Chapter 3

Sistemi di disequazioni lineari

3.1 Introduzione

Definizione Due o più disequazioni lineari, con una sola incognita, le quali debbano essere soddisfatte contemporaneamente, costituiscono un *sistema di disequazioni lineari.*

Definizione Ogni soluzione comune a tutte le disequazioni del sistema si chiama *soluzione del sistema.*

Definizione *Risolvere un sistema di disequazioni* significa trovarne tutte le soluzioni.

In generale per **risolvere un sistema** si procede nel modo seguente:

a) si risolvono ad una ad una le disequazioni date, cioè si determinano gli insiemi di soluzioni $I_1, I_2, ..$ di ciascuna di esse;

b) si esamina se vi sono soluzioni comuni alle disequazioni del sistema; cioè si considera l' insieme $I = I_1 \cap I_2 \cap .....,$ intersezione degli insiemi così determinati.

Definizione Tale insieme I è l' *insieme soluzioni del sistema.*

Definizione Se esistono soluzioni comuni, cioè se $I \neq \emptyset$, queste si dicono *soluzioni del sistema.*

Definizione Se non esistono soluzioni comuni, cioè se $I = \emptyset$, si dice che *il sistema è impossibile* oppure che le disequazioni sono tra loro incompatibili.

Esempio Risolvere il sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{4} - \frac{5x+1}{3} > -2 \\ \frac{5x-1}{3} + \frac{2x-1}{6} > 1 \end{cases}$$

Risolvendo separatamente le due disequazioni si tova che la prima è soddisfatta per $x < 1$ e la seconda per $x > \frac{3}{4}$.

Questi risultati sono rappresentati graficamente, con tratto continuo, nella figura 3.1.

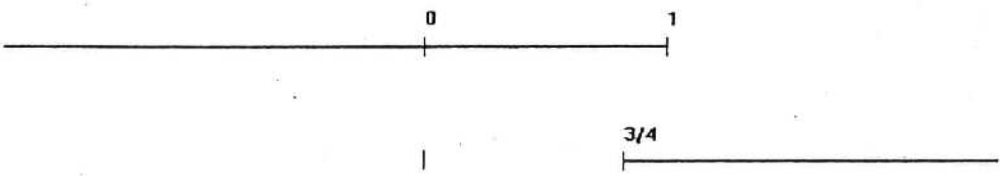

Figure 3.1: Rappresentazione di un sistema di soluzioni

Dalla figura 3.1 si ricava che il sistema dato è soddisfatto dai numeri razionali x tali che:

$$\frac{3}{4} < x < 1$$

Esempio Risolvere il sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{2}{3} < \frac{x-2}{2} \\ \frac{x+2}{2} + \frac{1-x}{3} > -\frac{2x+1}{2} \end{cases}$$

Risolvendo separatamente le due disequazioni, si trova che la prima è soddisfatta per $x > 2$, la seconda per $x > -\frac{11}{7}$ (vedi figura 3.2).

Risulta $I_1 \subset I_2$ e quindi $I_1 \bigcap I_2 = I_1$. Pertanto il sistema è soddisfatto per $x > 2$.

Esempio Risolvere il sistema di disequazioni:

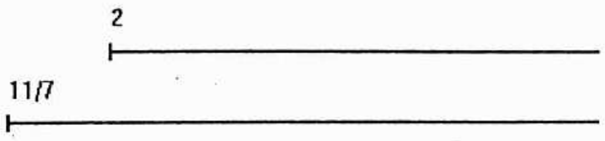

Figure 3.2: Rappresentazione di un sistema di disequazioni.

$$\begin{cases} x-1 \leq 2 \\ x-2 < 2(x+1) \\ \frac{x+1}{3} < 1 - \frac{2-x}{2} \end{cases}$$

Si ha successivamente

$$\begin{cases} x-1 \leq 2 \\ x-2 < 2(x+1) \\ \frac{x+1}{3} < 1 - \frac{2-x}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x-2 < 2x+2 \\ 2x+2 < 6-6+3x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x > -4 \\ x > 2 \end{cases}$$

Dalla rappresentazione grafica di questi risultati (figura 5.13) si deduce che il sistema è soddisfatto per:

$$2 < x \leq 3$$

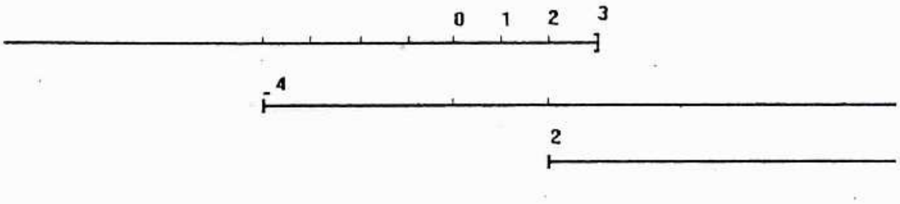

Figure 3.3: Rappresentazione di un sistema di disequazioni.

3.2 Metodo dei segni

Tale metodologia viene applicata spesso nella risoluzione delle disequazioni. Vediamo di chiarirne l' applicazione con lo sviluppo del seguente

Esercizio Risolvere la disequazione:

$$(x-3)(3x-1) > 0$$

Poichè il prodotto di due fattori è positivo quando i due fattori sono entrambi positivi o entrambi negativi, segue che le soluzioni della disequazione assegnata sono date dalle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x-3>0 \\ 3x-1>0 \end{cases}$$

oppure quelle del sistema:

$$\begin{cases} x-3<0 \\ 3x-1<0 \end{cases}$$

Detti perciò I_1 e I_2 l' insieme soluzione, rispettivamente del primo sistema e del secondo sistema , segue che l' insieme delle soluzioni della disequazione $(x-3)(3x-1) > 0$ è:

$$I = I_1 \cup I_2$$

Il primo sistema è soddisfatto per $x > 3$; il secondo sistema per $x < \frac{1}{3}$. Quindi la disequazione iniziale è soddisfatta per :

$$x > 3; \qquad x < \frac{1}{3}$$

La soluzione della

$$(x-3)(3x-1) > 0$$

si trova ancora più facilmente applicando il *metodo dei segni*: sopra una retta si segna con tratto continuo la semiretta contenente i valori per cui il primo fattore risulta positivo, e con tratteggio quella contenente i valori per cui tale valore risulta negativo. La stessa cosa si fa , sopra una seconda retta, per il secondo fattore.

Dopo di ciò si rilevano subito, assai facilmente, quali sono gli insiemi dove i due fattori assumono lo stesso segno (vedi figura 3.4).

Si vede subito che entrambi i fattori sono positivi per $x > 3$ ed entrambi negativi per $x < \frac{1}{3}$.

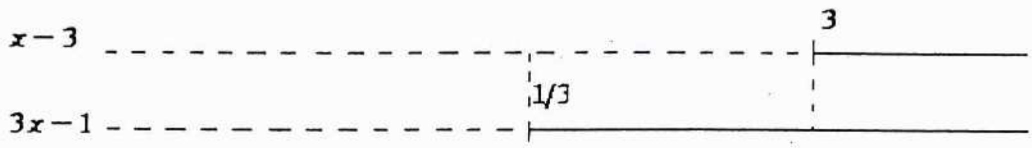

Figure 3.4: Rappresentazione del metodo dei segni

Esercizio Risolvere la disequazione:

$$x(x-1)\left(x^2-9\right) < 0$$

La disequazione che si può scrivere:

$$x(x-1)(x-3)(x+3) < 0$$

è soddisfatta per i valori di x che rendono negativi un numero dispari di fattori. Ricorrendo alla rappresentazione geometrica si ottiene la figura 3.5 da cui risulta che la disequazione è soddisfatta per:

$$-3 < x < 0; \qquad 1 < x < 3$$

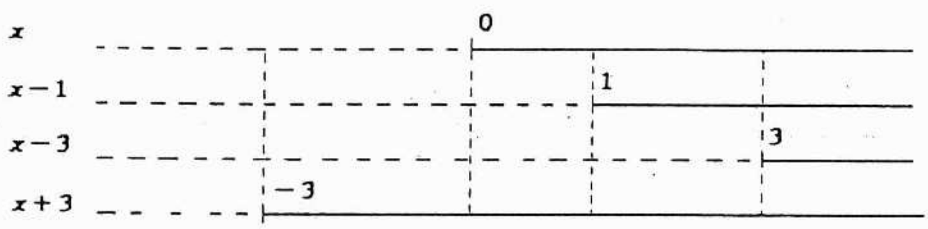

Figure 3.5: Rappresentazione del metodo dei segni

Esercizio Risolvere la disequazione:

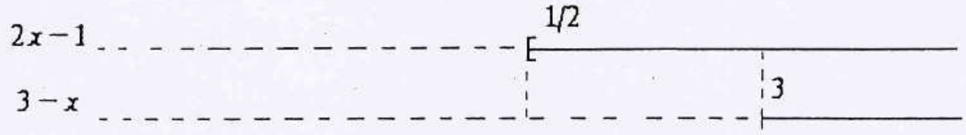

Figure 3.6: Rappresentazione del metodo dei segni

$$\frac{2x-1}{x-3} \leq 0$$

Anche per il segno del quoziente valgono le stesse considerazioni fatte per il prodotto. Ricorrendo alla rappresentazione grafica si ha la figura 3.6.

Dalla 3.6 si deduce che la disequazione è soddisfatta per:

$$\frac{1}{2} \leq x < 3$$

3.2.1 Esercizi di verifica.

Esercizio Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni:

$$\begin{cases} 4(1-x)+3(x-2)<9x \\ 3\left(x-\frac{1}{4}\right)+5\left(x-\frac{1}{3}<x\right) \\ \frac{x+1}{4}-\frac{x-2}{3}<1 \end{cases} \qquad \left[-\frac{1}{5}<x<\frac{29}{84}\right],$$

$$\begin{cases} \frac{x}{a+1}-\frac{2x}{a-1}<\frac{x+1}{a^{2}-1} \\ \frac{x-1}{a+2}<1, \end{cases} \text{con } a>1 \qquad \left[-\frac{1}{a+4}<x<a+3\right].$$

Esercizio Risolvere le disequazioni:

$\frac{x+4}{x-3}<2 \qquad [x<3; x>10]$,

$\frac{2x+5}{3x-1}>4 \qquad \left[\frac{1}{3}<x<\frac{9}{10}\right]$,

$(2x-1)(x+3)<0 \qquad \left[-3<x<\frac{1}{2}\right]$,

$(2-x)(x+1)(x+3)>0 \qquad [x<-3; -1<x<2]$,

$(3-2x)(4-x^{2})(9-4x^{2})>0 \qquad \left[x<-2; -\frac{3}{2}<x<2; x\neq\frac{3}{2}\right]$.