2} - 1 = 0$$

$$tg\frac{x}{2} = \frac{2 \pm 4}{6} = \left\{-\frac{1}{3}, 1\right\}$$

Dalla prima soluzione si ottiene:

$$tg\frac{x}{2} = -\frac{1}{3}$$

quindi

$$\frac{x}{2} = tg^{(-1)}\left(-\frac{1}{3}\right)$$

e utilizzando la macchinetta calcolatrice si ha:

$$\frac{x}{2} \simeq 161°33'54" + k180° \; (k \in Z)$$

$$x \simeq 323°7'48" + k360° \; (k \in Z)$$

mentre dalla seconda si ha:

$$tg\frac{x}{2} = 1$$

$$\frac{x}{2} = 45° + k180° \; (k \in Z)$$

$$x = 90° + k360° \; (k \in Z)$$

Esercizi di verifica Risolvere le seguenti equazioni trigonometriche elementari o riconducibili ad esse (servendosi eventualmente di una calcolatrice):

$senx = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \left[x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi;\ x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi\right]$
$cosx = \frac{1}{2}$ $\quad \left[x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right]$
$tgx = -1$ $\quad \left[x = \frac{3}{4}\pi + k\pi\right]$
$sen2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \left[x = \frac{\pi}{8} + k\pi;\ x = \frac{3}{8}\pi + k\pi\right]$
$tg\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$ $\quad \left[x = -\frac{\pi}{12} + k\pi\right]$
$cos^2x + 3sex + 3 = 0$ $\quad \left[x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right]$
$cosx = 2sen^2x + 4$ $\quad$ [nessuna soluzione]

11.3 Disequazioni trigonometriche

Prenderemo in considerazione disequazioni trigonometriche del tipo

$$senx > a,\ cosx > a,\ tgx > a \qquad \text{con } a \in \Re \text{ assegnato}$$

11.3.1 - 1° tipo: $senx \gtrless a$

Iniziamo con la disequazione relativa alla funzione $senx$ e facciamo riferimento al grafico della funzione senx e al grafico della funzione costante $y = a$ per diversi valori del parametro reale a (vedi figura 11.5).

Tenendo presente che i valori della funzione $senx$ sono compresi tra -1 e 1 abbiamo il seguente schema di risoluzione:

$$\begin{cases} senx > a \\ a \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow nessuna\ soluzione$$

$$\begin{cases} senx > a \\ a < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \forall x \in \Re$$

$$\begin{cases} senx > a \\ -1 \leq a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow sia\ x_o\ tale\ che\ senx_o = a con -\frac{\pi}{2} \leq x_o < \frac{\pi}{2};$$

le soluzioni allora sono:

$$x_o + 2k\pi < x < \pi - x_o + 2k\pi \qquad \forall k \in Z$$

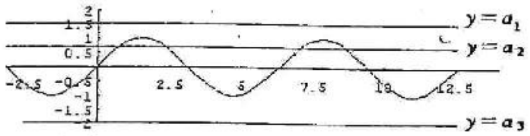

Figure 11.5: $senx > a$

In modo analogo otteniamo uno schema di soluzione per la disequazione $senx < a$.

$$\begin{cases} senx < a \\ a > 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \forall x \in \Re$$

$$\begin{cases} senx < a \\ a \leq -1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow nessuna\ soluzione$$

$$\begin{cases} senx < a \\ -1 < a \leq 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow sia\ x_o\ tale\ che\ senx_o = acon - \frac{\pi}{2} < x_o \leq \frac{\pi}{2};$$

le soluzioni allora sono:

$$-\pi - x_o + 2k\pi < x < x_o + 2k\pi \qquad \forall k \in Z$$

Osservazione Qualora x_o sia un angolo noto, cioè un angolo di quelli particolari, riportati nella tabella (10.1) del capitolo precedente, a x_o si assegna il valore esplicito compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, altrimenti se x_o non è uno fra questi angoli si pone

$$x_o = arcsena$$

(cioè l' arco il cui seno è a) ed è convenzionalmente compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$.

Con l' uso delle macchine calcolatrici si può ottenere un valore approssimato di x_o (il valore di $arcsen$ si trova nelle macchinette calcolatrici indicato con $sen^{(-1)}$).

Esempio Determinare le soluzioni della seguente disequazione:

$$senx > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

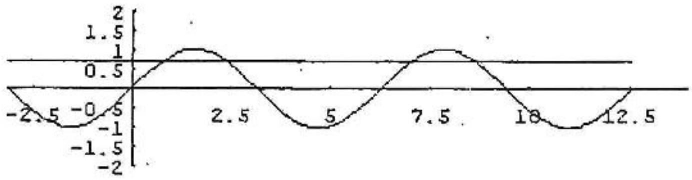

Figure 11.6: $senx > \frac{\sqrt{2}}{2}$

Nell' esempio assegnato risulta

$$a < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$$

(vedi figura 11.6), quindi ha senso considerare le soluzioni fondamentali di

$$senx = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ che sono} \qquad x = \frac{\pi}{4},\ x = \frac{3}{4}\pi$$

La disequazione risulta poi soddisfatta nell' intervallo $]\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi[$ e quindi, per la periodicità, per tutti gli x :

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$$

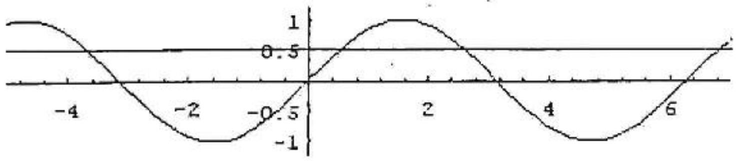

Figure 11.7: $senx < \frac{1}{2}$

Esempio Determinare le soluzioni della seguente disequazione:

$$senx < \frac{1}{2}$$

(vedi figura 11.7).
Nell' esempio assegnato risulta

$$a < \frac{1}{2} < 1$$

quindi ha senso considerare le soluzioni fondamentali di

$$senx = \frac{1}{2} \qquad \text{che sono} \qquad x = \frac{\pi}{6},\ x = -\frac{7}{6}\pi$$

La disequazione risulta poi soddisfatta nell' intervallo $\left]-\frac{7}{6}\pi, \frac{\pi}{6}\right[$, e quindi per la periodicità di tutti gli x :

$$-\pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

e quindi da

$$-\frac{7}{6}\pi + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

Esempio Risolvere la seguente disequazione

$$2sen^2x - senx + 2 < 0$$

Ponendo

$$t = senx$$

si ottiene la disequazione di 2° grado

$$2t^2 - t + 2 < 0$$

che ammette le due soluzioni

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4} = \left\{\frac{1}{2}, 2\right\}.$$

e quindi la disequazione risulta verificata per

$$\frac{1}{2} < t < 2 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} senx > \frac{1}{2} \\ senx < 2 \end{cases}$$

ma

$$senx < 2 \qquad \forall x \in \Re$$

e

$$senx > \frac{1}{2} \qquad \text{per} \qquad \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \qquad \forall k \in Z$$

Ne segue che

$$2sen^2x - senx + 2 < 0$$

ha per soluzioni

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \qquad \forall k \in Z.$$

Esempio Determinare i valori reali x dell' intervallo $[0, 2\pi]$ che soddisfano la disequazione

$$senx < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Si ricercano le soluzioni di

$$senx = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{che sono} \qquad x = \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi \qquad \text{in } [0, 2\pi]$$

e quindi si ha (vedi figura 11.8) :

$$0 \le x < \frac{\pi}{3}, \qquad \frac{2}{3}\pi < x \le 2\pi$$

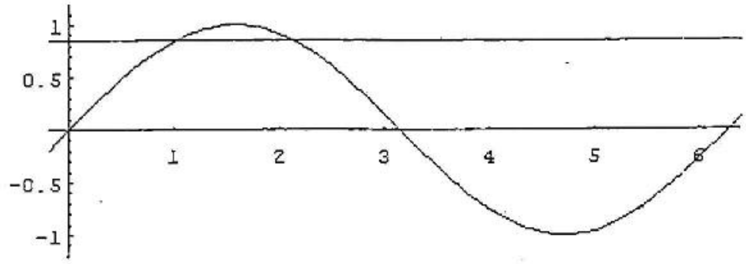

Figure 11.8: $senx < \frac{\sqrt{3}}{2}$

11.3.2 Esercizi di verifica.

- Risolvere le seguenti disequazioni:

1) $senx < -\frac{1}{2}$ $\quad \left[-\frac{5}{6}\pi + 2k\pi < x < -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \qquad \forall k \in Z\right]$

2) $sen^2x < senx$ $\quad \left[2k\pi < x < (2k+1)\pi \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad \forall k \in Z\right]$

- Determinare i numeri reali x dell' intervallo $[0, 2\pi]$ che soddisfano

$$sen^2x > 1$$

$\left[\frac{\pi}{4} < x < \frac{3}{4}\pi, \qquad \frac{5}{4}\pi < x < \frac{7}{4}\pi\right]$

11.3.3 2° tipo: $cosx \gtrless a$

Studiamo ora la disequazione

$$cosx > a$$

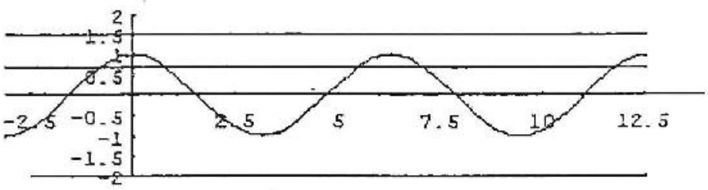

Figure 11.9: $cosx > a$

Tenendo presente che i valori della funzione $cosx$ sono compresi tra -1 e 1 abbiamo il seguente schema di risoluzione:

$$\begin{cases} cosx > a \\ a \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow nessuna\ soluzione$$

$$\begin{cases} cosx > a \\ a < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \forall x \in \Re$$

$$\begin{cases} \cos x > a \\ -1 \leq a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow sia\ x_o\ tale\ che\ cosx_o = a \quad con \quad 0 < x_o < \pi,$$

le soluzioni allora sono:

$$-x_o + 2k\pi < x < x_o + 2k\pi \qquad \forall k \in Z$$

In modo analogo otteniamo uno schema di soluzione per la disequazione $cosx < a$.

$$\begin{cases} cosx < a \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \forall x \in \Re$$

$$\begin{cases} cosx < a \\ a \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow nessuna\ soluzione$$

$$\begin{cases} cosx < a \\ -1 < a \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow sia\ x_o\ tale\ che\ cosx_o = a \quad con \quad 0 < x_o \leq \pi;$$

le soluzioni allora sono:

$$x_o + 2k\pi < x < 2\pi - x_o + 2k\pi \qquad \forall k \in Z$$

Osservazione Qualora x_o sia un angolo noto, cioè un angolo di quelli particolari, riportati nella tabella (10.1) del capitolo precedente, a x_o si assegna il valore esplicito compreso fra 0 e π, altrimenti se x_o non è uno fra questi angoli si pone

$$x_o = arccosa$$

(cioè l' arco il cui coseno è a) ed è convenzionalmente compreso fra 0 e π.

Con l' uso delle macchine calcolatrici si può ottenere un valore approssimato di x_o (il valore di $arccos$ si trova indicato con $cos^{(-1)}$).

Esempio Risolvere la disequazione

$$cosx > \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Si passa a considerare

$$cosx = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

a cui corrisponde l' angolo notevole $\frac{\pi}{6}$; si ottengono pertanto le soluzioni:

$$-\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \qquad \forall k \in Z$$

Esempio Risolvere la disequazione

$$2cosx < 1$$

Da questa si ricava immediatamente

$$cosx < \frac{1}{2}$$

Si passa a considerare

$$cosx = \frac{1}{2}$$

a cui corrisponde l' angolo notevole $\frac{\pi}{3}$; si ottengono pertanto le soluzioni:

$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < 2\pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad \forall k \in Z$$

Esempio Risolvere la disequazione

$$cos^2x - 2cosx - 3 < 0$$

Si pone

$$t = \; cosx$$

e quindi si passa a considerare

$$t^2 - 2t - 3 < 0$$

L' equazione corrispondente ammette le seguenti soluzioni:

$$t_{1,2} = 1 \pm 2 = \{-1, 3\}$$

cioè:

$$-1 < t < 3$$

ricordando che $t = cosx$ si ha:

$$-1 < \; cosx < 3$$

e quindi

$$\begin{cases} cosx > -1 \qquad x \neq +\pi + 2k\pi \qquad \forall k \in Z \\ \qquad\qquad cosx < 3 \qquad \forall k \in Z \end{cases}$$

Le soluzioni sono pertanto

$$x \neq \pi + 2k\pi \qquad \forall k \in Z$$

Esempio Determinare i numeri reali x dell' intervallo $[0, 2\pi]$ che soddisfano la disequazione

$$1 + 2cosx > 0$$

Si ha il grafico riportato in figura 11.10. Dalla disequazione assegnata si ottiene:

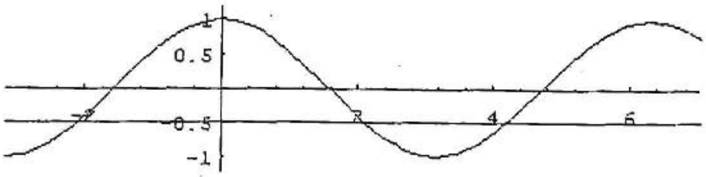

Figure 11.10: $1 - 2cosx > 0$

$$2cosx > -1$$

cioè

$$cosx > -\frac{1}{2}$$

Poichè

$$cosx = -\frac{1}{2},$$

per le soluzioni fondamentali

$$x = \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi \qquad \text{per } x \neq [0, 2\pi]$$

La disequazione è verifficata per

$$0 \leq x < \frac{2}{3}\pi \qquad \frac{4}{3}\pi < x \leq 2\pi$$

11.3.4 Esercizi di verifica.

1) $cosx > 1$ [nessuna soluzione]

2) $cosx < 0$ $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, \quad \forall k \in Z]$

3) Determinare i numeri reali x dell' intervallo $[0, 2\pi]$ che soddisfano la disequazione

$$3 - \ cos^2x > 0 \qquad \left[\frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi\right]$$

11.3.5 3° tipo. $tgx \gtrless a$

Si passano infine ad esaminare le disequazioni

$$tgx > a \qquad tgx < a$$

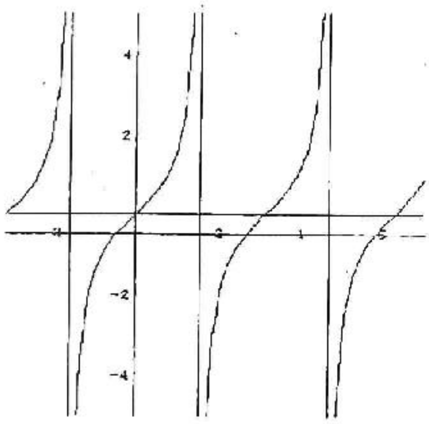

Figure 11.11: $tgx > a$

Tenendo presente che la funzione $y = tgx$ è periodica di periodo π si ha:

$tgx > a \quad \Leftrightarrow \quad$ *scelto* x_o *tale che* $tgx_o = a \quad$ *con* $\quad -\frac{\pi}{2} < x_o < \frac{\pi}{2}$,

le sue soluzioni sono:

$$x_o + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad \forall k \in Z$$

$tgx < a \quad \Leftrightarrow \quad$ *scelto* x_o *tale che* $tgx_o = a \quad$ *con* $\quad -\frac{\pi}{2} < x_o < \frac{\pi}{2}$,

le sue soluzioni sono:

$$-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < x_o + k\pi \qquad \forall k \in Z$$

Osservazione Qualora x_o sia un angolo noto, cioè un angolo di quelli particolari, riportati nella tabella 10.1 del capitolo precedente, a x_o si assegna il valore esplicito compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, altrimenti se x_o non è uno fra questi angoli si pone

$$x_o = arctga \qquad \text{con } x_o \text{ compreso tra } -\frac{\pi}{2} \text{ e } \frac{\pi}{2}$$

dove$artg$ indica sempre l' angolo la cui tangente è a.

Con l' uso delle macchinette calcolatrici si può trovare un valore approssimato di x_o; infatti nelle macchinette calcolatrici la funzione $arctg$ è indicata con $\tan^{(-1)}$ e quindi $x_o = \tan^{(-1)} a$.

Esempio Risolvere la disequazione

$$tgx > 0$$

Risulta

$$tgx = 0 \qquad \text{per} \qquad x = 0$$

quindi si ha

$$0 + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$$

cioè

$$k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad \forall k \in Z$$

Esempio Risolvere la disequazione

$$tgx < -$$

Risulta

$$tgx = -1 \qquad \text{per} \qquad x = -\frac{\pi}{4}$$

cioè

$$-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < -\frac{\pi}{4} + k\pi \qquad \forall k \in Z$$

11.3.6 Esercizi di verifica.

1) $\sqrt{3}+tgx>0$ $\quad\left[-\frac{\pi}{3}+k\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\pi\ \forall k\in Z\right]$

2) $1-\sqrt{3}tgx>0$ $\quad\left[-\frac{\pi}{2}+k\pi<x<\frac{\pi}{6}+k\pi\ \forall k\in Z\right]$

Esempio di riepilogo Risolvere la seguente disequazione

$$2cos^2x+3senx-3>0$$

Con la sostituzione

$$cos^2x=1-sen^2x$$

si ottiene

$$2-2sen^2x+3senx-3>0$$

$$2sen^2x-3senx+1<0$$

Ponendo allora

$$t=senx$$

si ha

$$2t^2-3t+1<0$$

La corrispondente equazione ha per soluzioni:

$$t_1=\frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad t_2=1$$

Le soluzioni della disequazione in t sono dunque

$$\frac{1}{2}<t<1$$

da cui immediatamente si ha

$$\frac{1}{2}<senx<1$$

e quindi

$$\begin{cases} senx<1 & x\neq\frac{\pi}{2}+2k\pi \qquad \forall k\in Z \\ senx>\frac{1}{2} & \frac{\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{5}{6}\pi+2k\pi \end{cases}$$

La soluzione finale è quindi:

$$\frac{\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{5}{6}\pi+2k\pi, \qquad x\neq\frac{\pi}{2}+2k\pi \qquad \forall k\in Z$$