Chapter 12

Funzioni esponenziale e logaritmo

12.1 Funzione esponenziale

12.1.1 Introduzione.

Definizione La funzione
$$x \to a^x \qquad (a > 0)$$
si chiama **funzione esponenziale**, perchè la variabile figura a esponente.

Essa è una delle funzioni più importanti della matematica: un esame accurato di molte grandezze fisiche, chimiche, economiche, rivela il loro variare nel tempo secondo leggi rappresentate da funzioni esponenziali, nelle quali figurano cioè espressioni contenenti a^t per diversi valori di a.

Osservazione La definizione di potenza a^β soddisfa le proprietà formali delle potenze.

Nel caso di un esponente $\beta \leq 0$, si ricorda che per definizione si ha:
$$a^0 = 1 \qquad \text{e} \qquad a^{-\beta} = \left(\frac{1}{a}\right)^\beta$$

12.1.2 Studio della funzione.

Sia a un numero positivo e diverso da 1; tracciamo nel piano cartesiano il grafico della funzione esponenziale la cui equazione è:

$$y = a^x$$

riportando sull' asse delle ascisse i valori dell' esponente x e sull' asse delle ordinate i corrispondenti valori di a^x. Il grafico sarà costituito dall' insieme dei punti di coordinate

$$(x, a^x)$$

Distinguiamo due casi:
1°) $0 < a < 1$
2°) $a > 1$.

Primo caso. $0 < a < 1$.

Per fissare le idee sia $a = \frac{1}{2}$; disegnamo perciò il grafico della curva di equazione

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Per far ciò compiliamo una tabella, dando all' esponente x alcuni semplici valori e determiniamo i corrispondenti valori di $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

Riportiamo sul piano cartesiano xOy i punti di coordinate:

$$(-4, 16), (-3, 8), \ldots\ldots$$

ottenendo il grafico di figura 12.1.

Osserviamo che tale grafico è contenuto nel semipiano $y > 0$, poichè:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > 0 \qquad \forall x \in \Re$$

inoltre, al crescere dell' esponente x, i valori corrispondenti di $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ decrescono, avvicinandosi al valore zero. Esprimiamo questo fatto dicendo che la funzione $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ è decrescente e tende a zero.

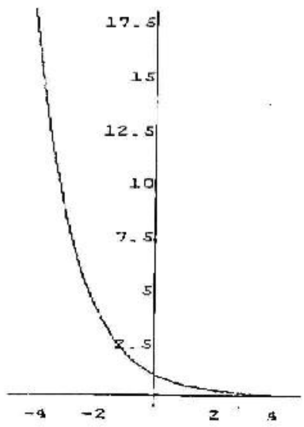

Figure 12.1: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Per esponenti x negativi: $-10, -32, \ldots$, i valori di $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ diventano sempre più grandi:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-10} = 2^{10}, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-32} = 2^{32}, \ldots$$

Il grafico della curva generica

$$y = a^x \qquad (\text{con } 0 < a < 1)$$

ha un andamento analogo a quello della curva $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ della figura 12.1.
Secondo caso. $a > 1$.
Per fissare le idee sia $a = 2$; disegnamo perciò il grafico della curva

$$y = 2^x$$

costruendo una tabella analogamente a quanto si è fatto nel caso precedente e riportando punti $\left(-4, \frac{1}{16}\right), \left(-3, \frac{1}{8}\right), \ldots$ sul piano cartesiano xOy.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 2^x$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16

Il grafico della curva $y = 2^x$ ha l' andamento rappresentato dalla figura 12.2 .

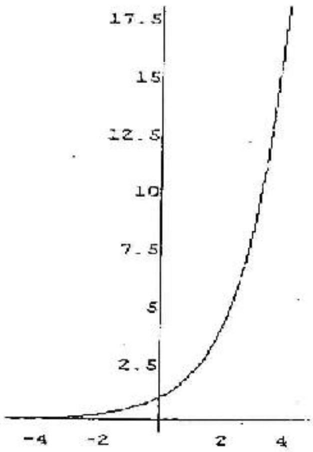

Figure 12.2: $y = 2^x$

Osserviamo che anche tale grafico è posto nel semipiano delle ordinate positive perchè:

$$2^x > 0 \qquad \forall x \in \Re$$

inoltre al crescere dell' esponente x , i valori corrispondenti di 2^x crescono; questo fatto si esprime dicendo che la funzione $y = 2^x$ è crescente. Per esponenti x negativi: $-10, -20, \ldots$ i corrispondenti valori di 2^x decrescono, avvicinandosi al valore zero:

$$2^{-10} = \frac{1}{2^{10}},\ 2^{-20} = \frac{1}{2^{20}}, \ldots$$

Il grafico della curva generica

$$y = a^x \qquad (\text{con } a > 1)$$

ha un andamento analogo a quello della curva $y = 2^x$ rappresentato nella figura 12.2.

12.1.3 La curva $y = e^x$.

Rientra nel secondo caso ($a > 1$) la curva esponenziale

$$y = e^x$$

dove il valore di e approssimato alla settima cifra decimale, è

$$2,7182818.$$

Essendo $2 < e < 3$, il grafico della curva $y = e^x$ è compreso fra quello della $y = 2^x$ e quello della $y = 3^x$.

Si costruisce, al solito modo, la tabella per ottenere il grafico nel piano xOy.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = e^x$	$0,049$	$0,135$	$0,376$	1	$2,718$	$7,389$	$20,085$	$54,598$

si ottiene il grafico della figura 12.3

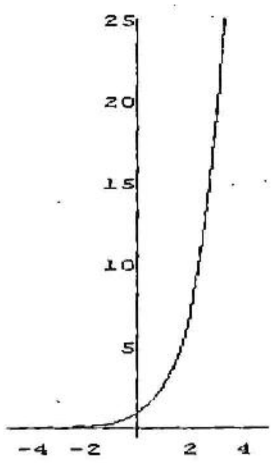

Figure 12.3: $y = e^x$

12.1.4 Equazioni esponenziali.

Definizione Un' equazione si dice **esponenziale** se l' incognita compare a esponente.

Esempio Sono esponenziali le equazioni:

$$3^{x-2} = 5,\ 5^{x-3} = 3^{4x-2},\ 7^{\sqrt{x^2-1}} = 9.$$

L' equazione

$$a^x = b \qquad (\text{con } a > 0) \tag{12.1}$$

si dice **esponenziale elementare**; risolverla significa determinare il valore da dare all' esponente x affinchè la potenza a^x sia uguale a b.

Essendo $a > 0$, per ogni x reale risulta

$$a^x > 0$$

quindi affinchè l' equazione (12.1) ammetta soluzione, occorre che anche b sia un numero positivo. Sussiste il seguente

Teorema fondamentale *Se a è positivo e diverso da 1 e b è positivo, esiste ed è unica la soluzione dell' equazione*

$$a^x = b$$

La condizione $a \neq 1$ si giustifica tenendo conto che, per $a = 1$, $1^x = 1$ per ogni $x \in \Re$; quindi se fosse anche $b = 1$ l' equazione avrebbe infinite soluzioni, mentre, se fosse $b \neq 1$, l' equazione sarebbe impossibile.

La soluzione dell' equazione $a^x = b$ viene indicata con

$$x = \log_a b$$

che si legge logaritmo in base a di b.

Definizione Per definizione il **logaritmo** di un numero b in una base a è quell' esponente da dare ad a per ottenere b.

In simboli

$$a^{\log_a b} = b$$

Per esempio l' equazione

$$3^x = \frac{1}{9}$$

ha come soluzione -2 e quindi

$$-2 = \log_3 \left(\frac{1}{9}\right).$$

Non sempre la soluzione dell' equazione esponenziale è direttamente calcolabile: per esempio la soluzione dell' equazione:

$$3^x = 5$$

che si scrive

$$x = \log_3 5$$

può calcolarsi solo con l' uso di strumenti quali le tavole di logaritmi o una calcolatrice.

Osservazione Le condizioni $a > 0$ e diverso da 1 e $b > 0$ assicurano l' esistenza e l' unicità dell' equazione $a^x = b$.

Vediamo ora alcuni esempi di risoluzione dell' equazione esponenziale.

Esempio Risolvere l' equazione

$$2^{x-1} = \frac{1}{4}$$

Poichè $\frac{1}{4} = 2^{-2}$ l' equazione si può scrivere nella forma

$$2^{x-1} = 2^{-2}$$

da cui, poichè le basi sono uguali, si deduce che devono essere uguali gli esponenti:

$$x - 1 = -2$$

quindi la soluzione cercata è

$$x = -1$$

Esempio Risolvere l' equazione

$$3^{x^2-x} = 9^{x+2}$$

Poichè $9 = 3^2$ si ha:

$$3^{x^2-x} = 3^{2(x+2)}$$

e quindi si ottiene , uguagliando gli esponenti dei due membri

$$x^2 - x = 2x + 4$$

cioè:

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

equazione che ammette le soluzioni

$$x_1 = -1, \ x_2 = 4$$

Esempio Risolvere l' equazione

$$2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 20 = 0$$

Ponendo $2^x = t$ si ha:

$$t^2 - 9t + 20 = 0$$

le cui soluzioni sono:

$$t_1 = 4, \ t_2 = 5$$

si ottiene allora:

$$2^x = 4 \text{ da cui } x = 2$$

e

$$2^x = 5, \text{ da cui } x = \log_2 5$$

12.1.5 Disequazioni esponenziali.

Occupiamoci ora delle disequazioni del tipo

$$a^x \gtrless b \qquad (\text{con } a > 0)$$

Poichè se a è positivo, a^x è positivo per ogni x, si ha che, se $b \leq 0$, la disequazione

$$a^x > b$$

è soddisfatta per ogni x, mentre la disequazione

$$a^x \leq b$$

non è mai soddisfatta.
Sia ora $b > 0$; distinguiamo due casi:
1°. $0 < a < 1$
2°. $a > 1$
Primo caso. $0 < a < 1$
Dal grafico 12.4 si può ricavare che

$$a^x > b, \qquad \text{con } 0 < a < 1 \qquad \text{è verificata per} \qquad x < \log_a b$$

e analogamente

$$a^x < b, \qquad \text{con } 0 < a < 1 \qquad \text{è verificata per} \qquad x > \log_a b$$

Secondo caso. $a > 1$.
Il grafico della funzione esponenziale con $a > 1$ risulta crescente, perciò dal grafico relativo, figura 12.5 si ricava:

$$a^x > b, \qquad \text{con } a > 1 \qquad \text{è verificata per} \qquad x > \log_a b$$

e analogamente

$$a^x < b, \qquad \text{con } a > 1 \qquad \text{è verificata per} \qquad x < \log_a b$$

Esempio Risolvere la disequazione

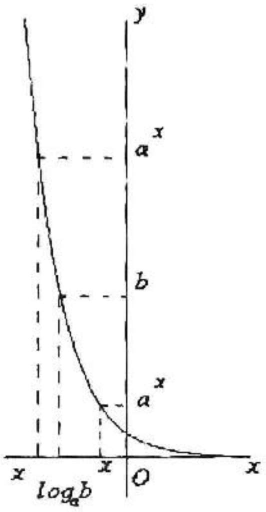

Figure 11.4: $a^x \gtrless b$, $0 < a < 1$

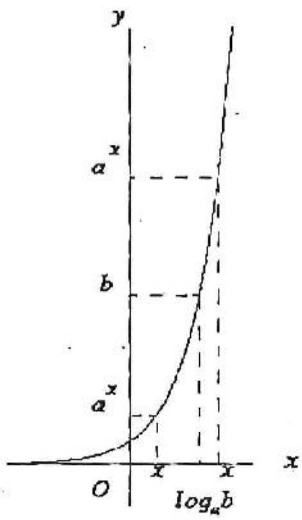

Figure 11.5: $a^x \gtrless b$, con $a > 1$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+9} > 4$$

si può scrivere

$$2^{-x-9} > 4$$

quindi si ha

$$-x - 9 > 2 \qquad \text{e quindi} \qquad x \leq 11$$

In conclusione

$$x \in]-\infty, -11[$$

Esempio Risolvere la disequazione

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} - 9 \geq 0$$

Poenendo $\left(\frac{1}{3}\right)^{x} = t$ si ottiene

$$t^2 - 9 \geq 0$$

che è verificata per $t \leq -3$ e per $t \geq 3$, ossia per

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x} \leq -3 \qquad \text{e} \qquad \left(\frac{1}{3}\right)^{x} \geq 3$$

La prima delle due disequazioni non ha soluzioni, mentre la seconda si può scrivere

$$3^{-x} \geq 3^1$$

da cui

$$-x \geq 1$$

ossia

$$x \in]-\infty, -1]$$

12.2 I logaritmi

Si è detto che l' equazione esponenziale

$$a^x = b$$

con $a > 0$ e $a \neq 1$, ammette una e una sola soluzione per ogni $b > 0$ e si è convenuto di indicare tale soluzione con il simbolo

$$x = \log_a b$$

Possiamo allora dedurre le seguenti

12.2.1 Conseguenze fondamentali.

Sono valide le seguenti proprietà:

a. la funzione esponenziale $x \to a^x$, con $a > 0$ e $a \neq 1$, è dotata di inversa,

b. l' inversa della funzione esponenziale, $b \to \log_a b$, è definita per tutti i numeri positivi;

c. la funzione $x \to \log_a x$ gode delle proprietà formali, analoghe a quelle della funzione esponenziale

12.2.2 Proprietà formali della funzione logaritmo.

Si hanno le seguenti proprietà formali:

$$\boxed{log_a 1 = 0, \ \log_a a = 1} \tag{12.2}$$

Infatti poichè

$$a^0 = 1 \qquad \text{e} \qquad a^1 = a$$

si ottiene che

$$\log_a 1 = 0 \qquad \text{e} \qquad \log_a a = 1$$

Se $b_1 > 0$ e $b_2 > 0$, allora:

$$\boxed{log_a (b_1 \cdot b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2} \tag{12.3}$$

Se $b_1 > 0$ e $b_2 > 0$, allora:

$$\boxed{\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2} \tag{12.4}$$

Se $b > 0$ allora

$$\boxed{\log_a b^k = k \log_a b} \tag{12.5}$$

e infine

$$\boxed{log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c}} \tag{12.6}$$

che è detta formula del *cambiamento di base*.

Scelti per esempio $a = 10$ e $c = 2$ dalla (12.6) si ha l' uguaglianza

$$\log_2 b = \frac{\log_{10} b}{\log_{10} 2}$$

la quale indica che per conoscere il logaritmo di un numero in base 2 , basta conoscere il logaritmo in base 10 e il valore del $\log_{10} 2$. Le tavole di logaritmi tradizionalli sono relative ai logaritmi in base $a = 10$; tale scelta è vantaggiosa perchè 10 è la base del sistema di numerazione usuale.

La parte intera, detta caratteristica, del logaritmo in base 10 di un numero x è l' intero k tale che

$$10^k \leq x \leq 10^{k+1}$$

che corrisponde al numero dellle cifre che esprimono la parte intera di x meno uno.

I logaritmi in base 10 prendono il nome di *logaritmi decimali*; accanto a questi hanno molta importanza i logaritmi in base "e", detti *logaritmi naturali* o *neperiani*.

Utilizzeremo i simboli

$$\log_{10} x \qquad \text{e} \qquad \log x$$

per indicare rispettivamente il logaritmo in base dieci e il logaritmo in base "e" di x. Nelle calcolatrici tascabili i simboli sono rispettivamente

log e ln

12.2.3 La curva logaritmica.

Tracciamo nel piano cartesiano il grafico della funzione

$$y = \log_a x \qquad \left(a \in \Re_0^+ - \{1\}\right),$$

cioè riportiamo sull' asse delle ascisse i valori dell' argomento x e sull' asse delle ordinate i corrispondenti valori di $\log_a x$. Il grafico sarà costituito dall' insieme dei punti di coordinate

$$(x, \log_a x).$$

Distinguiamo due casi:
1°. caso. $0 < a < 1$
2°. caso $a > 1$.

Primo caso. $0 < a < 1$
Per fissare le idee sia $a = \frac{1}{2}$; disegnamo perciò il grafico della curva

$$y = \log_{\frac{1}{2}} x$$

Costruiamo una tabella , dando all' argomento x alcuni valori semplici e troviamo i corrispettivi valori di $\log_{\frac{1}{2}} x$:

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y = \log_{\frac{1}{2}} x$	3	2	1	0	-1	-2	-3

Riportiamo sul piano cartesiano i punti di coordinate $\left(\frac{1}{8}, 3\right)$, $\left(\frac{1}{4}, 2\right)$, ... Il grafico della curva $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ ha l'andamento rappresentato in figura 12.6.

Osserviamo tale grafico: esso è posto nel semipiano $x > 0$, in quanto $x = \left(\frac{1}{2}\right)^y > 0$.

Inoltre , al crescere dell' argomento x i corrisponndenti valori di $log_{\frac{1}{2}}x$ decrescono. Questo fatto si esprime dicendo che la funzione $y = log_{\frac{1}{2}}x$ è decrescente.

Il grafico della funzione

$$y = log_a x \qquad (0 < a < 1)$$

ha un andamento analogo a quello della funzione $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ della figura 12.6.

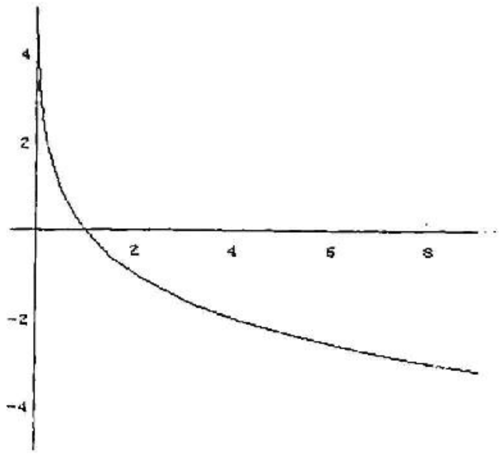

Figure 12.6: $y = log_{\frac{1}{2}} x$

Secondo caso. $a > 1$.
Per fissare le idee sia $a = 2$. Disegnamo perciò il grafico della funzione

$$y = \log_2 x$$

costruendo una tabella analoga a quella presente nel caso 1° e riportando le coppie $\left(\frac{1}{8}, -3\right)$, $\left(\frac{1}{4}, -2\right)$, ... dei valori trovati come coordinate di punti nel piano cartesiano. Otteniamo la curva rappresentata della figura 12.7.

Osserviamo che il grafico di $y = \log_2 x$ è posto anch' esso nel semipiano $x > 0$ ed è crescente. Come nel caso precedente, il grafico della funzione

$$y = \log_a x \qquad (a > 1)$$

ha un andamento analogo a quello della funzione $y = \log_2 x$ della figura 12.7.

12.2.4 La curva $y = \log x$

Poichè la base è $e = 2,7182818....$, l' andamento è analogo a quello riportato in figura 12.7. Costruendo la tabella

x	e^{-3}	e^{-2}	e^{-1}	1	e	e^2	e^3
$y = \log x$	-3	-2	-1	0	1	2	3

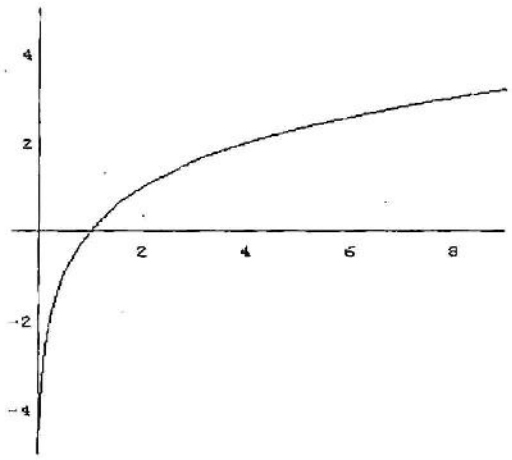

Figure 12.7: $y = \log_2 x$

e riportando le coppie $(e^{-3}, -3), (e^{-2}, -2), ...$ sul piano cartesiano si ottiene la curva in figura 12.8

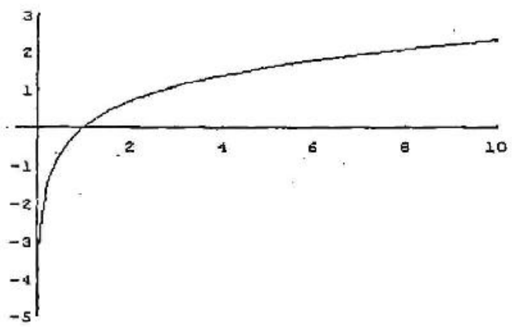

Figure 12.8: $y = \log x$

12.2.5 Equazioni logaritmiche.

Definizione Un' equazione si dice **logaritmica** se l' incognita compare nell' argomento dei logaritmi.

Esempio Sono logaritmiche le equazioni

$$\log_2 x = 4, \qquad \log_3 \left(x^2 - 4\right) = 1, \qquad \log_{\frac{1}{2}} \frac{x-1}{x+1} = 5.$$

Definizione Si chiama **equazione logaritmica elementare** un' equazione della forma

$$\log_a x = b$$

essa ha , per definizione di logaritmo in base a, la soluzione

$$x = a^b$$

Esempio Risolvere l' equazione

$$\log_3 (x - 4) = 2$$

Si ha

$$x - 4 = 3^2$$

da cui si ottiene

$$x = 13$$

Esempio Risolvere l' equazione

$$\log_3 (x - 4) - \log_3 (2x - 1) = -1$$

Per l' esistenza dei due logaritmi deve essere

$$\begin{cases} x - 4 > 0 \\ 2x - 1 > 0 \end{cases}$$

Perciò le soluzioni dovranno verificare la condizione

$$x > 4$$

Per $x > 4$, applicando la proprietà espressa dalla (12.4) si ha

$$\begin{cases} \log_3 \frac{x-4}{2x-1} = -1 \\ x > 4 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} \frac{x-4}{2x-1} = 3^{-1} = \frac{1}{3} \\ x > 4 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} 3x - 12 = 2x - 1 \\ x > 4 \end{cases}$$

da cui si ricava la soluzione accettabile

$$x = 11$$

Esempio Risolvere l' equazione

$$\log_2 (x-1) - \log_{\frac{1}{2}} (3-x) = -1$$

Per la positività degli argomenti deve essere

$$\begin{cases} x - 1 > 0 \\ 3 - x > 0 \end{cases}$$

da cui segue

$$1 < x < 3$$

Riduciamo i due logaritmi in due logaritmi aventi la stessa base: per la (12.6) si ha:

$$\log_{\frac{1}{2}} (3-x) = \frac{\log_2 (3-x)}{\log_2 \frac{1}{2}} = -\log_2 (3-x)$$

L' equazione si può allora scrivere

$$\log_2 (x-1) + \log_2 (3-x) = -1$$

e applicando la (12.3) con la condizione $1 < x < 3$ si ha:

$$\begin{cases} \log_2\left[(x-1)(3-x)\right] = -1 \\ 1 < x < 3 \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} (x-1)(3-x) = \frac{1}{2} \\ 1 < x < 3 \end{cases}$$

da cui

$$2x^2 - 8x + 7 = 0 \qquad (1 < x < 3)$$

equazione che fornisce le soluzioni entrambe accettabili

$$x_1 = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad x_2 = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Esempio Risolvere l' equazione

$$\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2 - 5\log_{\frac{1}{2}} x + 4 = 0$$

Questa risulta un' equazione di 2° grado in $log_{\frac{1}{2}} x$, che ha per soluzioni

$$\log_{\frac{1}{2}} x = 1, \qquad \text{da cui si ricava} \qquad x = \frac{1}{2}$$

e

$$\log_{\frac{1}{2}} x = 4, \qquad \text{da cui si ricava} \qquad x = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

12.2.6 Disequazioni logaritmiche.

Occupiamoco ora delle disequazioni del tipo

$$\log_a x \gtrless b$$

Distinguiamo i due casi
1°. caso. $0 < a < 1$.

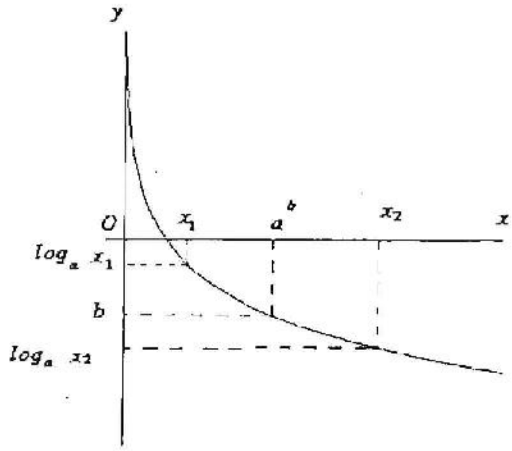

Figure 12.9: Per $0 < a < 1$.

2°. caso. $a > 1$.
Primo caso. $0 < a < 1$.
Dal grafico di figura 12.9 si ricava che la disequazione

$$\log_a x > b$$

che si può scrivere

$$\log_a x > \log_a a^b$$

risulta verificata per

$$0 < x < a^b$$

mentre

$$\log_a x < b$$

è verificata per

$$x > a^b$$

Secondo caso. $a > 1$.
Dal grafico della curva

$$y = \log_a x \qquad \text{con } a > 1$$

dato dalla figura 12.10 si ricava che la disequazione

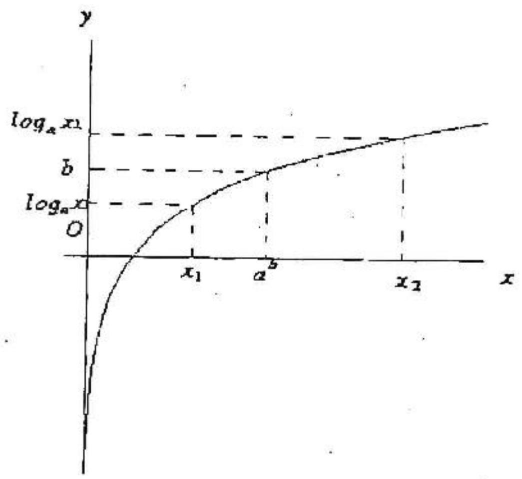

Figure 12.10: Per $a > 1$.

$$\log_a x > b$$

è verificata per

$$x > a^b$$

mentre la disequazione

$$\log_a x < b$$

è verificata per

$$0 < x < a^b$$

Esempio Risolvere la disequazione

$$\log_5 (x-7) > 2$$

Poichè

$$2 = \log_5 5^2$$

si ha

$$\log_5 (x-7) > \log_5 5^2$$

Quindi

$$x - 7 > 5^2$$

ossia

$$x \in]32, +\infty[$$

Esempio Risolvere la disequazione

$$\log_{\frac{1}{2}} (3x-2) > 3$$

Poichè

$$3 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

si ha

$$\log_{\frac{1}{2}} (3x-2) > \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

e quindi

$$0 < 3x - 2 < \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

ossia

$$2 < 3x < \frac{17}{8}$$

da cui si ricava

$$x \in \left]\frac{2}{3}, \frac{17}{24}\right[$$

Esempio Risolvere la disequazione

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(3^{2x}-3^x+1\right)>0$$

Dal grafico 12.9 ricaviamo che il logaritmo in base $\frac{1}{2}$ è positivo se l' argomento è compreso fra 0 e 1; quindi la disequazione è soddisfatta se

$$0<3^{2x}-3^x+1<1$$

Posto $3^x=t$ si ricava:

$$\begin{cases} t^2-t+1>0 \\ t^2-t<0 \end{cases}$$

La prima disequazione è soddisfatta per ogni t, mentre la seconda per $0<t<1$; quindi il sistema è soddisfatto per

$$0<t<1$$

ossia per

$$0<3^x<1$$

Poichè $3^x>0$ per ogni x e $3^x<1$ per $x<0$ si ha che il sistema è soddisfatto per

$$x<0$$

e così pure la disequazione logaritmica considerata.

12.2.7 Esercizi di riepilogo

1) $\frac{3^{4x-2}}{3^{x-2}}-2\cdot 3^{2x+1}-\frac{57}{3^{1-x}}+84=0$ $\quad[1,\log_3 7]$

2) $3^{3x}-3^{2x+1}+2=0$ $\quad\left[0,\log_3\left(1+\sqrt{3}\right)\right]$

3) $e^{2x}+e^{\frac{7}{3}}=e^{2+x}+e^{\frac{3x+1}{3}}$ $\quad\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$

4) $3^{\sqrt{3+x-2x^2}}<3^{2-x}$ $\quad\left[-1,\ \frac{5-\sqrt{13}}{6}\right[\cup\left]\frac{5+\sqrt{13}}{6},\frac{3}{2}\right]$

5) $2\left(\frac{1}{2}\right)^x-2^x\leq 1$ $\quad[0,+\infty]$

6) $\frac{e^x+e^{\sqrt{x}}+2}{e^{2x}-e}\geq 0$ $\quad\left[\frac{1}{2},+\infty\right]$

7) $4\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2 - 5\log_{\frac{1}{2}} x + 1 = 0$ $\left[\frac{1}{2}, \sqrt[4]{\frac{1}{2}}\right]$

8) $\log_a^3 x - \log_a^2 x = 0$ $[1, a]$

9) $\log \frac{x^2-1}{x} = \log 2$ $[1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}]$

10) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{x-1} < \log_{\frac{1}{2}} x$ $]1, 1+\sqrt{2}[$

11) $\log_2 (e^{2x} - e^x) > 1$ $]\log 2, +\infty[$